

Capitolo 4

Flussi potenziali, moti irrotazionali

Una situazione asintotica che si verifica frequentemente in problemi fluidodinamici, in aeronautica e meccanica è quella per $Re \rightarrow \infty$ che dà luogo ai flussi Euleriani. In tale situazione si possono distinguere due casi :

- 1) Flussi attaccati con effetti delle viscosità relegati in sottoregioni estremamente piccole (strati limite, scie; vedi figure alle pagine precedenti) in cui il flusso è vorticoso ed ampi spazi del campo dove non si risentono gli effetti delle viscosità ed in generale, per il teorema di Lord Kelvin, il flusso è **irrotazionale** e pertanto ammette un potenziale di velocità ϕ .
- 2) Flussi con presenza di distacchi ed ampie ricircolazioni (profili stallati, flussi a valle di corpi tozzi, diffusori con grandi angoli di divergenza), in tal caso le dimensioni delle regioni rotazionali sono confrontabili con le dimensioni delle regioni esterne, e pertanto non è possibile in generale l'utilizzazione di un modello potenziale-irrotazionale.

Ci limitiamo, per semplicità, allo studio del caso 1, considerando pertanto flussi incompressibili non viscosi, nelle regioni esterne. La regione interna di strato limite, sempre appartenente al caso 1, sarà analizzata nel successivo Cap. 5.

4.1 Flussi potenziali, incompressibili, non viscosi

■ Equazione di conservazione della massa per $\frac{\gamma Ma^2}{Ru} \ll 1$ e $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$ (continuità):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.1)$$

■ Equazione di Eulero per $Re \rightarrow \infty$ e $Fr \rightarrow \infty$: $\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$ (4.2)

■ Data l'incompressibilità l'equazione di stato risulta: $\rho = \rho_0$ (4.3)

La condizione di incomprimibilità, non viscosità e conservatività delle forze di massa (per Lord Kelvin) dà:

$$\text{se } \vec{\omega}(\vec{x}, t=0) = 0 \text{ allora } \vec{\omega}(\vec{x}, t) = 0 \quad (4.4)$$

Infatti per il teorema di Stokes: $\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \oint_c \vec{u} \cdot d\vec{l}$ (4.5)

$$\Gamma(t=0) = \oint_c \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall c \text{ (la vorticità è nulla a } t=0)$$

Se per assurdo $\vec{\omega} \neq 0$ si avrebbe del flusso di $\vec{\omega}$ diverso da zero, quindi $\Gamma \neq 0$, cosa impossibile.

E' facile vedere che

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{u} \quad (4.6)$$

Infatti $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$. Pertanto esiste φ tale che $\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$.

Sostituendo le (4.6) nella (4.1) ottengo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.7)$$

che è l'equazione di Laplace per il potenziale di velocità φ . L'equazione (4.7) e le relative condizioni al contorno **sono lineari** e vale pertanto il **principio di sovrapposizione**. Questo in quanto l'operatore differenziale ∇^2 è un operatore lineare, cioè valgono le:

$$\nabla^2(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla^2 \varphi_1 + \nabla^2 \varphi_2 \quad \text{e} \quad \nabla^2(c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2) = c_1 \nabla^2 \varphi_1 + c_2 \nabla^2 \varphi_2$$

Inoltre nell'equazione 4.7 non compare esplicitamente il tempo (fisicamente vuol dire che le perturbazioni di pressione si propagano con velocità infinita), pertanto quanto detto vale anche per il caso non stazionario. E' conveniente scrivere le equazioni nel sistema di riferimento solidale con l'aria all' ∞ (SRA)

$$\vec{u} = 0 \quad \text{e} \quad \varphi = 0$$

all' ∞ . In tal modo il potenziale e la velocità saranno solo quelli relativi alla perturbazione dovuta alla presenza del corpo (potenziale di perturbazione).

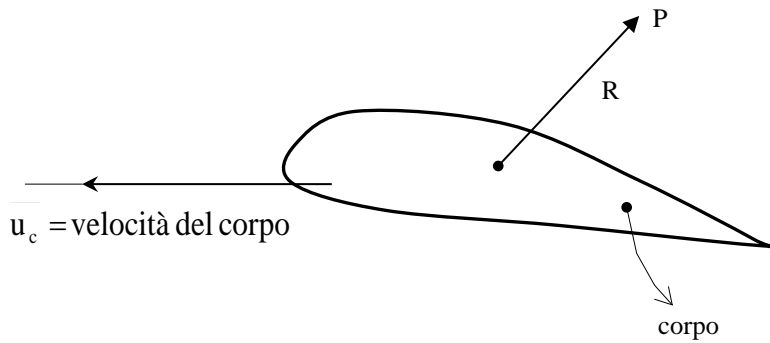
Il potenziale completo sarà ottenuto mediante sovrapposizione del potenziale della corrente uniforme φ_∞ calcolato nel seguito, al potenziale di perturbazione φ dovuto al corpo che sarà calcolato come descritto nei capitoli successivi. La sola cinematica determina totalmente il campo di moto in quanto l'equazione di trasporto della vorticità (3.67a) è identicamente soddisfatta da $\vec{\omega} = 0$.

Si noti che il sistema (4.1) e (4.2) è di 4 equazioni differenziali in 4 incognite (p, u_i) non lineari e non stazionarie ed in 4 variabili indipendenti (x_i, t). Al contrario la (4.7) è un'equazione differenziale lineare solo nello spazio (x_i , variabile indipendente) con incognita φ . Per valutare la velocità noti φ e φ_∞ utilizzerò la (4.6) e per la pressione avrò l'equazione di Bernouilli che è un'equazione algebrica non lineare (quadratica) in u ma lineare nell'incognita p .

4.1.1 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno sono di potenziale di perturbazione φ nullo all' ∞ , velocità assegnata sul corpo e nelle eventuali aperture (getti, ugelli), condizioni di salto piu' complesse sulla scia (non trattate in questo corso).

Considerando un generico punto P a distanza R da un corpo generico (rappresentato in figura da un profilo alare), si ha:



- **All'infinito:**

La condizione al contorno è di perturbazione nulla per $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi = 0$$

- **Corpo solido**

Le condizioni al contorno fisiche sulla superficie del corpo sono di impermeabilità e non scorrimento (per pareti solide $\vec{u} = 0$); poiché l'equazione (4.7) è del secondo ordine richiede una sola condizione su tutto il contorno (o su $\vec{u} \cdot \vec{n}$ o su $\vec{u} \cdot \vec{\tau}$ componente normale o tangenziale della velocità) e si rinuncia perciò alla condizione sulla componente tangenziale della velocità. Pertanto le condizioni al contorno sono di impermeabilità sul corpo, essendo \vec{u} la velocità del fluido (incognita) e \vec{u}_c la velocità del corpo (nota):

$$(\vec{u} - \vec{u}_c) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u}_c \cdot \vec{n}$$

quindi

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \vec{u}_c \cdot \vec{n} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{u}_c \cdot \vec{n}$$

Riassumendo, dobbiamo risolvere il problema differenziale:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{4.7}$$

Con condizioni al contorno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{u}_c \cdot \vec{n} \quad \text{sul corpo} \tag{4.8a}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{all' } \infty \tag{4.8b}$$

(in quanto siamo in SRA e φ è il potenziale di perturbazione).

Metodi di soluzione dell'equazione (4.7) + condizioni al contorno (4.8):

- DF=Differenze Finite (abbiamo visto un'applicazione precedentemente)
- EF=Elementi Finiti

- VF=Volumi Finiti
- MS=Metodi Spettrali
- EIC=Elementi Integrali di Contorno (metodo dei pannelli), la cui applicazione vedremo nel seguito del presente capitolo. In Inglese EIC è *Boundary Elements* (BE)

4.1.2 Potenziale di corrente uniforme

Banale ma certamente importante è il potenziale prodotto da una corrente uniforme con angolo di incidenza α e velocità \vec{u}_∞ :

Il potenziale φ_∞ sarà $u_\infty(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ che è una soluzione della (4.7), infatti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x} &= u_\infty \cos \alpha & \frac{\partial^2 \varphi_\infty}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial y} &= u_\infty \sin \alpha & \frac{\partial^2 \varphi_\infty}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \varphi_\infty = 0$$

4.1.3 Secondo Teorema di Green (*leggere*)

Introduciamo ora il teorema che ci consente di formulare la soluzione del sistema (4.7) + (4.8) mediante EIC.

