

Capitolo 2

Cinematica ed altre nozioni introduttive

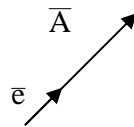
2.1 Richiami e relazioni di calcolo vettoriale

Notazioni:

\vec{A} = vettore

$|\vec{A}|$ = modulo di \vec{A}

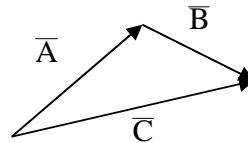
$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ = versore



Valgono le seguenti proprietà:

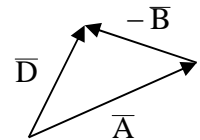
Somma

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$



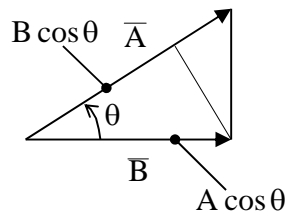
Sottrazione

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{D}$$



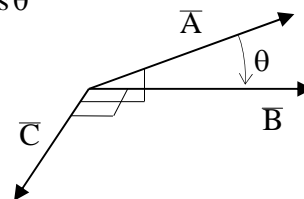
Prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$



Prodotto vettoriale

$$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta) \vec{e} = \vec{C}$$



Sistemi di coordinate ortogonali

Un sistema di coordinate o di vettori \vec{a}_i è ortogonale se

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \text{con } i \text{ diverso da } j \text{ e } \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i \neq 0$$

Il sistema di vettori ortogonali è anche normalizzato se:

$$\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = \delta_{ij}$$

cioè se:

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1 = 1, \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \text{ ecc..}$$

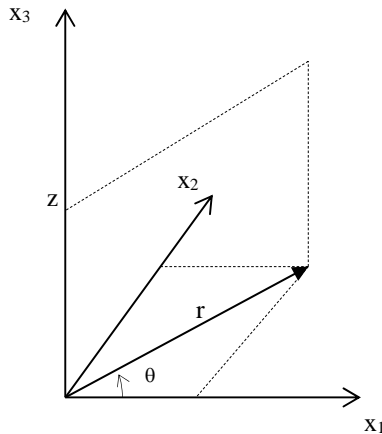
δ_{ij} rappresenta il *delta di Kronecker*.

Si dice *Base* un sistema di vettori completo ortonormale in uno spazio vettoriale se è in grado di rappresentare qualunque vettore dello spazio.

Sistemi cartesiani ortogonali

Se indichiamo con $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ i versori degli assi cartesiani ortogonali, il vettore posizione di un punto sarà:

$$\bar{r} = x_i \bar{e}_i = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots$$



Sistemi cilindrici

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

$$x_3 = z$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}$$

$$z = x_3$$

Sistemi Polari

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi$$

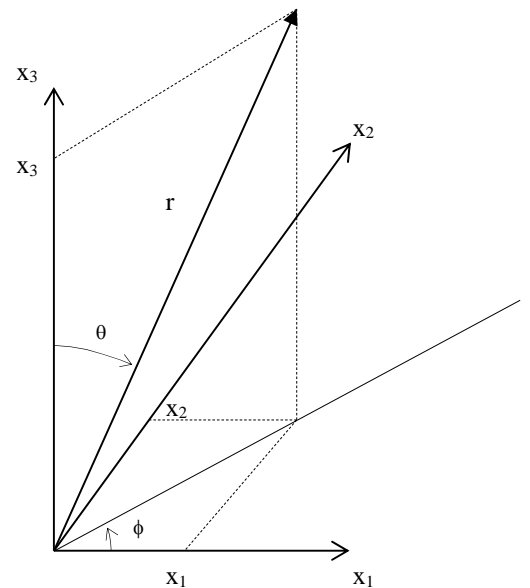
$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{x_3}{r}$$

$$\phi = \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$



2.2 Campi scalari e vettoriali

2.2.1 Proprietà

Ove non specificato si utilizzano le componenti cartesiane ortogonali, indicate con x_i , e si fa uso della notazione di Newton per cui gli indici ripetuti corrispondono alla sommatoria

$$x_i y_i = \sum_i x_i y_i$$

Campi scalari

$$p = p(x, y, z, t) = p(x_i, t)$$

$$\rho = \rho(x_i, t)$$

$$T = T(x_i, t)$$

Campi vettoriali

Sono quantità vettoriali date come funzioni di x_i e t , che per componenti:

$$u_i = u_i(x_j, t)$$

Prodotto scalare tra campi vettoriali

Siano dati i due campi vettoriali:

$$A_i(x_j, t)$$

$$B_i(x_j, t)$$

il prodotto scalare (\cdot) sarà:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots$$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale (\times) tra i campi vettoriali, sarà:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1(A_2 B_3 - B_2 A_3) + \vec{e}_2(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \vec{e}_3(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Prodotto diadico

$$\bar{R} = \bar{u} \otimes \bar{v} \quad R_{ij} = u_i v_j$$

Operatore nabla

L'operatore vettoriale **Nabla** è definito come segue:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{e}_3$$

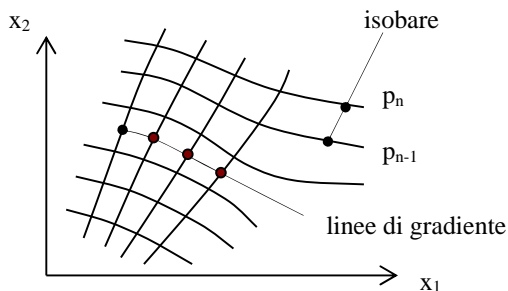
Gradiente di uno scalare

Il **gradiente** corrisponde all'operatore nabla applicato ad un campo scalare.

Ad esempio, per la pressione $p(x_i, t)$ si ha:

$$\bar{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} \bar{e}_3 = \frac{\partial p}{\partial x_i} \bar{e}_i = \text{grad } p$$

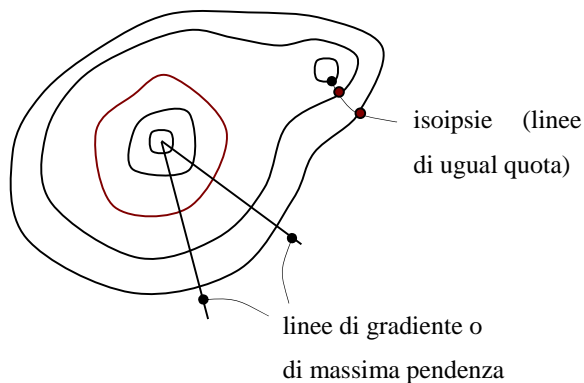
Il suo modulo è il massimo cambiamento di p per unità di lunghezza dello spazio coordinato nel punto considerato.



La sua direzione è quella nella quale si realizza il massimo cambiamento di p nel punto.

Linea di gradiente è quella che ha il gradiente tangente in ogni punto: cioè è la linea di massima variazione. Nel caso della pressione, le linee *isobare* sono le linee che uniscono i punti ad uguale pressione.

Nel campo delle quote, le linee *isoipse* sono le linee di livello o di uguale quota. La linea di gradiente corrisponde quindi alla linea a massima pendenza. Le linee di gradiente sono localmente ortogonali alle linee di livello.



Divergenza di un campo vettoriale

Sia dato un campo vettoriale (e.g. velocità) per componenti cartesiane:

$$u_i = u_i(x_j, t)$$

Si dice **divergenza** di \bar{u} l'operatore nabla applicato scalarmente ad \bar{u} :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \bar{u}^1$$

Rotore di un campo vettoriale

Sia dato un campo vettoriale (e.g. velocità) per componenti cartesiane.

$$u_i = u_i(x_j)$$

Si dice **rotore** del campo vettoriale il prodotto vettore tra l'operatore nabla ed il campo stesso:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \bar{u}$$

se \bar{u} è la velocità, $\text{rot } \bar{u} = \bar{\omega}$ e si chiama vorticità:

$$\text{rot } \bar{u} = \bar{e}_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \bar{e}_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \bar{e}_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

Laplaciano

Il **Laplaciano** di un campo scalare o vettoriale, è definito come segue²:

¹ Non vale la proprietà commutativa del prodotto scalare. Ad esempio, per la divergenza

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \bar{u}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{\nabla} = u_i \frac{\partial}{\partial x_i} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots$$

che risultano essere diverse

² Si noti che

$$\nabla^2 \bar{u} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{u}) = \text{grad div } \bar{u} - \text{rot rot } \bar{u}$$

$$\nabla^2 p = \text{div grad } p = \nabla \cdot \nabla p = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}$$

$$\nabla^2 u_k = \nabla \cdot \nabla u_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2} \quad \text{per } k = 1, 2, 3$$

Divergenza di un tensore del II ordine

Sia T_{ij} un tensore del II° ordine (cioè una matrice, infatti il tensore del I° ordine è un vettore e il tensore di ordine 0 è uno scalare):

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

la $\text{div } \vec{T}$ si esprime in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_2} + \dots \quad \text{per } j = 1, 2, 3$$

Gradiente di un vettore

Il gradiente di un vettore \vec{u} corrisponde al prodotto diadico tra ∇ e \vec{u}

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{con } k=1..3 \text{ ed } i=1..3.$$

2.2.2 Gli integrali ed alcuni teoremi notevoli

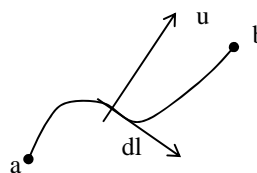
Integrale di linea

Dato un campo vettoriale (e.g. velocità)

$$\vec{u} = u(x_i, t)$$

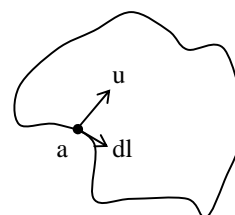
si dice integrale di linea aperta

$$\int_a^b \vec{u} \cdot d\vec{l}$$



e di linea chiusa

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$$



Integrale di superficie

$$\iint_S p \vec{dS} \rightarrow \text{vettore}$$

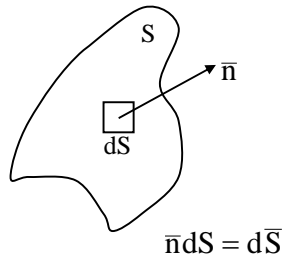
$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{dS} \rightarrow \text{scalare}$$

$$\iint_S \vec{u} \times \vec{dS} \rightarrow \text{vettore}$$

per una superficie chiusa

$$\oint p \vec{dS} \rightarrow \text{vettore}$$

ed analoghe.