Siano date due funzioni di campo g e $\varphi \in C^2$ ed $x \in \tilde{V}$, valgono le:

$$\begin{aligned} \varphi \nabla^2 g &= \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} g = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} g) - \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} g \\ g \nabla^2 \varphi &= g \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} \cdot (g \vec{\nabla} \varphi) - \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} \varphi \end{aligned}$$

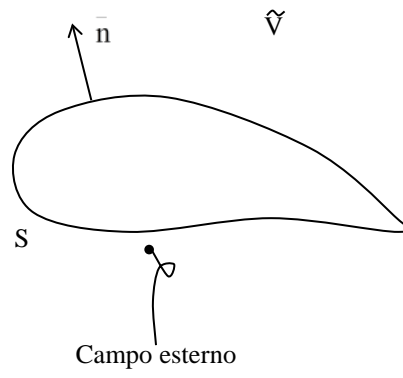
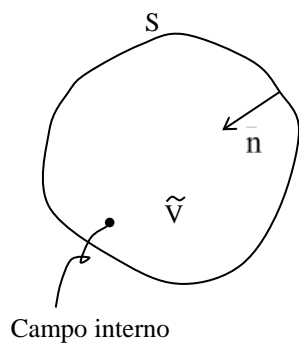
sottraendo si ottiene

$$\varphi \nabla^2 g - g \nabla^2 \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} g) - \vec{\nabla} \cdot (g \vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} \varphi) \quad (4.9)$$

Se consideriamo il volume \tilde{V} e la sua frontiera S , ed applichiamo il teorema di Green-Gauss (della divergenza):

$$\iiint_{\tilde{V}} (\varphi \nabla^2 g - g \nabla^2 \varphi) dV = \iiint_{\tilde{V}} \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} \varphi) dV = \iint_S (g \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} g) \cdot \vec{n} dS \quad (4.10)$$

Il segno cambia in quanto nel teorema della divergenza la normale è presa positiva se uscente dal dominio.



4.2 Potenziale di sorgente (*leggere*)

Ipotizziamo di voler calcolare il campo di potenziale scalare φ nonché il relativo campo di velocità di perturbazione, nota una certa distribuzione di sorgenti Δ (**velocità di espansione**¹ in un volumetto V').

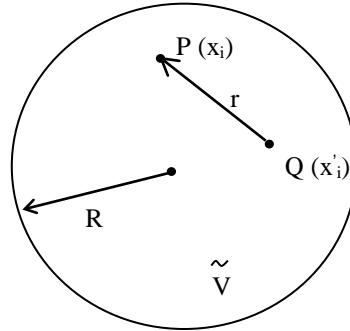
Cerchiamo una rappresentazione integrale delle soluzioni servendoci del II° teorema di Green (4.10): Siano φ e g due campi scalari arbitrari di classe C^2 su un dominio sferico 3D e sia \tilde{V} il volume di una sfera con $R \rightarrow \infty$:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{in } \tilde{V} \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in } \tilde{V}) \quad (4.11)$$

$$\text{e } \nabla^2 \varphi = \Delta \quad \text{in } V' \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \Delta \quad \text{in } V')$$

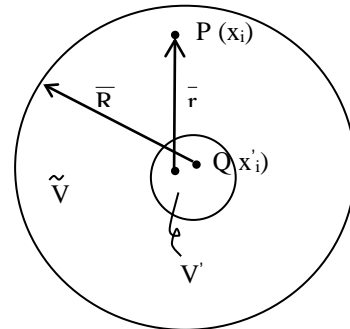
Sia r la distanza tra due punti $P(x_i)$ e $Q(x'_i)$, cioè:

$$r = \sqrt{(x_i - x'_i)^2} \quad (4.12)$$



$$\text{Allora per (4.10): } \iiint_{\tilde{V}} (\varphi \nabla^2 g - g \nabla^2 \varphi) dv = \iint_S (g \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{n} - \varphi \vec{\nabla} g \cdot \vec{n}) dS$$

Assumiamo la g tale che :



$$\begin{cases} \nabla^2 g = \delta(r) \\ g = 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.13)$$

¹ In questo caso, dalla conservazione della massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \Delta$$

Ciò equivale a dire che il flusso è compressibile (si pensi a fenomeni di combustione con aumento di temperatura, esplosioni ecc...) oppure che è presente una sorgente (un rubinetto al centro di una vasca, piscina ecc..)

Con $\delta(r)$ Delta di Dirac².

Inoltre si può dimostrare che (la dimostrazione sarà data successivamente alla fine del paragrafo 4.2):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_S (...) dS = 0 \quad (4.14)$$

Cioè se il punto $P(\bar{x})$ resta al finito e la superficie della sfera che racchiude il dominio d'interesse \tilde{V} , va all'infinito :

$$\iiint_{\tilde{V}} (\varphi \nabla^2 g - g \nabla^2 \varphi) dV = 0 \quad (4.15)$$

ma per le (4.13) e (4.11) la (4.15) diventa:

$$\iiint_{\tilde{V}} (\varphi \nabla^2 g - g \nabla^2 \varphi) dV = \iiint_{\tilde{V}} (\varphi \delta(r) - g \Delta) dV = 0$$

e quindi ($\Delta = 0$ in $\tilde{V} - V'$):

$$\iiint_{\tilde{V}} \varphi \cdot \delta(r) dV = \iiint_{V'} g \Delta dV$$

ma per la definizione di delta di Dirac, il primo termine risulta:

$$\iiint_{\tilde{V}} \varphi \delta(r) dV = \iiint_{V'} \varphi(\bar{x}') \delta(\bar{x}', \bar{x}) dV' = \varphi(\bar{x})$$

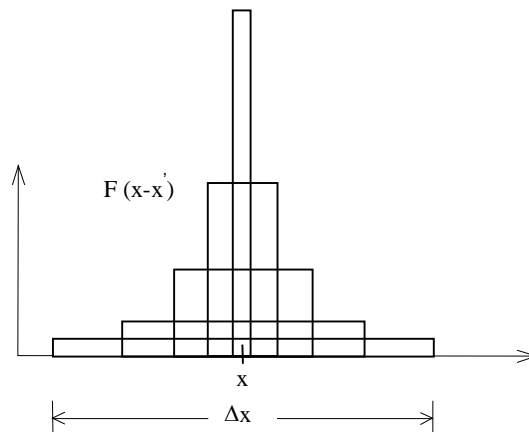
² Il $\delta(r)$ (Delta di Dirac) è una funzione che vale

$$\delta(r) \begin{cases} = \infty & \text{per } r = 0 \\ = 0 & \text{per } r \neq 0 \end{cases} \quad \text{ed inoltre}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - r') f(r') dr' = f(r) \quad \text{ovvero} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - r') dr' = 1 \quad \text{cioè ad integrale unitario. Per capire il significato}$$

fisico, in una dimensione si ha:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = \infty & \text{per } x - \frac{\Delta x}{2} < x' < x + \frac{\Delta x}{2} \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{x} - x') f(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{x} - x') \cdot 1 \cdot dx' = \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} dx' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} dx' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Abbiamo quindi una rappresentazione integrale del potenziale φ indotto nel punto $P(x_i)$ dalla distribuzione di sorgenti $\Delta'(x'_i)$ nel volume V' .

$$\varphi_s(\vec{x}) = \iiint_{V'} g \Delta' dV' \quad (4.16)$$

Risolviamo il problema (4.13), cioè calcoliamo la g ; oltre alla condizione al contorno all' ∞ dobbiamo tenere conto che $\iiint_V \delta(r) dV = 1$ (vedi. nota alla pagina precedente). A

tale scopo, facciamo un integrale di volume su una sfera di raggio R :

$$\iiint_V \nabla^2 g \cdot dV' = \iiint_V \delta(r) dV' = 1 \quad (4.17)$$

scriviamo ora il $\nabla^2 g$ in coordinate sferiche :

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.18)$$

il cui integrale generale è (si veda nota 3 in Cap.6)

$$g = -\frac{A}{r} + B \quad (4.19)$$

Calcoliamo le costanti dalle condizioni al contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g = 0 \quad \text{segue che} \quad B=0$$

Dal teorema della divergenza applicato alla (4.17) :

$$\iiint_V \nabla^2 g \cdot dV = \iint_S \vec{\nabla} g \cdot \vec{n} dS = 1$$

Se consideriamo una superficie sferica di raggio r : $dS = r^2 d\alpha$ riconducendosi alla (4.17):

$$1 = \iint_S \vec{\nabla} g \cdot \vec{n} dS = \int_{4\pi} r^2 \frac{A}{r^2} d\alpha = 4\pi A \Rightarrow A = \frac{1}{4\pi} \quad \text{dove} \quad \frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\partial g}{\partial r}$$

da cui consegue l'espressione della funzione di Green di spazio libero in 3D:

$$g = -\frac{1}{4\pi r} \quad (4.20)$$

In 2D si ottiene³ analogamente per la funzione di Green di spazio libero:

$$g = \frac{\ln(r)}{2\pi} \quad (4.21)$$

Il potenziale di distribuzione volumetrica di sorgenti risulta essere⁴ pertanto dalle (4.16):

³ La dimostrazione è stata condotta in 3D in quanto piu' facile.

⁴ $r = \sqrt{(x_i - x'_i)^2}$ quindi $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x'_i}{r}$ $\frac{\partial r}{\partial x'_i} = -\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i - x'_i}{r}$
 $\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_i} = -\frac{x_i - x'_i}{r^3}$ $\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'_i} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_i} = \frac{x_i - x'_i}{r^3}$; $\frac{\partial \left(\frac{1}{r^2}\right)}{\partial x_i} = -2\frac{x_i - x'_i}{r^4}$ $\frac{\partial \left(\frac{1}{r^3}\right)}{\partial x_i} = -3\frac{x_i - x'_i}{r^5}$
 $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{(x_i - x'_i)^2}{r^5} = 0$

$$\varphi_s(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\Delta'}{r} dV' \quad (4.22)$$

Poiché la (4.22) è analitica, la velocità può essere calcolata formalmente per derivazione analitica:

$$\bar{u}_s(\bar{x}) = \bar{\nabla} \varphi_s(x) = \bar{\nabla} \iiint_{V'} g[\bar{r}(\bar{x}, \bar{x}')] \Delta' dV' = \iiint_{V'} \Delta' \bar{\nabla} g \cdot dV' = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\bar{r}}{r^3} \Delta' dV' \quad (4.23)$$

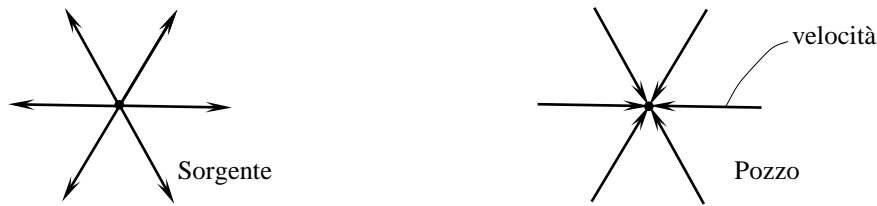
Queste sono potenziale $\varphi_s(\bar{x})$ e velocità $\bar{u}_s(\bar{x})$ indotte in un punto qualunque $P(\bar{x})$ dello spazio nel volume \bar{V} da una distribuzione di sorgenti $\Delta(\bar{x}')$ in un sottospazio V' .

Se Δ' non è una distribuzione ma un impulso di massa in \bar{x}'_0 :

$$\varphi_s(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{m\delta(\bar{x}'_0 - \bar{x}')}{r(\bar{x}, \bar{x}')} dV' = -\frac{m}{4\pi r(\bar{x}, \bar{x}'_0)} = mg(\bar{x}, \bar{x}'_0) \quad (4.24)$$

$$\bar{u}_s(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{r}}{r^3} m = m\bar{\nabla} g \quad (4.25)$$

Queste sono potenziale $\varphi_s(\bar{x})$ e velocità $\bar{u}_s(\bar{x})$ indotte in un punto qualunque $P(\bar{x})$ dello spazio nel volume \bar{V} da un sorgente di massa di intensità m localizzata in \bar{x}'_0 .



Resta da verificare che l'integrale superficiale è nullo per $R \rightarrow \infty$, infatti se $R \rightarrow \infty$ e $P(\bar{x})$ resta al finito, nell'integrale di superficie anche $r \rightarrow \infty$, inoltre :

$$\varphi_s(\bar{x}) = o\left(\frac{1}{r}\right) ; \quad g = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{quindi :} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_S (g\bar{\nabla}\varphi - \varphi\bar{\nabla}g) \cdot \bar{n} dS &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{4\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{1}{r^2} k_1 - \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} k_2 \right) r^2 d\alpha = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_1 - k_2}{r} 4\pi = 0 \quad \text{con } k_1 \text{ e } k_2 \text{ costanti} \end{aligned}$$

(C.V.D.).

Per completezza, si dicono potenziale $\varphi_p(\bar{x})$ e velocità $\bar{u}_p(\bar{x})$ indotto da un pozzo, le quantità $\varphi(\bar{x})$ e $\bar{u}(\bar{x})$ ottenute con $m < 0$.

4.3 Potenziale di doppietta (*leggere*)

Siano φ_s e φ_p potenziale di sorgente e pozzo, tali che : $\varphi_s(\vec{x}) = -\varphi_p(\vec{x}')$

Vogliamo calcolare mediante sovrapposizione il potenziale φ_d , di una sorgente e di un pozzo di uguale intensità posti ad una piccola distanza $\delta\vec{x}$:

$$\varphi_d(\vec{x}) = \varphi_s(\vec{x}) + \varphi_p(\vec{x}) = \varphi_p(\vec{x}) - \varphi_p(\vec{x}') = \delta\vec{x} \frac{\varphi_p(\vec{x}) - \varphi_p(\vec{x} + \delta\vec{x})}{\delta x}$$

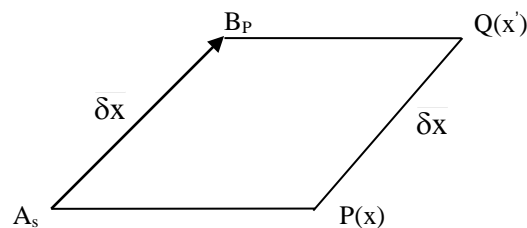
$$\varphi_d(\vec{x}) = -\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \varphi_p(\vec{x})$$

Facendo il limite per $\delta x \rightarrow 0$, l'ultimo termine rappresenta una derivata direzionale secondo \vec{x} moltiplicata scalarmente per $\delta\vec{x}$.

Essendo (si veda 4.25) $\vec{\nabla} \varphi_p = -m\vec{\nabla} g \Rightarrow \varphi_d(\vec{x}) = m\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla} g$

ma poichè δx è infinitesimo

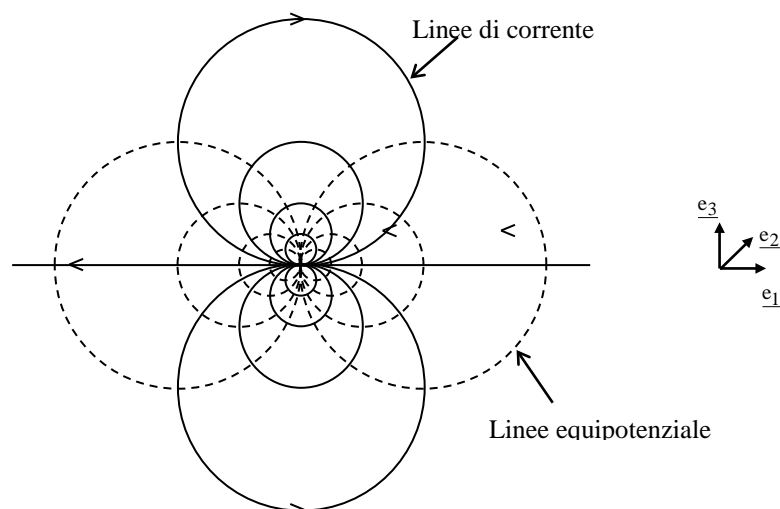
definisco intensità di doppietta ($\vec{\mu}$) la quantità finita:



$$\vec{\mu} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} m\delta\vec{x}$$

e conseguentemente

$$\varphi_d = \lim_{\delta x \rightarrow 0} (m\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla} g) = \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla} g = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (4.26)$$