Integrale di volume

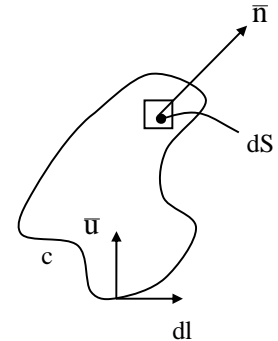
$$\iiint_V p dV \rightarrow \text{scalare}$$

$$\iiint_V \vec{u} dV \rightarrow \text{vettore}$$

Teorema di Stokes

Per campi semplicemente connessi, vale la relazione:

$$\oint_c \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{dS} = \iint_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$$



Teorema della divergenza o di Green Gauss

$$\oint_S \vec{u} \cdot \vec{dS} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV$$

Teorema del gradiente

$$\oint_S p \vec{n} dS = \iiint_V \nabla p dV$$

2.2.3 Solenoidalità e irrotazionalità

Condizioni di solenoidalità

La condizione di solenoidalità indica che ovunque nel campo le velocità d'espansione

$$\Delta = \nabla \cdot \bar{u} = 0$$

Se il campo è solenoidale, si può introdurre una funzione vettoriale di campo $\bar{\psi}(x,t)$ (campo vettoriale) detto potenziale vettore

$$\bar{u} = \nabla \times \bar{\psi}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{\psi}) = 0$$

Il campo di \bar{u} così ottenuto soddisfa **identicamente** le condizioni di solenoidalità.

In un caso 2D, il potenziale vettore ha solo una componente che viene definita *funzione di corrente* ψ . In termini delle componenti di velocità $\bar{u} = (u;v)$ la funzione di corrente rispetta quindi le seguenti proprietà:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (2.1)$$

In un campo 2D, le linee di corrente sono tangenti punto per punto al vettore velocità. Di conseguenza, l'equazione di una linea di corrente può essere determinata dalla condizione di tangenza:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\psi=\text{cost}} = \frac{v}{u} \quad (2.2)$$

La funzione $\psi(x,y)$ che soddisfa la (2.2) è la funzione di corrente. Infatti, differenziando ψ e tenendo conto della (2.1) si ha:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

e se si considera la linea di corrente

$$\psi = \text{cost} \rightarrow d\psi = 0 \rightarrow -v dx + u dy = 0$$

e quindi la condizione (2.2) viene automaticamente soddisfatta.

Le linee di corrente del campo di velocità 2D sono quindi definite dalle equazioni $\psi=\text{cost}$ dove al variare della costante si varia la linea di corrente considerata.

Condizione di irrotazionalità

La condizione di irrotazionalità richiede che ovunque nel campo la vorticità

$$\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u} = 0$$

Se il campo è irrotazionale, si può introdurre una funzione scalare di campo (campo scalare) detta potenziale scalare $\varphi(x,t)$, tale che:

$$\bar{u} = \bar{\nabla} \varphi$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \varphi \doteq 0$$

Il campo di \bar{u} così ottenuto soddisfa **identicamente** le condizioni di irrotazionalità.

2.3 Descrizione Euleriana e Lagrangiana del moto

Supponiamo di voler studiare l'evoluzione di una certa proprietà scalare o vettoriale di una particella di fluido.

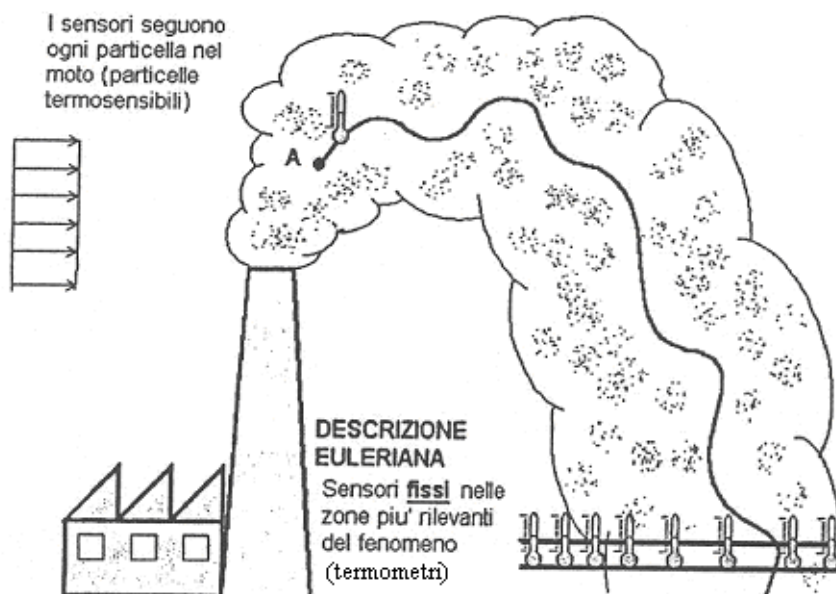
Per esempio assumiamo quale scalare la temperatura $T(x_i, t)$. Per conoscere l'evoluzione di T sono possibili due diverse descrizioni o punti di vista:

1) Euleriana o spaziale (o talvolta locale), si pone un osservatore in un punto fisso P dello spazio $P(x_i^0)$ e si ottiene pertanto l'evoluzione delle proprietà T in $P(x_i^0, t)$ cioè in una posizione fissa.

2) Lagrangiana o sostanziale o molecolare, si pone l'osservatore sulla particella di fluido e si studia quindi l'evoluzione delle proprietà $T[x_i(t)]$ di una particella di fluido che mantiene la sua individualità durante il moto.

Consideriamo come esempio fisico il problema della Temperatura del fluido in prossimità delle emissioni di fumi da una ciminiera.

DESCRIZIONE LAGRANGIANA



Nella descrizione EULERIANA si pone un osservatore della proprietà temperatura (ad esempio un termometro) all'apertura della ciminiera e si misura la $T(x_i^0, t)$. L'uso di molti termometri (teoricamente una matrice 3D) consente di ottenere le $T(x_i^0, t)$ in tutto il campo di interesse. Per conoscere la temperatura nel tempo di una certa particella $T_A(t)$ è necessario conoscere la posizione spaziale occupata dalla particella (A) nei diversi istanti temporali.

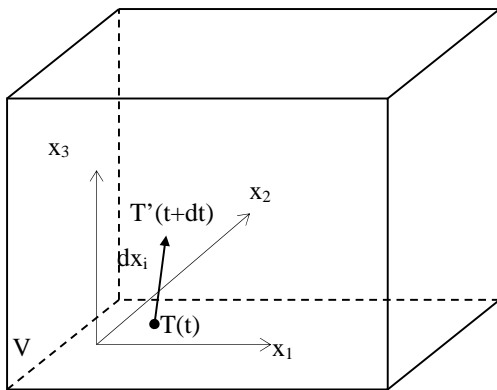
Nella descrizione LAGRANGIANA si associa una sonda in temperatura (ad esempio un cristallo liquido termosensibile in sospensione nelle particelle fluide) ad una particella A e si misurano le temperature di questa nel suo moto. Si ottiene in tal modo $T_A(t)$ per conoscere il campo di temperature nel tempo è necessario associare molte sonde a diverse particelle e poter riconoscere le loro posizioni nei diversi istanti di tempo.

Per il rilievo sperimentale di grandezze fluidodinamiche la descrizione EULERIANA è assai più pratica in quanto consente di mantenere i sensori fissi. Inoltre anche da un punto di vista numerico e teorico tale descrizione è più conveniente in quanto nelle applicazioni fisiche ed ingegneristiche il fluido entrante interagisce con i corpi solidi e quindi fluisce verso l'esterno (si pensi ad esempio ad una turbina, ad un compressore, oppure ad un veicolo o un velivolo posto in galleria aereodinamica).

2.4 Derivata sostanziale

Se un osservatore EULERIANO conosce il campo di $T(x_i, t)$ all'interno di un certo volume di fluido V può calcolare il differenziale totale dT :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (2.3)$$



Se in particolare calcoliamo il differenziale totale in modo che $dx_i = u_i dt$ se cioè scegliamo lo spostamento in modo da seguire la particella nel suo moto, l'espressione precedente diventa:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x_i} u_i dt + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (2.4)$$

ed è quindi possibile calcolare la derivata totale rispetto al tempo che ha la particolarità di seguire la particella nel suo moto. Tale derivata viene detta derivata **sostanziale** e si indica convenzionalmente con $\frac{D}{Dt}$.

La (2.4) diventa allora:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial T}{\partial t}$$

in cui $\frac{DT}{Dt}$ rappresenta la derivata **sostanziale**, $u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}$ è la derivata **convettiva**, $\frac{\partial T}{\partial t}$ è la derivata **locale** rispetto al tempo.

Si noti che da un punto di vista EULERIANO per conoscere la $\frac{DT}{Dt}$, cioè la derivata totale in senso LAGRANGIANO è necessario conoscere in un punto le derivate locali rispetto al tempo delle quantità di interesse (e.g. la temperatura T), e cioè $\frac{\partial T}{\partial t}$ più ∇T ed il vettore velocità \bar{u} .