Se la doppietta è posta $Q(\vec{\sigma})$ ed ha la direzione \vec{e}_1 :

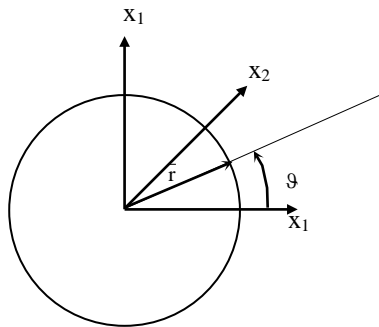
$$\begin{cases} \vec{\mu} = \mu \vec{e}_1 \\ \varphi_d = \frac{\mu x_1}{4\pi r^3} \end{cases} \quad (4.27)$$

La velocità indotta da questa doppietta è :

$$\begin{aligned} u_{d_i}(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_d(x) = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right\} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} - 3x_1 \frac{x_i - x'_i}{r^5} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Il modulo è :

$$|u_d| = \frac{\mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta} \quad (4.29)$$



4.4 Velocità indotta in un campo irrotazionale da vorticità concentrata o distribuita in una regione limitata (leggere)

In questo caso, essendo il flusso incompressibile (campo solenoidale) introduciamo il potenziale vettore $\vec{\Psi}$. Calcoliamo pertanto il potenziale vettore $\vec{\Psi}$ in un punto qualunque $P(\vec{x})$ nel dominio \vec{V} nota una certa distribuzione di vorticità $\vec{\omega}$ distribuita in un volume limitato V' . Calcoliamo il relativo campo di velocità \vec{u}_v . Procediamo analogamente a quanto fatto in cap. 4.2 equazione (4.15) e successivi dove la φ è sostituita da $\vec{\psi}$.

$$\iiint_{\vec{V}} (\vec{\psi} \nabla^2 g - g \nabla^2 \vec{\psi}) dV = \iint_S [g \vec{\nabla} \vec{\psi} - \vec{\psi} \vec{\nabla} g] \cdot \vec{n} dS \quad (4.30)$$

L'integrale di superficie, come già dimostrato, è nullo se la superficie sferica va all'infinito ($R \rightarrow \infty$). Il primo termine dà per le (4.13) e per le (3.66.b):

$$\vec{\psi}_v(\vec{x}) = - \iiint_{V'} g \vec{\omega}' dV' = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{\omega}'}{r} dV' \quad (4.31)$$

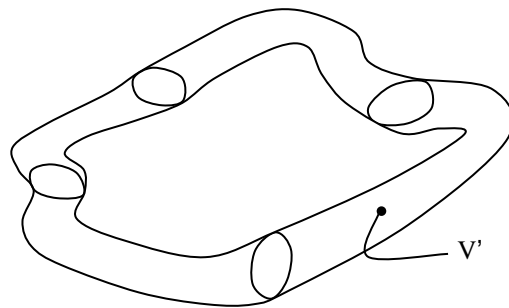
tenuto conto che : $g = -\frac{1}{4\pi r} \quad e \quad \nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega}$

e ricordando che $\nabla^2 g = \delta(r)$

Per il calcolo della velocità $\vec{u}_v(x)$ indotta dalla vorticità $\vec{\omega}$ in V' si ha che :

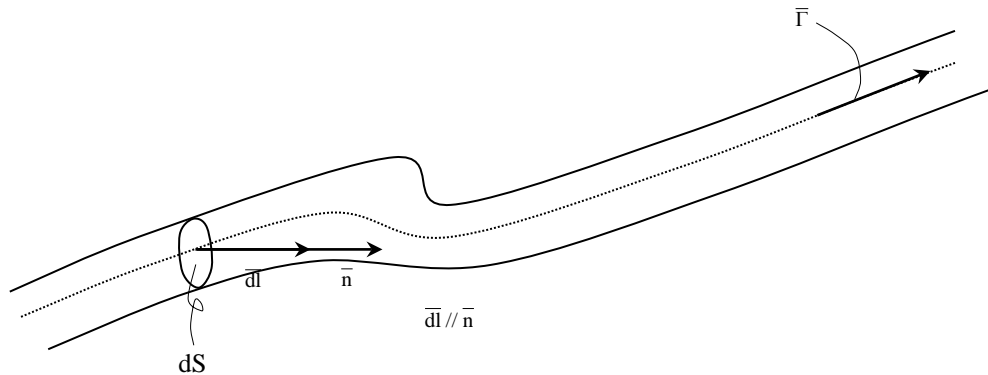
$$\begin{aligned} \vec{u}_v(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{\psi}_v(\vec{x}) = - \iiint_{V'} \vec{\nabla} g \times \vec{\omega}' dV' = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{\omega}' dV' = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{r} \times \vec{\omega}'}{r^3} dV' \end{aligned} \quad (4.32)$$

Tubo vorticoso
ad anello



che sono il potenziale vettore $\vec{\psi}$ e la velocità \vec{u}_v indotta in $P(\vec{x})$ da una distribuzione di vorticità $\vec{\omega}$ distribuita in un volume V' . Se la vorticità non è distribuita ma si ha un vortice concentrato di intensità $\vec{\Gamma}$ lungo la linea L :

$$\bar{\psi}_v = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\bar{\omega}}{r} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l}}{r} \iint_S \omega dS = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\Gamma d\bar{l}}{r}$$



Essendo

$$\Gamma = \iint_S \bar{\omega} \cdot \bar{n} dS \quad (4.33)$$

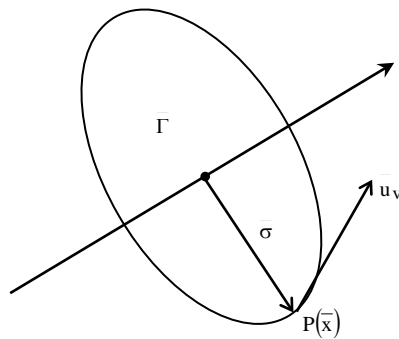
quindi per il primo teorema di Helmholtz Γ non dipende da l :

$$\left[\bar{\psi}_v(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\Gamma}{r} d\bar{l}' = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l}'}{r} \right. \quad (4.34)$$

$$\left. \bar{u}_v(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_L \Gamma \frac{\bar{r} \times d\bar{l}'}{r^3} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\bar{r} \times d\bar{l}'}{r^3} \right] \quad (4.35)$$

Che nel caso di un vortice rettilineo di lunghezza infinita dà :

$$\bar{u}_v(\bar{x}) = -\frac{\bar{\sigma} \times \bar{\Gamma}}{2\pi\sigma^2} \quad (4.36)$$

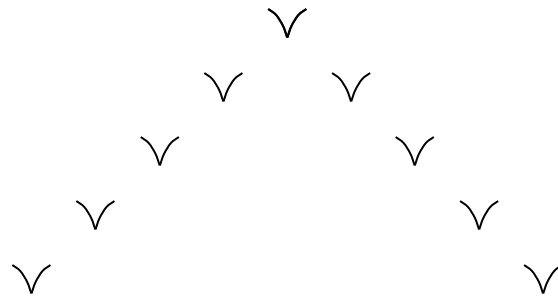
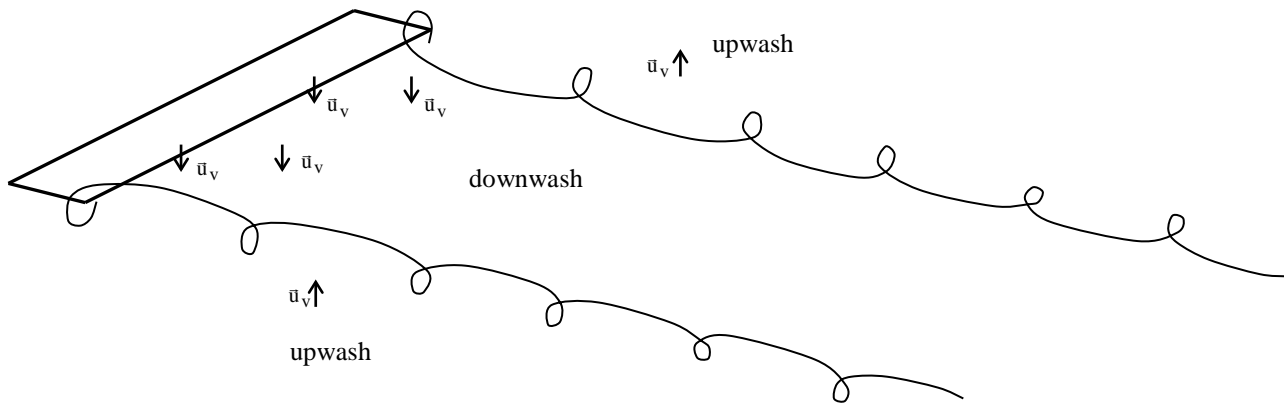


Questa rappresenta la **legge di Biot-Savart**.
Per un vortice semi-infinito la (4.36) diventa:

$$\vec{u}_v(\vec{x}) = -\frac{\vec{\sigma} \times \vec{\Gamma}}{4\pi\sigma^2}$$

Questa legge è particolarmente importante per il calcolo della velocità indotta sulle ali o sulle pale di un rotore, dai vortici di estremità, che sono semi-infiniti (*downwash*).

Downwash su ali ed eliche



Gli stormi di uccelli sfruttano l'effetto della velocità indotta dall'uccello precedente

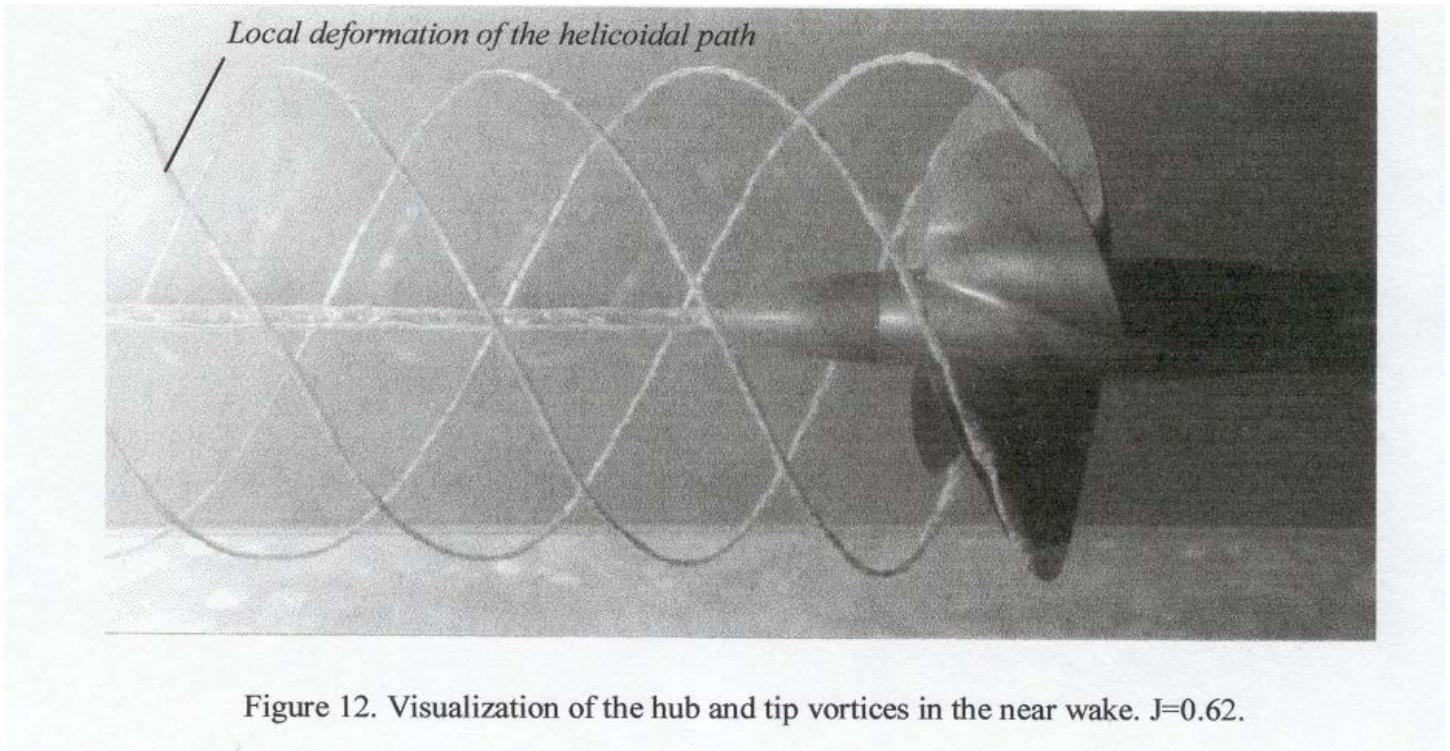
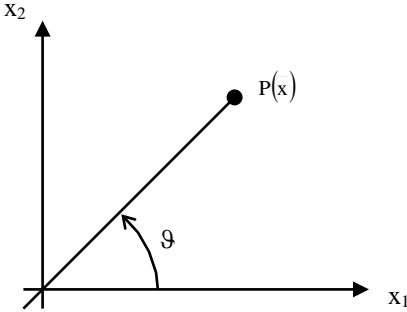


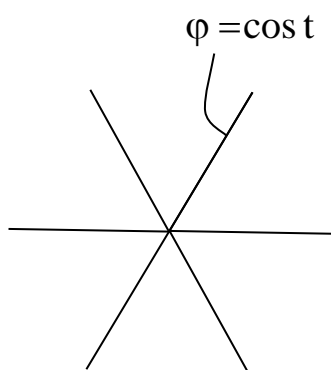
Figure 12. Visualization of the hub and tip vortices in the near wake. $J=0.62$.

Ovviamente fuori del vortice il campo è irrotazionale e quindi potenziale. E' possibile calcolare anche il potenziale scalare indotto da un vortice fuori da esso:

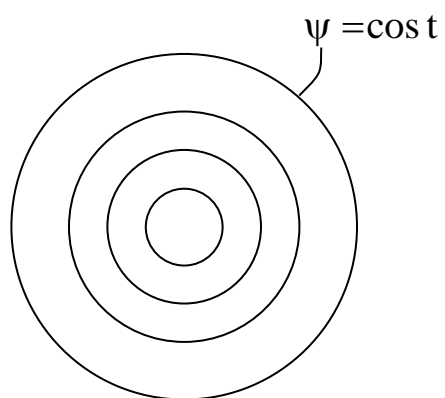
$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$



Linee equipotenziale

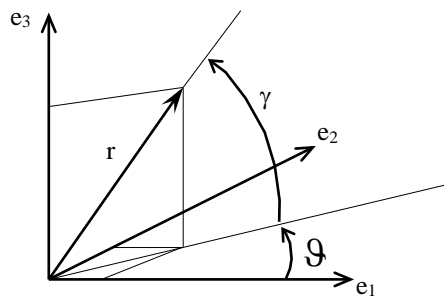


Linee di corrente



TAB. 4.1 Riassunto soluzioni particolari del potenziale in 3D (*leggere*)

Tipo di flusso	Potenziale	Comp. velocità	Comp. Velocità coord. Cilindriche
Corrente unifor. u_∞ Con angolo α rispetto ad x	$\varphi_{u_\infty} = u_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$	$u_1 = u_\infty \cdot \cos \alpha$ $u_2 = u_\infty \cdot \sin \alpha$ $u_3 = 0$	-
Sorgente ($m > 0$) o Pozzo ($m < 0$)	$\varphi_s = -\frac{m}{4\pi r}$	-	$v_r = \frac{m}{4\pi r^2}$ $v_\vartheta = 0$ $v_\gamma = 0$
Doppietta con intensità $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_1$	$\varphi_d = \frac{\mu x_1}{4\pi r^3}$	$u_{1d} = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left\{ 1 - 3 \frac{x_1^2}{r^2} \right\}$ $u_{2d} = -\frac{\mu}{4\pi r^3} 3 \frac{x_1 x_2}{r^2}$ $u_{3d} = -\frac{\mu}{4\pi r^3} 3 \frac{x_1 x_3}{r^2}$	-
Vortice libero infinito	$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$	$\vec{u}_v = -\frac{\vec{\sigma} \times \vec{\Gamma}}{2\pi \sigma^2}$	$v_\gamma = 0$ $v_\vartheta = \frac{\Gamma}{2\pi \sigma}$ $v_r = 0$



Le analoghe soluzioni particolari in 2D possono essere ancora calcolate usando il metodo di Green (qui non riportato). Le principali soluzioni sono riassunte nella tabella seguente.