Se sostituiamo lo scalare T con un vettore ad esempio \bar{u} la sostanza rimane invariata. Ad esempio l'accelerazione \bar{a} in una descrizione LAGRANGIANA è:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt}$$

mentre in una descrizione EULERIANA sarà:

$$\bar{a} = \frac{D\bar{u}}{Dt} = u_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

o per componenti cartesiane

$$a_k = \frac{D u_k}{Dt} = u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial t} \quad k = 1,2,3$$

Bisogna osservare che:

il moto si dice stazionario o permanente se:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0 \rightarrow \bar{u} = \bar{u}(x_i)$$

ovvero, se la velocità non cambia nel tempo in un punto generico del campo, ciò non equivale ad una accelerazione nulla delle particelle;

il moto si dice uniforme se:

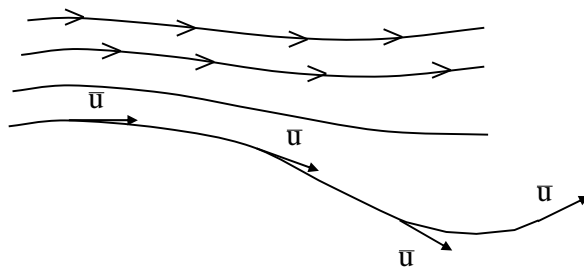
$$\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \bar{u} = \bar{u}(t)$$

2.5 Linee di corrente, traiettorie, linee di fumo

2.5.1 Definizioni

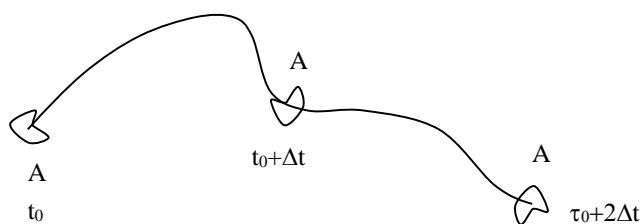
1. Linee di corrente

Sono quelle che hanno come tangente in ogni punto il vettore velocità. Si noti che data la tangenza della \vec{u} , attraverso le linee di corrente non si ha passaggio di fluido. Pertanto, il flusso tra due linee di corrente si comporta come se scorresse tra le pareti di un tubo a sezione variabile.



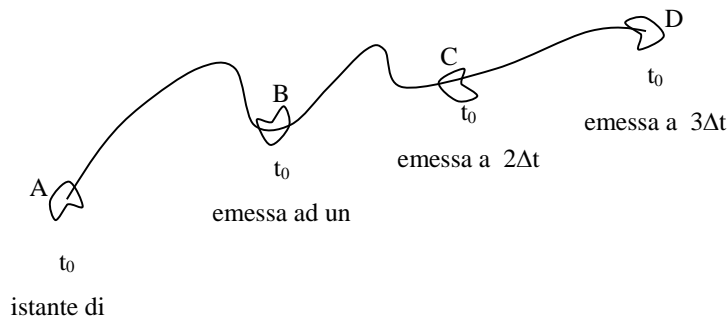
2. Traiettorie

E' il percorso seguito dalle particelle osservate al variare del tempo. La direzione che assume la traiettoria è legata alla direzione del vettore velocità istante per istante.



3. Linee di fumo

Sono quelle linee che in un dato istante $t=t_0$ occupano le particelle emesse nei tempi precedenti dallo stesso punto. Si pensi al fumo di una sigaretta o a linee di traccianti in liquidi.



E' bene notare che solo in condizioni stazionarie le linee di corrente, di fumo e le traiettorie coincidono. In condizioni non stazionarie sono diverse.

2.5.2 Relazione tra linee di corrente e linee equipotenziali (*leggere*)

Per un campo di velocità $\bar{u}(x, y)$, bidimensionale, irrotazionale e solenoidale, possiamo definire sia il potenziale scalare φ che la funzione di corrente ψ . Come detto sopra, le linee di corrente sono definite come:

$$\psi(x, y) = \text{cost}$$

mentre le linee equipotenziali, sono:

$$\varphi(x, y) = \text{cost}$$

Chiamiamo con \bar{s} il vettore tangente ad una linea equipotenziale, essendo s la coordinata curvilinea lungo di essa. Dalla definizione di potenziale si ha:

$$\bar{\nabla} \varphi \parallel \bar{u}$$

Per cui, tenendo conto che lungo una linea equipotenziale $d\varphi = 0$, si ha:

$$\bar{s} \cdot \bar{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$$

Poichè il prodotto scalare $\bar{s} \cdot \bar{\nabla} \varphi$ è nullo, significa che i due vettori sono ortogonali tra loro, e quindi la linea $\varphi = \text{cost}$ è perpendicolare a \bar{u} .

Per definizione di funzione di corrente (relazione 2.2), la linea di corrente è invece tangente alla velocità. Di conseguenza le linee di corrente possono solo essere perpendicolari alle linee equipotenziali.

Questo risultato può essere determinato in maniera analitica tenendo conto della definizione 2.2, e ricordando, dalla definizione di φ che:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

da cui, possiamo ricavare l'analogia della (2.2) per il potenziale:

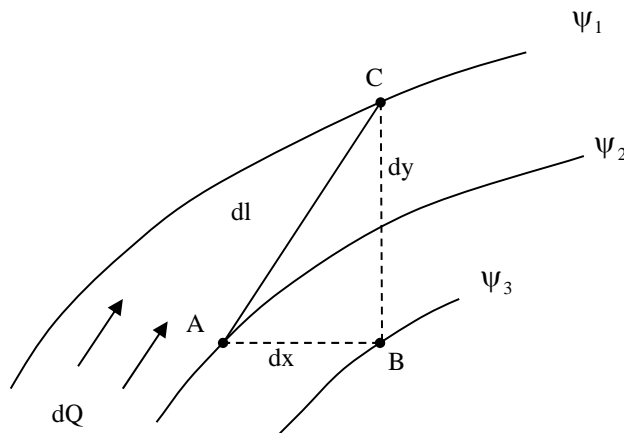
$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\varphi=\text{cost}} = -\frac{u}{v} \quad (2.5)$$

Confrontando (2.2) con (2.5), si vede come tali relazioni rappresentino il coefficiente angolare di due rette (rispettivamente tangenti alle linee $\psi=\text{cost}$ e $\varphi=\text{cost}$) perpendicolari tra loro.

2.5.3 Significato fisico della funzione di corrente (*leggere*)

Dalla descrizione delle linee di corrente La variazione $d\psi$ della funzione di corrente, corrispondente, come detto, al passaggio da una linea di corrente di equazione $\psi(x,y)=\psi_1$ ad un'altra di equazione $\psi(x,y)=\psi_2 = \psi_1 + d\psi$, rappresenta la portata di fluido per unità di massa (portata volumetrica), che scorre attraverso le due linee di corrente ψ_1 e ψ_2 .

Consideriamo quindi in un campo di velocità 2D, incompressibile e stazionario, le due linee di corrente $\psi(x,y) = \psi_1$ e $\psi(x,y) = \psi_2 = \psi_1 + d\psi$:



Consideriamo un linea dl che unisce due punti generici rispettivamente su ψ_1 e ψ_2 . Costruiamo il triangolo ABC dalla proiezione di dl lungo gli assi x e y essendo il lato AB pari a dx mentre il lato BC è pari a dy .

Consideriamo anche la linea di corrente ψ_3 passante per il punto B e le portate che entrano o escono dal triangolo ABC . Attraverso il lato AC la portata è **entrante** ed è definita come dQ . Per i lati AB e BC , tenendo conto che le componenti tangenziali ai lati non danno contributo alla portata, si ha:

- Portata entrante attraverso $AB = v dx$

- Portata uscente attraverso $BC = u \, dy$

Poichè la massa si conserva nel triangolo chiuso ABC , la portata entrante deve essere uguale a quella uscente, e cioè:

$$dQ + v \, dx = u \, dy \quad \Rightarrow \quad dQ = u \, dy - v \, dx$$

e, ricordando la (2.1), si ha

$$dQ = d\psi$$

2.6 Volume di controllo e sistema

Le equazioni della fisica che governano l'evoluzione e il moto dei fluidi (in particolare: la conservazione della massa, le leggi della dinamica e della termodinamica) possono essere applicate in un'ottica LAGRANGIANA dando luogo al concetto di **sistema** od EULERIANA dando luogo al concetto di **volume di controllo**.

Si definisce **sistema** un insieme di materia composto sempre dalle stesse particelle, il quale si può muovere ed interagire con l'ambiente circostante; se il sistema è fluido, potrà variare di forma, posizione e dimensioni.

Il **volume di controllo** è un volume dello spazio (entità geometrica indipendente dalle masse) attraverso il quale può scorrere il fluido.

2.7 Teorema del trasporto di Reynolds

Le leggi di conservazione alla base della fluidodinamica possono essere scritte in maniera semplice per i **sistemi** (ad esempio la massa di un certo sistema si conserva); tuttavia, per le applicazioni di ingegneria, è necessario descrivere le equazioni di governo all'interno di un certo **volume di controllo**, ad esempio per definire l'interazione tra fluido e solido.

Il teorema del trasporto di Reynolds ci consente di trasformare le leggi di governo espresse in un **sistema**, nelle stesse espresse in un **volume di controllo**. In sostanza il teorema consente di esprimere le leggi di governo nella visione Euleriana a partire da quella Lagrangiana.

Le leggi di governo della fluidodinamica, possono essere formulate in termini di varie quantità fisiche (e.g. velocità \bar{u} , quantità di moto $m \bar{u}$, temperatura T , densità ρ , ecc.) ed è intuitivo che non tutte queste quantità presentano le stesse caratteristiche: alcune dipendono dalla massa del sistema considerato (come la quantità di moto, l'energia cinetica, la massa stessa, ecc.) altre non dipendono dalla massa (come la velocità, la temperatura, la pressione, ecc.). Le proprietà che dipendono dalla massa sono dette *estensive*, le corrispondenti non dipendenti dalla massa sono dette *intensive*.

Indichiamo con B una generica grandezza *estensiva* caratterizzante un campo fluidodinamico e con b il suo valore per unità di massa, cioè *intensivo* (o valore specifico)

Ad esempio:

- $B = m = \text{massa} \rightarrow b = \frac{m}{m} = 1$ (sarebbe *massa per unità di massa*)
- $B = m \frac{u^2}{2} = \text{energia cinetica} \rightarrow b = \frac{u^2}{2} = \text{energia cinetica per unità di massa}$
- $\bar{B} = m\bar{u} = \text{quantità di moto} \rightarrow \bar{b} = \bar{u} = \text{quantità di moto per unità di massa ovvero velocità}$

Si noti che alcune proprietà intensive non hanno valore estensivo (ad esempio la temperatura) cioè non aumentano all'aumentare della massa considerata. Proprietà intensive che presentano un corrispondente estensivo si dicono anche specifiche.