TAB. 4.2 Riassunto soluzioni potenziali particolari in 2D

Flusso	Potenziale	Funzione di corrente	Comp.Velocità (u,v cartesiane) (v_r,v_g coord. cilindriche)
Corrente unif. con angolo α rispetto ad x	$\varphi = u_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$	$\psi = u_{\infty} (y \cos \alpha - x \sin \alpha)$	$u = u_{\infty} \cos \alpha$ $v = u_{\infty} \sin \alpha$
Sorgente o Pozzo	$\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln r$	$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta$	$v_r = \frac{m}{2\pi r}$ $v_g = 0$
Doppietta con $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_1$	$\varphi = k \frac{\cos \vartheta}{r}$	$\psi = -k \frac{\sin \vartheta}{r}$	$v_r = -k \frac{\cos \vartheta}{r^2}$ $v_g = -k \frac{\sin \vartheta}{r^2}$
Vortice libero Senso orario ($\Gamma < 0$) Senso antiorario ($\Gamma > 0$)	$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$	$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$	$v_r = 0$ $v_g = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

Ricordiamo che:

$$\blacksquare \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\blacksquare \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} ; \quad v_g = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

4.5 Sovrapposizione di soluzioni singolari in 2D

Abbiamo visto che i flussi potenziali sono governati dall'equazione di Laplace (4.7) che, essendo lineare, permette la sovrapposizione delle varie soluzioni particolari o singolari, viste prima. Prendiamo in considerazione un flusso non viscoso, ogni linea di corrente può essere considerata come un contorno solido impermeabile (in quanto la velocità è tangente). La sovrapposizione delle soluzioni potenziali, può essere quindi usata per determinare le linee di corrente intorno a corpi di diversa forma con pareti impermeabili.

Vediamo nel seguito, alcuni esempi classici di flussi potenziali intorno a corpi solidi realizzati mediante sovrapposizione di soluzioni singolari:

4.5.1 Semicorpo

Consideriamo la sovrapposizione tra un flusso uniforme orizzontale ($\alpha=0$) ed una sorgente; la funzione di corrente risultante (dalle Tab. 4.2) sarà :

$$\psi = U_{\infty} r \sin \vartheta + \frac{m}{2\pi} \vartheta$$

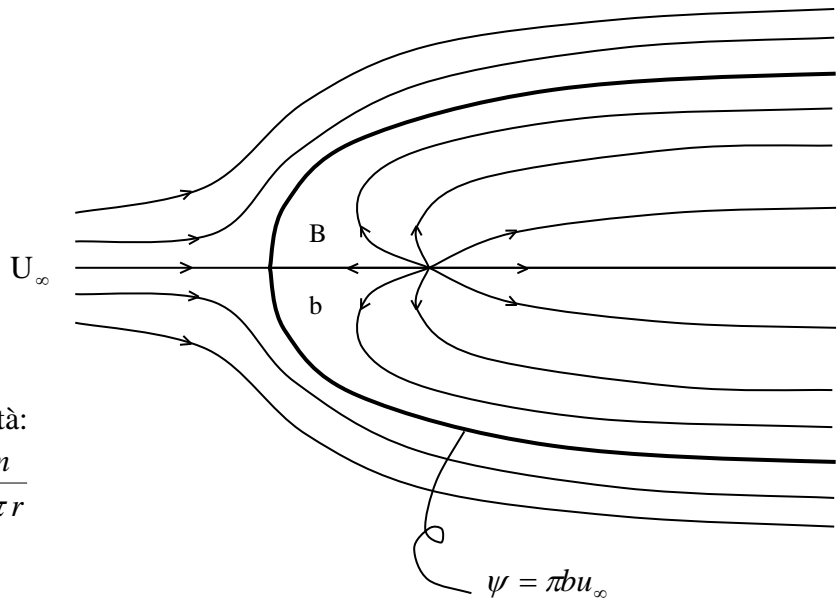
essendo $U_{\infty} y = U_{\infty} r \sin \vartheta$

Il potenziale sarà:

$$\varphi = U_{\infty} r \cos \vartheta + \frac{m}{2\pi} \ln r$$

e le componenti della velocità:

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = U_{\infty} \cos \vartheta + \frac{m}{2\pi r} \\ v_{\vartheta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_{\infty} \sin \vartheta \end{cases}$$



Dalla condizione di ristagno in B, si può determinare l'intensità della sorgente, ed il valore della funzione di corrente che delimita il (semi)corpo solido.

Lungo l'asse x : $u_r = \frac{m}{2\pi x} - U_{\infty}$ si avrà un punto di ristagno per :

$$x = \frac{m}{2\pi U_{\infty}} = b \quad \text{e} \quad m = 2\pi b U_{\infty}, \quad (u_r = 0). \quad \text{Per cui per } r=b \text{ e } \vartheta=\pi, \text{ si ha}$$

$$\psi = \frac{m}{2} = \pi b U_{\infty}. \quad \text{Possiamo quindi ricavare un'equazione parametrica del tipo } r=f(\vartheta) \text{ che dà}$$

l'equazione del corpo solido nel riferimento (r, ϑ) :

$$U_{\infty} r \sin \vartheta + b U_{\infty} \vartheta = \pi b U_{\infty} \Rightarrow \quad \text{da cui si ottiene :} \quad r = \frac{b(\pi - \vartheta)}{\sin \vartheta} \quad \text{con } 0[\vartheta[2\pi$$

Questo rappresenta l'equazione della linea di corrente passante per il punto di ristagno, e quindi rappresenta il contorno del semicorpo.

Ponendo $\psi = \text{cost}$, al variare della costante, si ottengono le altre linee di corrente.

Da notare che nella regione di interesse (all'esterno del corpo), non ci sono singolarità (la sorgente, singolare, è dentro il corpo).

Per completare la descrizione geometrica del semicorpo, determiniamo l'ampiezza del corpo per $x \rightarrow \infty$

Tenendo conto delle relazioni :

$$r = b \frac{(\pi - \vartheta)}{\sin \vartheta}, \text{ essendo } y = r \sin \vartheta :$$

$$y = b(\pi - \vartheta) \text{ per } \vartheta \rightarrow 0 \text{ o per } \vartheta \rightarrow \pi \text{ l'ampiezza del semicorpo tende a } \pm b\pi .$$

Da un punto di vista ingegneristico, ciò che è importante è la determinazione delle forze che agiscono sul corpo (effetti aerodinamici) e non tanto il campo di velocità da lui prodotto. Dalla funzione di corrente che delimita il contorno del corpo, si possono calcolare le componenti di velocità sulla superficie del corpo stesso e quindi il modulo della velocità. Nota la velocità, è possibile determinare la pressione in ogni punto applicando Bernoulli tra un punto all'infinito a monte ed il punto di interesse (equ. 3.69):

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = P + \frac{1}{2} \rho U^2$$

da cui si ricava immediatamente P (trascurando la quota z, effetto della gravità). Nota la pressione sulla superficie del corpo, questa può essere integrata (ved. par. 1.5) per ottenere le forze aerodinamiche risultanti, portanza e resistenza di forma, che sono le quantità di maggiore interesse per effettuare dei dimensionamenti.

Questo tipo di procedura può essere utile per simulare i flussi attorno ad ostacoli posti in correnti uniformi (es. piloni dei viadotti, piloni di sostegno di piattaforme petrolifere, ecc) ricordando comunque i limiti legati all'effetto della viscosità (che viene trascurata). Dal punto di vista pratico, l'uso del potenziale dà risultati sufficientemente buoni solo in corpi affusolati (profili, fusoliere, palette di turbine, ali, ecc.) perché l'effetto della viscosità nella realtà (se il numero di Reynolds è sufficientemente alto) è importante solo nello strato limite, cioè molto vicino alla parete.

4.5.2 Corpo chiuso (ovale di Rankine) (*leggere*)

Sovrapponiamo un pozzo, una sorgente (di uguale intensità) ed un flusso uniforme.

Si avrà :

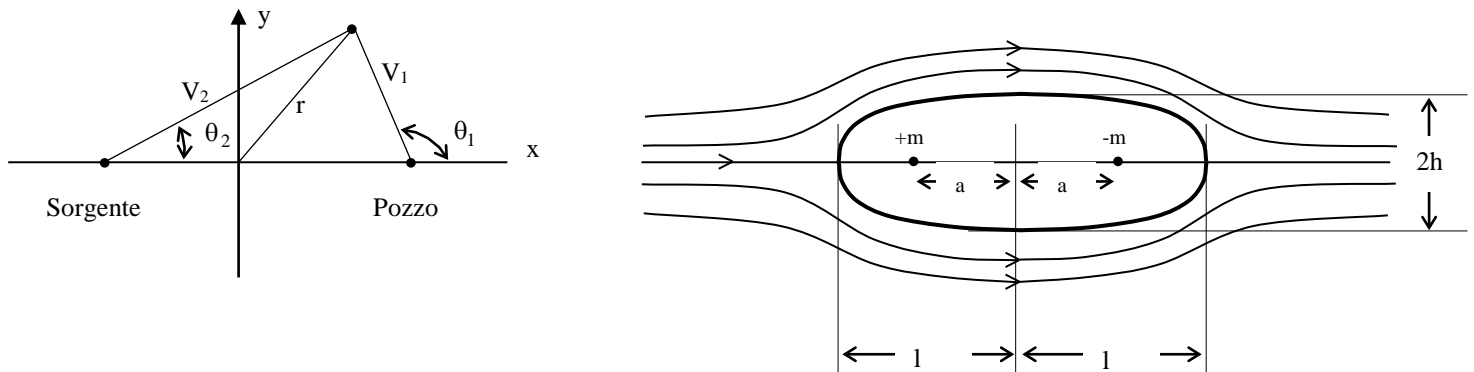
$$\psi = U_\infty r \sin \vartheta - \frac{m}{2\pi} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \tag{4.37}$$

$$(4.37)$$

$$\varphi = U_{\infty} r \cos \vartheta - \frac{m}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) \quad (4.38)$$

(4.38)

(ho preso due sistemi di riferimento polari, ciascuno centrato nella singolarità)



Per $\psi = \text{cost}$ abbiamo le varie linee di corrente. Quella che forma il corpo chiuso è proprio $\psi = 0$. Questa considerazione vale anche in generale, cioè se un corpo è rappresentato da una serie di singolarità (tipo sorgenti o pozzi) di intensità m_i . Se il corpo è chiuso, si dovrà avere $\sum m_i = 0$. Il motivo sta nel significato fisico di m che rappresenta la portata in volume di fluido attraverso una superficie che circonda la singolarità.

L'ampiezza $2l$ del corpo può essere determinata, come per il caso precedente, dalla condizione di velocità nulla nei punti di riastagno ($u_r = 0$), mentre l'altezza $2h$ si ottiene dal valore di y , dove l'asse y interseca la $\psi = 0$;

si ottiene: $l = \sqrt{\frac{ma}{\pi U_{\infty}} + a^2}$, mentre h è soluzione della seguente equazione:

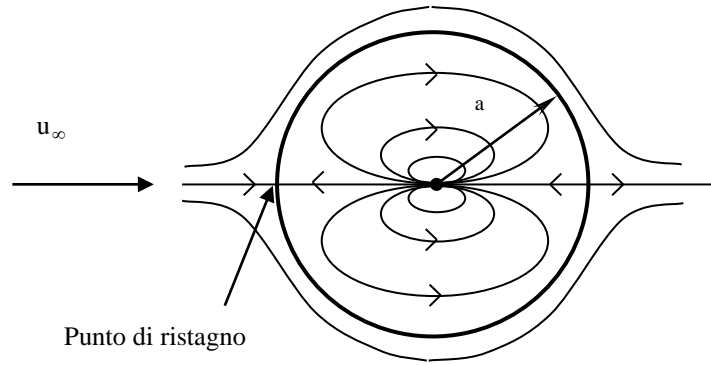
$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 - 1 \right] \tan \left[2 \left(\frac{\pi U a}{m} \right) \frac{h}{a} \right]$$

4.5.3 Cilindro circolare in una corrente uniforme

Combiniamo una doppietta con un flusso uniforme:

$$\psi = U_{\infty} r \sin \vartheta - k \frac{\sin \vartheta}{r} \quad (4.39)$$

$$\varphi = U_{\infty} r \cos \vartheta + k \frac{\cos \vartheta}{r} \quad (4.40)$$



Per determinare l'intensità delle doppiette impongo le condizioni al contorno per $r=a$ e $\theta=\pi$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\left(U_{\infty} \cos \theta - k \frac{\cos \theta}{r^2} \right) = 0$$

Da cui $k = U_{\infty} r^2$.

Si noti che per $r=a$ (r è il raggio del cilindro) si deve avere anche $\psi = \text{cost}$ ed in particolare,

essendo il cilindro un corpo chiuso, $\psi = 0$. Essendo $\psi = \left(U_{\infty} - \frac{k}{r^2} \right) r \sin \vartheta$, si ha :

$\psi(a) = 0$ per $U_{\infty} - \frac{k}{a^2} = 0$, da cui $k = U_{\infty} a^2$ (intensità della doppietta), che conferma quanto trovato precedentemente.

Quindi :

$$\psi = U r \sin \vartheta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \tag{4.41}$$

$$\varphi = U r \cos \vartheta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \tag{4.42}$$

(4.42)

Le componenti delle velocità sono :

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (4.43)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (4.44)$$

(4.44)

Per $r=a$, cioè sulla superficie del cilindro, $u_r = 0$ e $u_\theta = -2U \sin \vartheta$

Di conseguenza il massimo di velocità si avrà per :

$$\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{per cui } |u_\theta| = 2U_\infty, \text{ cioè la velocità massima sarà 2 volte la velocità all' } \infty$$

La pressione sulla superficie del cilindro (P_s) può essere ottenuta, come abbiamo visto precedentemente, applicando l'equazione di Bernoulli (3.69) o (3.73) in SRC :

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2} \rho u_s^2$$

Poiché $u_\theta = -2U_\infty \sin \vartheta$, si ha :