Le proprietà estensive B_s del sistema all'istante t sono definite matematicamente come:

$$B_s = \iiint_{V_s} b \rho dV \quad (2.6)$$

essendo s il sistema considerato e V_s il volume da esso occupato all'istante t .

Poichè le leggi di conservazione valgono per un **sistema**, lo scopo del teorema del trasporto di Reynolds, è di calcolare la derivata totale rispetto al tempo di B_s cioè del sistema che deve essere seguito nel suo moto.

Per definizione

$$\frac{DB_s}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_s(t + \delta t) - B_s(t)}{\delta t} \quad (2.7)$$

dove V_s cambia con il moto, cioè dipende dal tempo.
 Si vuole dimostrare³ che:

$$\frac{DB_s}{Dt} = \iiint_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \iint_{S_0} \rho b \bar{n} \cdot \bar{u} dS = \iiint_{V_0} \left\{ \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho b \bar{u}) \right\} dV \quad (2.8)$$

essendo V_0 il volume d'integrazione al tempo t fisso, cioè il volume di controllo.

Per calcolare la variazione nel tempo della grandezza estensiva B (per comodità di notazione, nella dimostrazione non si riporta il pedice s), consideriamo un volume di controllo V_0 fisso che al tempo t viene preso coincidente con il volume materiale $V(t)$; dopo un tempo Δt il volume materiale si sarà mosso come disegnato nella figura 2.9.

Per la variazione nel tempo di B possiamo scrivere:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} \rho b dV - \int_{V(t)} \rho b dV}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

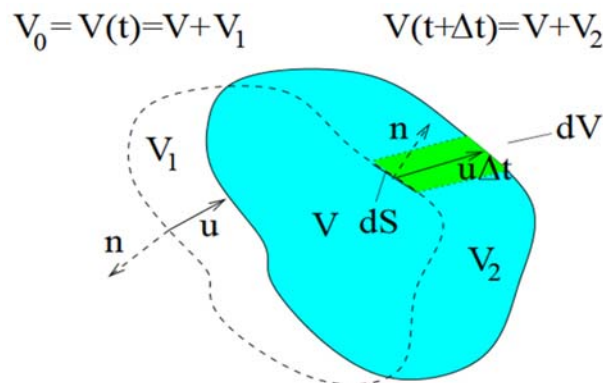


Figura 2.9: Moto relativo dopo un tempo Δt tra un volume di controllo fisso ed un volume materiale inizialmente coincidenti.

In base alla figura 2.9 possiamo scrivere $V(t) = V + V_1$ e $V(t + \Delta t) = V + V_2$ da cui:

$$\frac{dB}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V (\rho b)_{t+\Delta t} dV + \int_{V_2} (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_V (\rho b)_t dV - \int_{V_1} (\rho b)_t dV}{\Delta t}, \quad (2.10)$$

³ Si noti la formula di derivata sotto il segno di integrale, vista nell'analisi:

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) dx = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{dh}{dt} f(h(t), t) - \frac{dg}{dt} f(g(t), t)$$

essa costituisce la forma monodimensionale del teorema del trasporto di Reynolds che si intende dimostrare nel seguito.

in cui tutte le funzioni integrande sono calcolate al tempo relativo al volume di appartenenza. Notiamo ora che il primo e terzo integrale dell'equazione (2.10) sono valutati sullo stesso dominio V ma gli integrandi sono calcolati in tempi differenti per cui si ha:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_V (\rho b)_t dV}{\Delta t} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV, \quad (2.11)$$

avendo notato che per $t \rightarrow 0$, $V(t) \rightarrow V_0$.

Per gli altri due integrali osserviamo dalla figura 2.9 che, detto dS un elemento di superficie del volume V_0 , \mathbf{n} la sua normale ed \mathbf{u} la velocità di traslazione risulterà $dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS$ per il volume V_2 e $dV = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS$ per il volume V_1 . Il secondo e quarto integrale della (2.10) diventeranno allora:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_2} (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_{V_1} (\rho b)_t dV}{\Delta t} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{S_2} (\rho b)_{t+\Delta t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_1} (\rho b)_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \right) = \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove si è indicata con S_i la parte di superficie di V in comune con il volume V_i e si è utilizzato il fatto che per $t \rightarrow 0$, $S_1 + S_2 \rightarrow S_0$.

Se ora mettiamo insieme i risultati delle (2.11) e (2.12) possiamo scrivere

$$\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.13)$$

Con la quale abbiamo messo in relazione la grandezza B calcolata su un volume materiale con quantità calcolate su un volume di controllo e quindi di più facile valutazione.

La relazione (2.13) ci dice che le variazioni di B hanno due cause, una interna al sistema stesso e quindi dovuta a variazioni di b all'interno del volume V . L'altra possibilità è causata da scambi del sistema attraverso la sua superficie, ossia il flusso di b attraverso S .

Se la funzione $\rho b \mathbf{u}$ è continua e differenziabile allora il secondo integrale della (2.13) si può trasformare utilizzando il teorema della divergenza e scrivere:

$$\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV + \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho b \mathbf{u}) dV. \quad (2.14)$$

Un'ultima precisazione è necessaria circa il significato fisico di \mathbf{u} a seconda che V_0 sia fisso o in movimento. Nel primo caso, risultando nulla la velocità di S_0 (e di dS) non nascono dubbi e \mathbf{u} è la velocità con cui si muove il fluido nel punto considerato. Se, al contrario, V_0 è in movimento, dovendo valutare il flusso di ρb attraverso dS non saremo più interessati alla velocità assoluta del fluido ma piuttosto alla velocità relativa tra il fluido e la superficie S_0 .

$$\frac{DB_s}{Dt} = \iiint_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \iint_{S_0} \rho b \bar{n} \cdot \bar{u} dS \quad (2.16)$$

Altre forme del teorema del trasporto di Reynolds⁴ sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{DB_s}{Dt} &= \iiint_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \iiint_{V_0} \bar{\nabla} \cdot (\rho b \bar{u}) dV = \\ &= \iiint_{V_0} \left[\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho b \bar{u}) \right] dV = \iiint_{V_0} \left[\frac{D(\rho b)}{Dt} + \rho b \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] dV \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si noti che, se per una qualsiasi equazione di conservazione della generica proprietà fisica B_s per un sistema in moto, vale la relazione:

$$\frac{dB_s}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

consegue immediatamente che

$$\iiint_{V_0} \left[\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho b \bar{u}) \right] dV = 0 \quad (2.19)$$

e data l'arbitrarietà del sistema di materia scelto $V_s(t)$ all'istante t , e quindi del corrispondente volume di controllo V_0 , deve valere anche la corrispondente equazione in termini differenziali:

⁴ Per il teorema di Green

$$\iint_S \bar{u} \cdot \bar{n} dS = \iiint_V \bar{\nabla} \cdot \bar{u} dV$$

$$\iint_S (L\bar{u}) \cdot \bar{n} dS = \iiint_V \bar{\nabla} \cdot (L\bar{u}) dV$$

con L generica quantità scalare (o anche vettoriale). Si ha anche

$$G = \iiint_{V_0} \bar{\nabla} \cdot (\rho b \bar{u}) dV$$

$$\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \bar{u}) = 0 \quad (2.20)$$

Se il volume di controllo non varia nel tempo. Si può scrivere:

$$\frac{DB_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho b dV + \iint_{S_0} \rho b \bar{n} \cdot \bar{u} dS \quad (2.23)$$

dove la derivata assume la forma di $\frac{D}{Dt}$ cioè di derivata sostanziale.

Come detto è possibile con tali relazioni passare dall'approccio in termini di **volume di controllo** all'approccio in termini di **sistema**, e viceversa.

In particolare il termine a primo membro della 2.23 esprime la variazione nel tempo di una proprietà estensiva del sistema. La 2.21 rappresenta le variazioni nel tempo delle proprietà nel volume di controllo. La 2.20 rappresenta il flusso totale della proprietà attraverso la superficie di controllo S_0 . Il flusso è positivo per fluido uscente (\bar{n} e \bar{u} concordi) e negativo per flusso entrante.

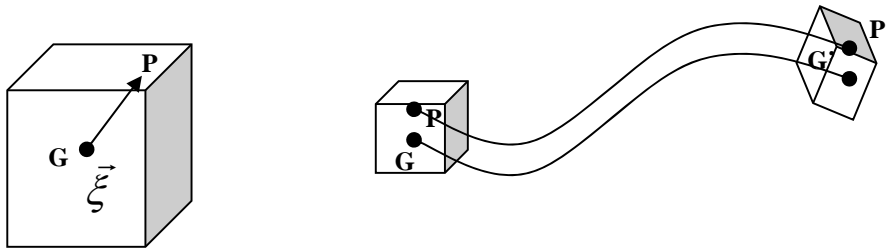
2.8 Analisi del moto di una particella

Consideriamo una particella di fluido con baricentro in $G(0,0,0)$ all'istante $t=t_0$ e consideriamo un elemento di fluido generico A che si trova nel punto P di coordinate ξ_i cioè distante $\sqrt{\xi_i^2}$ da G . Quindi all'istante $t=t_0$ si ha

$$G=(0,0,0)$$

$$P(\xi_i)$$

In un intervallo di tempo Δt (piccolo) la particella si sposterà e si deformerà e l'elemento di fluido A , che era posizionato in P , andrà ad occupare il punto P' :



$$\overline{PP'} = \bar{u} \Delta t$$

In generale la velocità di un generico elemento di fluido A sarà:

$$\bar{u} \neq \bar{u}_G$$

$$\bar{u}(x_k) \neq \bar{u}_G(x_{Gk}) \quad \bar{u}(x_k) = \bar{u}(x_{Gk} + \xi_k)$$

e potrà essere espressa nell'ottica di uno sviluppo in serie di Taylor troncata al primo ordine intorno a G , che ora genericamente sarà posizionato in \bar{x}_G , come:

$$\bar{u} = \bar{u}_G + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \xi_k$$

Per componenti cartesiane:

$$u_i = u_{G_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_k$$

$$[u_i] = [u_{G_i}] + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

La matrice di velocità di deformazione $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ (tensore del II ordine), può essere scomposta in una matrice emisimmetrica Ω_{ik} più una simmetrica ε_{ik} :

$$u_i = u_{G_i} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \xi_k \quad (2.18)$$

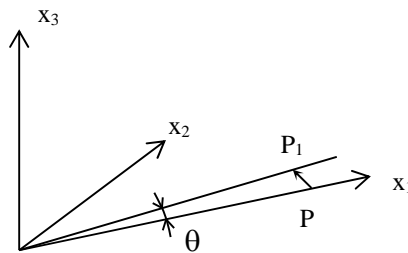
$$u_i = u_{G_i} + u_{R_i} + u_{d_i} = u_{G_i} + \Omega_{ik} \xi_k + \varepsilon_{ik} \xi_k \quad (2.19)$$

Come vedremo \bar{u}_R è la velocità dovuta alla rotazione e \bar{u}_d è quella dovuta alla deformazione.

2.8.1 Traslazione

La velocità di traslazione è quella associata al baricentro e quindi è uguale a u_{G_i}

2.8.2 Rotazione



La velocità dovuta alla rotazione intorno al baricentro è espressa dal termine $\Omega_{ik} \xi_k$:

$$\Omega_{ik}\xi_k = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \xi_k = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Ricordando che $\bar{\omega} = \bar{\nabla} \times \bar{u}$, è possibile scrivere la precedente nel modo seguente:

$$\Omega_{ik}\xi_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (2.21)$$

$$\bar{u}_R = \frac{1}{2} [(\omega_2\xi_3 - \omega_3\xi_2)\bar{e}_1 + (\omega_3\xi_1 - \omega_1\xi_3)\bar{e}_2 + (-\omega_2\xi_1 + \omega_1\xi_2)\bar{e}_3]$$

ma allora si ha che:

$$\bar{u}_R = \frac{I}{2} \bar{\omega} \times \bar{\xi} = \frac{I}{2} \nabla \times \bar{u} \times \bar{\xi}$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\omega} \times \bar{\xi} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(\omega_2\xi_3 - \omega_3\xi_2)\bar{e}_1 + (\omega_3\xi_1 - \omega_1\xi_3)\bar{e}_2 + (-\omega_2\xi_1 + \omega_1\xi_2)\bar{e}_3] \end{aligned} \quad (2.22)$$

e l'ultimo termine della (2.21) è uguale all'ultimo termine della (2.22).

Ad esempio:

$$u_{R_1} = \frac{1}{2} (\omega_2\xi_3 - \omega_3\xi_2)$$

che rappresenta la componente su \bar{e}_1 della (2.22), ed analogamente per le tre componenti.

Possiamo introdurre il vettore $\bar{\zeta}$ che dà la velocità angolare media delle particelle, ed è definito come:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} [\vec{e}_1 \omega_1 + \vec{e}_2 \omega_2 + \vec{e}_3 \omega_3] = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (2.23)$$

per cui ad esempio, la componente lungo \vec{e}_1 di $\vec{\zeta}$, cioè la rotazione intorno all'asse x_1 , sarà:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$$

L'eq. (2.18) può quindi essere scritta come:

$$\vec{u} = \vec{u}_G + \vec{\zeta} \times \vec{\xi} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\xi}$$

o, per componenti

$$u_i = u_{G_i} + (\vec{\zeta} \times \vec{\xi})_i + \varepsilon_{ik} \xi_k$$

essendo

$$\vec{\zeta} \times \vec{\xi} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{\xi} = \frac{1}{2} \xi_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

In conclusione, la parte emisimmetrica dà l'effetto delle rotazioni delle particelle e la parte simmetrica tiene conto dell'effetto della deformazione.

La (2.18) può quindi essere scritta come:

$$u_i = u_{G_i} + u_{R_i} + u_{d_i}$$

cioè come la velocità del baricentro più una velocità dovuta alla rotazione intorno al baricentro più una velocità dovuta alla deformazione:

u_{G_i} = velocità di traslazione del baricentro

$u_{R_i} = (\vec{\zeta} \times \vec{\xi})_i$ = velocità dovuta alla rotazione

$u_{d_i} = \varepsilon_{ik} \xi_k$ = velocità dovuta alla deformazione pura

Esempio di rotazione pura

Moto piano

$$u_3 = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = 0$$

$$\text{rot } \bar{u} = \omega_3 = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 2\zeta_3$$

$$\theta = \zeta t \quad \text{posizione al tempo } t \text{ essendo } \frac{d\theta}{dt} = \zeta$$

$$x_1 = r \cos \theta = r \cos(\zeta t)$$

$$x_2 = r \sin \theta = r \sin(\zeta t)$$

$$u_1 = -r \zeta \sin(\zeta t)$$

$$u_2 = r \zeta \cos(\zeta t)$$

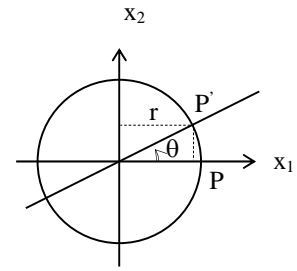
$$u_1 = -r \zeta \sin(\zeta t) = -x_2 \zeta$$

$$u_2 = r \zeta \cos(\zeta t) = x_1 \zeta$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \zeta, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\zeta$$

$$\omega_3 = \zeta - (-\zeta) = 2\zeta \rightarrow \zeta = \frac{\omega_3}{2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0$$



2.8.3 Deformazione

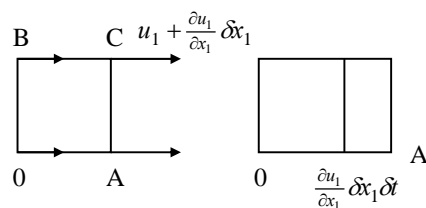
Vediamo ora l'effetto della deformazione $u_{d_i} = \varepsilon_{ik} \xi_k$ come sovrapposizione di una dilatazione pura e di uno scorrimento.

Dilatazione pura

Ipotizziamo che

$$\varepsilon_{11} \neq 0$$

e i termini ε_{ii} per $i \neq 1$ e $j \neq 1$ siano nulli.



La differenza di velocità produce nell'intervallo Δt una deformazione (allungamento) dell'elemento pari a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t$$

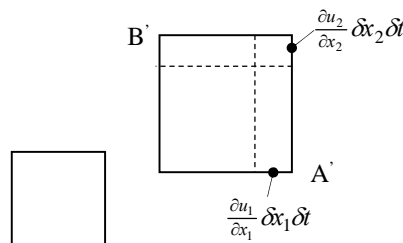
La variazione del volume $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ è:

$$\Delta V = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \Delta t$$

La variazione nel tempo per unità di volume del volume δV (variazione relativa di volume) per effetto del gradiente di velocità $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, è:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta t \right)}{\Delta t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Se estendiamo queste considerazioni a x_2 e x_3 , tenendo conto che ora $\varepsilon_{22} \neq 0$ e $\varepsilon_{33} \neq 0$ otteniamo:



Quindi la variazione relativa di volume per unità di tempo (velocità di dilatazione Δ) è, trascurando i termini di ordine superiore:

$$\Delta \frac{1}{\delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

Cioè la divergenza di \vec{u} è la velocità di dilatazione volumetrica.

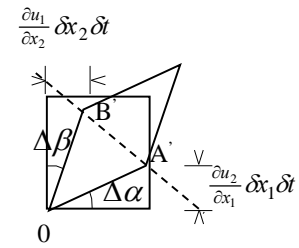
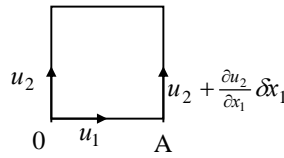
Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ il flusso è incomprimibile cioè la particella di fluido non cambia di volume nel moto. Si ricorda che la $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ corrisponde matematicamente alla condizione di solenoidalità del campo di velocità.

Scorrimento

Sia per ipotesi:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \neq 0$$

e le altre componenti siano nulle¹.



Definiamo l'angolo $\Delta\gamma$:

$$\Delta\gamma = \Delta\alpha - \Delta\beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta t + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta t$$

essendo (per convenzione) $\Delta\gamma$ positivo se l'angolo si riduce.

La deformazione per taglio, sarà:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}$ velocità di deformazione di taglio o di scorrimento essendo:

$$\Delta\alpha \approx \text{tg}(\Delta\alpha) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{\delta x_1} \Delta t$$

$$\Delta\beta \approx \text{tg}(\Delta\beta) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\delta x_2}{\delta x_2} \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \Delta t = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}$$

Quindi è evidente che i termini nella diagonale sono i responsabili delle deformazioni assiali (dilatazione volumetrica del sistema) mentre quelli fuori diagonale delle deformazioni per taglio. La ε_{ik} si può scomporre in 9 matrici del tipo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

¹ La velocità angolare ζ_3 è per definizione: $\zeta_3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} + \frac{\Delta\beta}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$

ed analoghe, come già dimostrato. Nel presente caso $\zeta_3=0$ perché $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

Oppure, accorpendo i termini sulla diagonale, ε_{ik} può essere decomposto in $D_{ik} + W_{ik}$ essendo D_{ik} diagonale e W_{ik} avendo solo i termini fuori della diagonale.

O ancora, può essere scomposta in 3+3 matrici corrispondenti ciascuna ad una deformazione elementare.

La matrice ε_{ik} è simmetrica ed esistono pertanto tre assi principali rispetto ai quali può essere diagonalizzata :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix}$$

La quadrica della deformazione: Poniamoci nel riferimento principale. Sappiamo che per deformazioni pure $\bar{\omega}_d = 0$ cioè il campo di deformazione pura è irrotazionale ed ammette pertanto un potenziale scalare ϕ . Infatti:

$$\varepsilon_{ik} = 0 \quad i \neq k$$

$$\varepsilon_{ii} \neq 0 = b_i$$

$$\varepsilon_{ik} = b_k \delta_{ki}$$

$\bar{u} = \bar{\nabla} \phi$ ovvero per componenti $u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ con il potenziale

$$\phi = \frac{1}{2} b_k x_k^2 = \frac{1}{2} (b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2)$$

che ha la forma di una quadrica. Quindi, poichè:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = b_1 x_1, \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = b_2 x_2, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = b_3 x_3$$

si ha che:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_1 x_1}{\partial x_2} + \frac{\partial b_2 x_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

ed anche $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$.