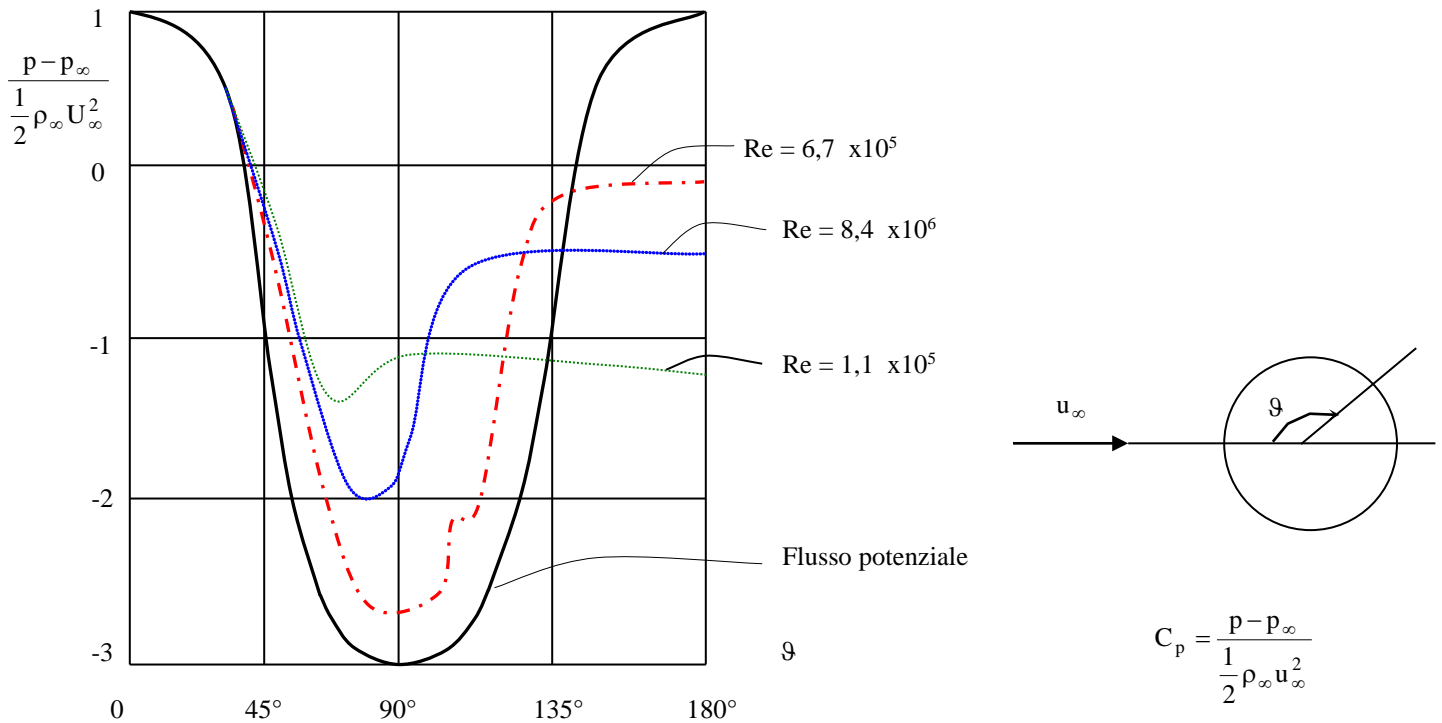
$$P_s = P_0 + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \vartheta) \text{ e quindi}$$

$$c_p = \frac{P_s - P_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = (1 - 4 \sin^2 \vartheta) \quad (4.45)$$

(4.45)

Questa distribuzione è in buon accordo con i dati sperimentali solo nella regione a monte del cilindro ma non a valle del punto di massimo spessore (effetto dello strato limite, spessore della scia) perché nella realtà il flusso si comporta in modo diverso a causa della presenza dei distacchi in presenza di gradienti di pressione avversa.

Si veda la figura in cui è riportato il confronto tra c_p della soluzione potenziale e quello ottenuto dalle misure per diversi Re .



Nota la pressione sulla superficie, possiamo determinare le forze agenti sul corpo. Tuttavia, se proviamo a calcolare :

$$\begin{cases} F_x = -\int_0^{2\pi} P_s \cos \vartheta a d\vartheta \\ F_y = -\int_0^{2\pi} P_s \sin \vartheta a d\vartheta \end{cases}$$

Si trova $F_x = F_y = 0$, che è noto come il **paradosso di D’Alambert**.

Il **paradosso di D’Alambert** afferma che: “un corpo, investito da un fluido incompressibile, non viscoso, in moto stazionario, subisce forze a risultante nulla”.

La dimostrazione mostrata precedentemente per il caso del cilindro circolare, può essere estesa ad un corpo di forma qualsiasi, sostituendo al corpo una distribuzione opportuna di sorgenti e pozzi, come descritto precedentemente.

Come ovvio, è necessario intervenire sia a livello **fisico-geometrico** sul corpo (mediante l'introduzione di punti angolosi o di cuspidi al bordo di uscita dei profili), sia sul **modello matematico** corrispondente, per ottenere le informazioni richieste sulle forze. Nel seguito, vediamo un primo esempio in tal senso, il cilindro rotante, finalizzato a produrre la portanza.

4.5.4 Cilindro rotante

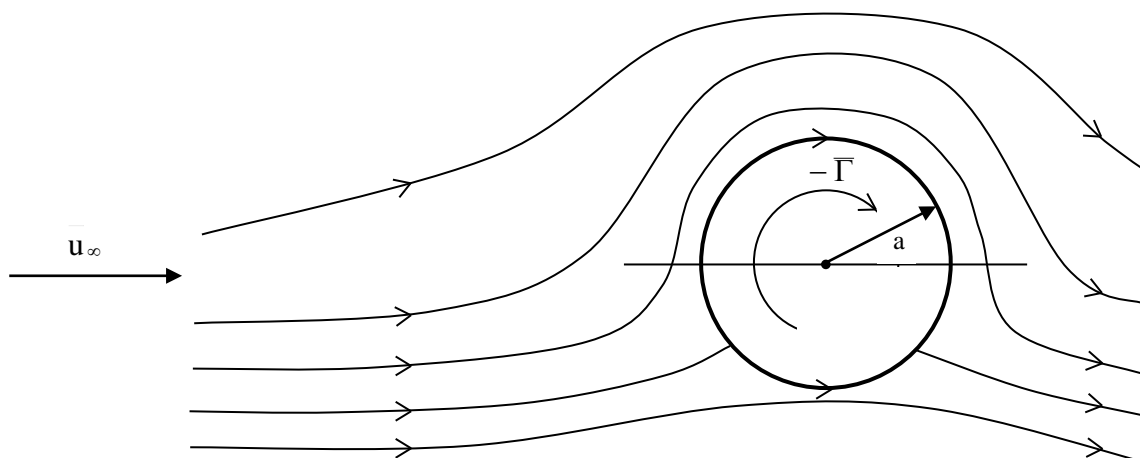
Sommiamo un vortice libero al campo del cilindro visto sopra; si ha :

$$\psi = U_{\infty} r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \vartheta - \Gamma \frac{\ln r}{2\pi} \quad (4.46)$$

$$\varphi = U_{\infty} r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \vartheta + \Gamma \frac{\vartheta}{2\pi} \quad (4.47)$$

(4.47)

Dove Γ è la circolazione del vortice.



Notiamo che per $r=a$ si ha ancora una linea di corrente che può essere considerata il contorno del cilindro solido.

La velocità tangenziale sulla superficie del cilindro ($r=a$) ora è :

$$u_{\vartheta} = -2U_{\infty} \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (4.48)$$

(4.48)

In questo caso il flusso rappresenta un cilindro che ruota in un fluido viscoso. Applicando Bernoulli come prima, si ha :

$$P_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho \left[-2U \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right]^2 \quad (4.49)$$

(4.49)

Da cui, come visto prima, posso ricavare P_s e calcolare le forze integrando. Con calcoli non riportati, si ottiene:

$$F_x = 0$$

$$F_y = -\rho U_{\infty} \Gamma$$

cioè resistenza nulla e forza di portanza dipendente linearmente da U_{∞} e Γ . Ricordando che $\vec{\Gamma} \propto \vec{\omega}$ e $\vec{\omega} = 2 \vec{\zeta}$, cioè 2 volte la velocità angolare, si comprende che un corpo rotante genera portanza (ad es. tiri con effetto delle palline da tennis con rotazione). La nascita di portanza per effetto della rotazione è detto **effetto Magnus** (ad esempio, nave di Flattner, particelle con vento trasversale, sedimentazione e trasporto di particelle in strati limite ecc..).

Generalizzando quanto visto per il cilindro rotante, si può considerare Γ come un vettore diretto secondo l'asse del cilindro.

In forma vettoriale si ottiene :

$$\vec{L} = -\rho \vec{U}_{\infty} \times \vec{\Gamma} \quad (4.50)$$

(4.50)

Cioè la portanza è data dal prodotto vettoriale di \vec{U}_{∞} per la circolazione $\vec{\Gamma}$.

Questo è il **teorema di Kutta-Joukowski** per la portanza, che ha validità generale e vale anche per un profilo alare qualunque. In questo caso, la portanza sul profilo è generata dalla nascita di una circolazione sullo stesso che bilancia (per il teorema di lord Kelvin) il vortice che si è formato al momento della partenza del profilo (*starting vortex*).