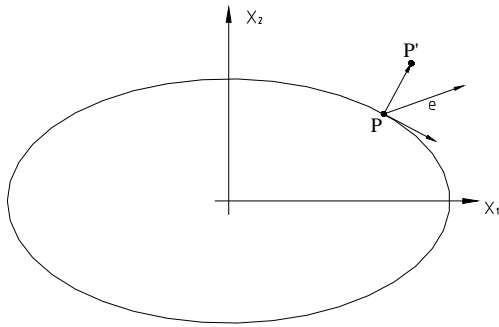
Al contrario:

$$\varepsilon_{11} = \frac{2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = b_1$$

ed anche $\varepsilon_{22} = b_2$ e $\varepsilon_{33} = b_3$. Se poniamo

$$\phi = \frac{1}{2} b_k x_k^2 = \varphi_P (\text{valore nel punto } P)$$

si ottiene l'equazione di una quadrica a centro (ellissoide o iperboloidi) passante per P:



Per valutare le componenti di $\overline{PP'}$ (spostamento) secondo \vec{l}

$$(\overline{PP'})_{\vec{l}} = \overline{PP'} \cdot \vec{l} = \vec{u} \cdot \vec{l} \Delta t$$

$$u_l = u_k \cos(x_k \theta_l) = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial e} = \frac{\partial \phi}{\partial e}$$

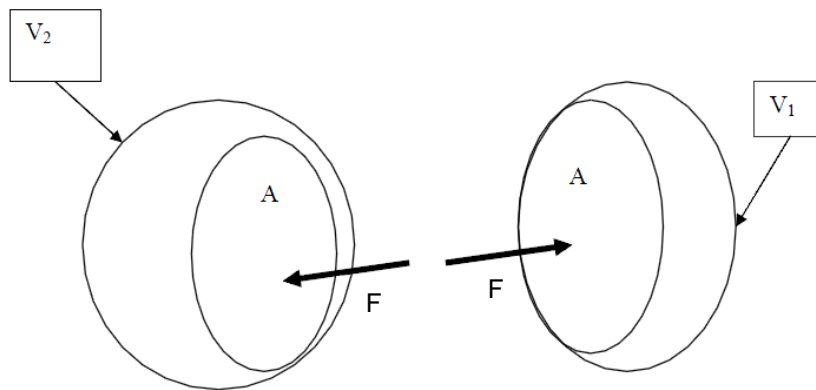
Se \vec{e} è tangente alla superficie $\frac{\partial \phi}{\partial e} = 0$ essendo $\phi = \phi_P = \cos t.$, lo spostamento vettoriale del punto P è sempre normale alla giacitura locale della quadrica ed il modulo della velocità è calcolabile come:

$$|\vec{u}|^2 = u_i^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2$$

2.9 Tensore delle tensioni

E' possibile distinguere due tipi di forze agenti sul corpo fluido: le **forze di corpo** e le **forze di contatto**. Le forze di corpo sono in grado di penetrare in tutte le parti del corpo fluido e di agire su di esse: è pertanto naturale pensarle come distribuite sul volume occupato dal corpo fluido. La **forza di gravità** è il più importante esempio del primo tipo di forze, ma vanno ricordate anche le **forze di natura elettromagnetica**, che agiscono sui fluidi che trasportano cariche elettriche, e le **forze apparenti**, che agiscono sui fluidi in movimento in sistemi di riferimento non inerziale.

Per comprendere il ruolo e la modalità di azione delle forze di contatto, si consideri un corpo fluido di volume V , in equilibrio sotto l'azione di una distribuzione di forze di corpo. Si divida il corpo fluido in due porzioni, limitate da una superficie A : affinché ciascuna delle due porzioni risulti in equilibrio è necessario esercitare su di esse, attraverso A , un sistema di forze costituenti l'azione reciproca che si scambiano le due porzioni



Tale sistema di forze, costituito da due forze F uguali in modulo e direzione e di verso opposto, può essere pensato come derivante da una distribuzione continua di forza di contatto sulla superficie A .

In altre parole si può ipotizzare una partizione della superficie di separazione in aree elementari dA sulle quali agiscono forze di contatto elementari dF .

Il rapporto dF/dA , è definito, per dA che tende a zero, **sforzo agente sulla superficie dA** . Lo sforzo, solitamente indicato con i simboli T o τ , è quindi un vettore, avente le dimensioni di una forza per unità di superficie: $[Nm^{-2}]$, funzione del tempo, della posizione attorno cui si fa tendere a zero dA e della giacitura di quest'ultima.

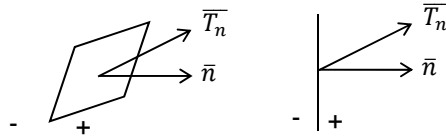
La forza di contatto agente sull'area elementare dA si calcola immediatamente come:

$$dF = \tau dA$$

e di conseguenza, la forza di contatto risultante su A , si calcola integrando la precedente.

Si vuole dimostrare che gli sforzi interni ad un fluido, che caratterizzano totalmente lo stato tensionale in un punto, sono 9. Questi, raccolti in una matrice 3x3, costituiscono il tensore delle tensioni \bar{T} .

Consideriamo una superficie δS individuata dalla normale \bar{n} .



Sulla superficie δS sarà applicata una forza δF_n

$$\bar{T}_n = \frac{\delta F_n}{\delta S} \quad (2.25)$$

Per fluidi fermi $\bar{T}_n = -p \bar{n}$ con \bar{n} che caratterizza le giaciture della S . Si dimostrerà che per un fluido in moto, la \bar{T} relativa ad una giacitura \bar{n} è combinazione degli sforzi $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$ relativi a 3 direzioni principali della terna di riferimento prescelte.

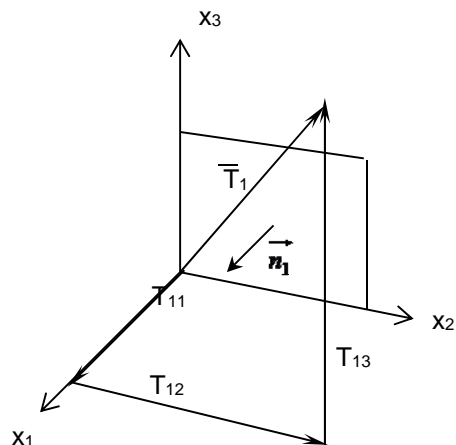
Se scegliamo un piano normale a x_1

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= T_{1K} \bar{e}_K \\ \bar{T}_{11} + \bar{T}_{12} + \bar{T}_{13} &= \bar{T}_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Moltiplicando scalarmente le (2.26) per \bar{e}_k , si ha:

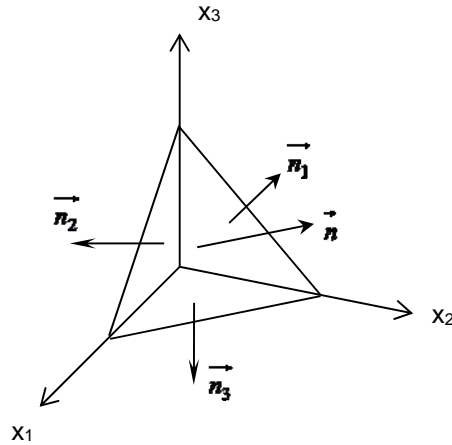
$$\begin{aligned} T_{11} \bar{e}_1 + T_{12} \bar{e}_2 + T_{13} \bar{e}_3 &= \bar{T}_1 \\ \bar{T}_1 \cdot \bar{e}_k &= T_{1k} \end{aligned}$$

e analogamente per le altre 2 direzioni.



2.9.1 Tetraedro di Cauchy

Cerchiamo ora di generalizzare questi concetti: prendiamo un tetraedro di fluido che è in equilibrio sotto l'effetto delle forze di volume e di superficie.



La risultante delle forze di superficie \bar{F}_s , è

$$\bar{F}_s = \bar{T} S + \bar{T}_i S_i \quad (2.27)$$

ma $\bar{n}_i = -\bar{e}_i$ e quindi, riferendosi ad \bar{e}_i

$$\bar{F}_s = \bar{T} S + \left(\sum (-\bar{T}_i S_i) \right)$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto (I° principio della dinamica)

$$\begin{aligned} \bar{F}_{tot} &= m\bar{a} \\ \bar{F}_s + m\bar{g} &= m\bar{a} \end{aligned}$$

La massa è data da:

$$m = \rho \frac{h}{3} S$$

con h altezza del tetraedro. Si ha quindi:

$$\bar{T} S - \sum \bar{T}_i S_i = \rho \frac{h}{3} S (\bar{a} - \bar{g})$$

da cui, dividendo per S e passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \bar{T} - \sum \bar{T}_i \frac{S_i}{S_n} - \rho \frac{h}{3} (\bar{a} - \bar{g}) \right\} = 0$$

$$\bar{T} - \sum \bar{T}_i \frac{S_i}{S_n} = 0$$

ma $\frac{S_i}{S_n} = \cos(\hat{n} x_i) = \bar{n} \cdot \bar{e}_i = cn_i$ dove cn_i indicano i coseni direttori di \bar{n} su \bar{e}_i . Si ottiene quindi:

$$\bar{T} = \sum cn_i \bar{T}_i = \sum_i \bar{n} \cdot \bar{e}_i \bar{T}_i = \sum_i \bar{n} \cdot \bar{e}_i T_{ik} \bar{e}_k = T_{ik} \bar{e}_i \bar{e}_k \cdot \bar{n} \quad (2.28)$$

In cui \bar{T} sono gli sforzi relativi alla generica faccia di normale \bar{n} , mentre \bar{T}_i rappresenta lo sforzo relativo alla \bar{e}_i cioè alla faccia di normale \bar{n}_i .

Se consideriamo la faccia di normale \bar{n}_1 , lo sforzo \bar{T}_1 può essere scomposto nelle 3 componenti per proiezione su \bar{e}_k ($k=1, 2, 3$) e si ottengono, come già detto, le 3 componenti del tensore delle tensioni

$$T_{11}, T_{12}, T_{13}$$

e cioè

$$T_{1k} = \bar{T}_1 \cdot \bar{e}_k \quad (2.29)$$

In generale quindi:

$$T_{ik} = \bar{T}_i \cdot \bar{e}_k \quad \text{con } i=1,2,3 \text{ e } k=1,2,3. \quad (2.30)$$

Mediante la (2.28), si dimostra che lo stato tensionale rispetto ad una generica giacitura, è definito dalle tensioni agenti sulle tre giaciture \bar{n}_1 , \bar{n}_2 e \bar{n}_3 . Inoltre, dalla 2.29 la tensione su una giacitura i è esprimibile attraverso le 3 componenti T_{ik} e le 3 componenti cartesiane sulla giacitura generica \bar{n}_k sono date da:

$$T_k = \bar{T} \cdot \bar{e}_k = cn_i \bar{T}_i \cdot \bar{e}_k = c_{ni} T_{ik} = \bar{n} \cdot \bar{e}_i T_{ik} \Rightarrow \bar{T} = \bar{T} \cdot \bar{n} \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow c_{ni} T_{ik} \bar{e}_k = \bar{T}$$

Pertanto le 9 quantità T_{ik} definiscono completamente le tensioni intorno ad un punto in quanto come dimostrato da (2.31) la tensione in qualunque altra giacitura generica \bar{n} può essere valutata mediante la (2.31), noti i coseni direttori di \bar{n} rispetto a \bar{e}_i .

La forma delle componenti del tensore delle tensioni al variare della terna di riferimento, viene fornita come nota ⁶.

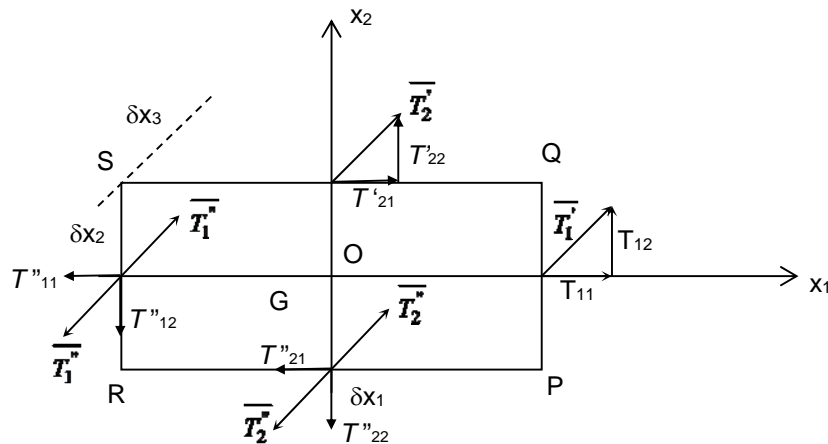
2.9.2 Simmetria del tensore delle tensioni

Tra le varie proprietà del tensore delle tensioni si può far vedere che

$$T_{ik} = T_{ki}$$

cioè che il tensore T_{ik} è simmetrico con considerazioni sull'equilibrio alla rotazione di un elemento di fluido.

Infatti, consideriamo il caso semplice dell'equilibrio alla rotazione di un elemento di fluido di base rettangolare e profondità δx_3 :



⁶ **Trasformazione delle componenti del tensore al variare della terna di riferimento:** Sia \mathcal{X}_i^* una terna di riferimento cartesiana ortogonale e \mathcal{X}_i un'altra terna dello stesso tipo, e si voglia rappresentare il tensore delle tensioni in \mathcal{X}_i^* . Sia Π la matrice di trasformazione da:

$$x_i \rightarrow x_i^* \quad e \quad \bar{e}_i \rightarrow \bar{e}_i^*$$

per cui

$$\bar{e}_i^* = \Pi_{il} \bar{e}_l$$

con $\Pi_{il} = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_l}$ che per la sola rotazione si riduce ai coseni direttori c_{il} di cui solo 3 indipendenti.

Ricordando le 2.28 si ottiene:

$$\bar{T} = c n_i \bar{T}_i$$

$$\bar{T} \cdot \bar{e}_i^* = c n_k \bar{T}_k \Pi_{il} \bar{e}_l$$

$$T_i^* = c n_k \Pi_{il} \bar{T}_k \cdot \bar{e}_l = c n_k \Pi_{il} T_{kl}$$

Il contributo delle tensioni agenti sui 4 lati PQ, RS, RP, SQ , sarà:

$$T'_{12} \delta x_2 \frac{\delta x_1}{2} \delta x_3 \quad \text{contributo di } PQ$$

$$T''_{12} \delta x_2 \frac{\delta x_1}{2} \delta x_3 \quad \text{contributo di } RS$$

$$-T''_{21} \frac{\delta x_2}{2} \delta x_3 \delta x_1 \quad \text{contributo di } RP$$

$$-T'_{21} \frac{\delta x_2}{2} \delta x_1 \delta x_3 \quad \text{contributo di } SQ$$

Ed il momento rispetto al baricentro, essendo δv il volume $= \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$:

$$M_{TO} = \frac{\delta v}{2} \left\{ (T'_{12} + T''_{12}) - (T'_{21} + T''_{21}) \right\}$$

La variazione del momento della quantità di moto è data invece da:

$$M_I = I_3 \dot{\zeta} = m r_3^2 \dot{\zeta} = m \frac{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}{12} \dot{\zeta} = \rho \delta v \frac{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}{12} \dot{\zeta}$$

essendo il raggio di inerzia r_3 :

$$r_3^2 = \frac{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}{12}$$

Quindi per la conservazione del momento della quantità di moto, cioè per l'equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro, si ha che:

$$M_{TO} = M_I$$

e quindi

$$\frac{\delta v}{2} \left\{ (T'_{12} + T''_{12}) - (T'_{21} + T''_{21}) \right\} = \rho \delta v \frac{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}{12} \dot{\zeta}$$

che al limite, per l'elementino che tende a zero, dà:

$$\lim_{\delta x_1, \delta x_2 \rightarrow 0} \frac{(\delta x_1^2 + \delta x_2^2)}{6} = 0 \Rightarrow T_{12} = T_{21}$$

2.10 Relazione costitutiva per fluidi Newtoniani

Come vedremo successivamente più in dettaglio, nello scrivere le equazioni di equilibrio che governano il moto di un fluido, avremo l'equilibrio tra forze d'inerzia, forze di superficie e forze di volume.

Le forze di inerzia saranno espresse in termini di accelerazioni ovvero di variazioni delle velocità mentre le forze di superficie, come visto al paragrafo (2.9), sono espresse in funzione delle tensioni superficiali che una particella applica ad una particella contigua. E' pertanto opportuno esprimere una forma di legame (di tipo lineare possibilmente) tra le tensioni e le velocità di deformazione in modo che le equazioni risultanti siano in termini delle sole velocità.

2.10.1 Relazioni costitutive tensioni - velocità di deformazione

Tali relazioni sono di tipo assiomatico e si basano sugli assiomi detti di **Noll**, che sono i seguenti:.

1. Principio di determinismo o non influenza dal futuro
2. Principio di effetto locale
3. Principio di indifferenza dal sistema di riferimento

Inoltre si assume ragionevolmente che T_{ij} dipenda esclusivamente da:

- (1) Velocità
- (2) Tensore del gradiente di velocità $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
- (3) Stato termodinamico

cioè:

$$T_{ij} = H \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{ stato termodinamico} \right)$$

Supponiamo che sia valida la (2.19):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \{ \Omega_{ik} + \varepsilon_{ik} \}$$

Dall'assioma **3**, T_{ij} non può dipendere da Ω_{ij} in quanto Ω_{ij} è emisimmetrico e T_{ij} è simmetrico e non può dipendere da u_i in quanto è un vettore, quindi:

$$T_{ij} = H (\varepsilon_{ij}, \text{ stato termodinamico}) \tag{2.32}$$

Per un fluido a riposo, dall'analisi sperimentale e dalla fluidostatica, si ha:

$$\bar{T} = -p\bar{n}$$

$$T_{ij}n_j = -p\delta_{ij}n_j$$

$$(T_{ij} + p\delta_{ij})n_j = 0$$

quindi in fluidostatica il tensore è sferico e la sua traccia è uguale a $-3p$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p$$

Si considerano ora le ipotesi di fluido **Stokesiano**

1. T_{ij} è una funzione continua di ε_{ij} e dello stato termodinamico
2. a riposo $T_{ij} + p\delta_{ij} = 0$
3. il fluido è isotropo
4. il fluido è omogeneo

La relazione costitutiva si ottiene quindi sviluppando in serie di Taylor la (2.32)

$$T_{ij} = A_{ij}^1 + A_{ijkl}^2 \varepsilon_{kl} + A_{ijklmn}^3 \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \quad (2.33)$$

A^1, A^2, \dots devono essere isotropi, ed inoltre A_{ij}^1 è un tensore del secondo ordine, A_{ijkl} è un tensore del quarto ordine, ecc..

Il fluido si dice **Newtoniano**, se si trascurano nello sviluppo in serie i termini del secondo ordine $\varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn}$. L'unico tensore isotropo del II° ordine è:

$$A_{ij} = A_0 \delta_{ij} \quad (2.34)$$

L'unico tensore isotropo del IV° ordine può essere espresso come:

$$A_{ijkl} = A_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 \delta_{il} \delta_{kj} + A_3 \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.35)$$

Quindi:

$$T_{ij} = A_0 \delta_{ij} + A_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + A_2 \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl} + A_3 \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl} = \quad (2.36)$$

$$= (A_0 + A_1 \varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + (A_2 + A_3) \varepsilon_{ij} \quad (2.37)$$

$$A_0 = -p$$

$$A_1 = \lambda \quad A_4 = A_2 + A_3 = 2\mu$$

Da cui:

$$T_{ij} = (-p + \lambda \varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.38)$$

La (2.38) costituisce la relazione costitutiva per un fluido Newtoniano.

Spesso si indica:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -p \delta_{ij} + \sigma_{ij} & \text{dove} \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Si noti che la traccia risulta:

$$T_{ii} = -3p + \sigma_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ii} \quad (2.40)$$

e la media risulta:

$$\frac{T_{ii}}{3} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{ii} \quad (2.41)$$

In condizioni di riposo,

$$\frac{T_{ii}}{3} = -p$$

cioè la pressione termodinamica uguaglia il valore medio della traccia (rispetta pertanto la seconda ipotesi di Stokes).

In condizioni di moto, si devono distinguere 2 casi semplificati:

1. $\varepsilon_{ii} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ campo solenoidale incompressibile.
2. $\lambda + \frac{2}{3} \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \mu$ **ipotesi di Stokes** verificata per gas monoatomici a bassa densità (ed anche per l'aria).

In generale si ha:

$$\frac{T_{ii}}{3} + p = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{ii} \quad (2.42)$$

dove spesso si indica con $\lambda' = \lambda + 2/3\mu$ la *viscosità volumetrica*. Si noti che p è la pressione del fluido a riposo quindi rappresenta la pressione fluidostatica. Nel caso di flusso in moto, la pressione P sarà uguale ad un terzo di T_{ii} , e talvolta viene quindi indicata come:

$$P = -\frac{T_{ii}}{3}$$

che, come detto, rappresenta convenzionalmente la pressione del fluido in moto. Questa è una quantità meccanica che non coincide necessariamente con la pressione termodinamica.

Tornando al caso più generale, si ha pertanto:

$$T_{ij} = \frac{T_{ii}}{3} \delta_{ij} + d_{ij} \quad (2.43)$$

dove $T_{ii}/3$ è il tensore sferico e d_{ij} il tensore deviatorico.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad e \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda' \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \\ T_{ij} &= (-p + \lambda \varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Per gas monoatomici a bassa densità ($\lambda' = 0$) si ha:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.45)$$

2.10.2 Relazioni costitutive per il flusso di calore

Sulla base degli assiomi di Noll si può introdurre anche il legame costitutivo tra flusso di calore e temperatura o gradiente di temperatura

$$K_i = A_i^1 + A_{ij}^2 \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.46)$$

dove A_i^1 è un vettore e A_{ij}^2 è un tensore del secondo ordine. Ma A^1 e A^2 devono essere isotropi

$$A_{ij}^1 = k' \delta_{ij} \quad e \quad A_i^1 = 0$$

e quindi:

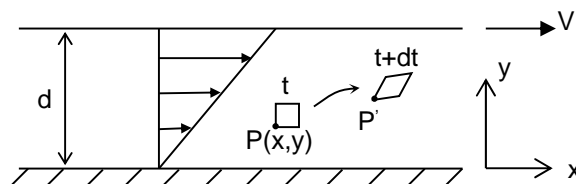
$$K_i = k' \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta_{ij} = -k' \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.47)$$

con k coefficiente di conducibilità termica del fluido, e il segno meno tiene conto del calore che si propaga da zone calde a zone fredde.

2.11 Esercizi relativi al Cap. 2

Es. 2.1. Applicazione dei concetti di cinematica al moto di Couette

Consideriamo un moto di *Couette*, ovvero il moto piano di un fluido fra due piani paralleli di cui uno è fisso e l'altro si muove con velocità costante V . Consideriamo il fluido incompressibile e viscoso (moto laminare) e trascuriamo l'effetto della forza peso. Come vedremo in seguito, questo tipo di moto dà una rappresentazione semplificata delle fenomenologie che si osservano nei problemi di lubrificazione ad esempio in cuscinetti concentrici rotanti (supponendo che il meato tra albero e cuscinetto sia molto più piccolo del raggio dell'albero). Come si vedrà più in dettaglio in seguito, se supponiamo la pressione sempre costante, la velocità nel meato è una funzione lineare della distanza dal piano fisso:



Con le notazioni della figura (distanza tra i piani d e velocità del piano mobile V) la velocità di un punto $P(x_1, x_2)$ è data da:

$$v_1 = \frac{V}{d} x_2$$

$$v_2 = 0$$

Supponendo il fluido Newtoniano, lo sforzo di taglio τ che uno strato di fluido trasmette allo strato adiacente meno veloce, è dato da:

$$\tau = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \mu h$$

avendo posto $h=V/d$. μ rappresenta il coefficiente di viscosità che supponiamo essere costante (la temperatura del fluido è mantenuta costante tramite e.g. uno scambiatore di calore). Lo sforzo μ è quindi costante in tutto il campo.

Per questo tipo di flusso, determinare lo spostamento e la deformazione in un tempo dt di un quadrato di fluido con lati paralleli agli assi.

Es. 2.2

Un campo di velocità in due dimensioni è dato da:

$$\vec{u} = \frac{10y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{i} - \frac{10x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{j} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

- Dire se il campo è solenoidale
- Dire se il campo è rotazionale o irrotazionale
- Determinare il modulo della velocità e la velocità dei punti lungo l'asse x e l'asse y
- Determinare l'angolo tra il vettore velocità e l'asse x nei punti $(x,y) = (5;0)$, $(5;5)$ e $(0;5)$
- Determinare l'equazione delle linee di corrente.

Es. 2.3

Un campo di velocità è dato da

$$\vec{u} = \frac{V_0}{l} (x\vec{j} - y\vec{i})$$

Con V_0 ed l costanti. In quale posizione del campo il modulo della velocità è V_0 ? Diagrammare la velocità nel I° e II° quadrante usando delle frecce per rappresentare la velocità del fluido in alcune posizioni, e individuare di che tipo di flusso si tratta. Inoltre:

- Verificare che il campo è irrotazionale
- Verificare che il campo è solenoidale.
- Determinare la funzione di corrente e disegnare le linee di corrente
- Determinare il potenziale scalare e disegnare le linee equipotenziali
- Dimostrare che linee equipotenziali e linee di corrente sono perpendicolari tra loro.

Es. 2.4

Il gas di uscita da un motore a reazione di un aereo si trova a temperatura T funzione della quota z e del tempo t . Fissata la quota, la temperatura diminuisce con legge

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -c_1 \quad \text{con} \quad c_1 < 0$$

Al crescere della quota la temperatura aumenta con legge

$$\frac{\partial T}{\partial z} = c_2 \quad \text{con} \quad c_2 > 0$$

Determinare la velocità verticale dell'aereo affinché la temperatura si mantenga costante.

Es. 2.5

Il campo di velocità di un flusso è dato da:

$$u = -\frac{V_0 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$v = \frac{V_0 x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

con V_0 costante. Dove, nel campo, la velocità è pari a V_0 ? Determinare anche l'equazione delle linee di corrente.

Es. 2.6

Dato il campo di velocità

$$u = c(x^2 - y^2)$$
$$v = -2cxy$$

determinare l'equazione delle linee di corrente.
Mostrare in quali punti del campo il flusso è parallelo all'asse x.

Es. 2.7

Le componenti x ed y della velocità per un flusso 2D sono:

$$u = 6y \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \quad v = 3 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Determinare le equazioni delle linee di corrente ed il luogo di punti nei quali la velocità è parallela alla bisettrice del I° quadrante.

Es. 2.8

Dato il campo di velocità:

$$u = \frac{cx}{x^2 + y^2} \quad v = \frac{cy}{x^2 + y^2}$$

con $c = \text{cost.}$ (sorgente).

Calcolare:

- La variazione percentuale di volume di un elemento di fluido nell'unità di tempo.
- La vorticità

Es. 2.9

Dato il campo di velocità:

$$u = \frac{cy}{x^2 + y^2} \quad v = -\frac{cx}{x^2 + y^2}$$

con $c = \text{cost.}$

Calcolare:

- La variazione percentuale di volume di un elemento di fluido nell'unità di tempo.
- La vorticità

Es. 2.10

Il moto descritto dalle relazioni:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = cr$$

(con $c = \text{cost.}$) è rotazionale o irrotazionale?

Es. 2.11

Consideriamo il campo di velocità:

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad v = -\frac{x}{x^2 + y^2} \quad w = 0$$

indicare di che tipo di flusso si tratta (compressibile o incompressibile) e se il moto è irrotazionale.

Es. 2.12

Definire il seguente campo di velocità:

$$v = (3z - 4x ; -5y ; -2x+z)$$

Es. 2.13

In un moto alla Poiseuille in un tubo, le componenti di velocità sono:

$$u = v = 0 \quad w = b(-x^2 - y^2 + a^2)$$

che tipo di moto e flusso è?

Es. 2.14

Un flusso bidimensionale ha il campo di velocità definito come:

$$\bar{u} = 4xy\bar{j} + 2(x^2 - y^2)\bar{j}$$

E' irrotazionale?

Es. 2.15

Per un flusso 3D, incompressibile, stazionario, si hanno:

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$v = xy + yz + z^2$$

Determinare la forma della componente w , affinché il flusso soddisfi l'equazione di continuità.

Es. 2.16

Il modulo della velocità di un campo fluidodinamico è dato da $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}$ mentre le funzioni di corrente è data da: $y^2 + 2xy = \cos t$. Valutare le componenti della velocità u e v .

Es. 2.17

Un campo di velocità in un flusso stazionario, compressibile e bidimensionale, è dato da:

$$u = 2y \quad v = 4x$$

- Determinare la funzione di corrente corrispondente
- Disegnare le linee di corrente e la direzione del flusso

Es. 2.18

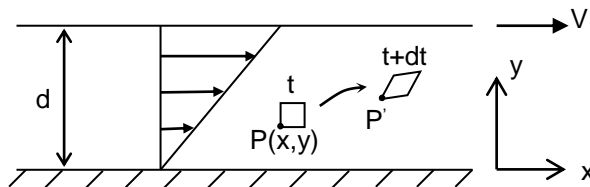
Scrivere in forma indiciale (secondo la notazione di Newton) il risultato delle operazioni indicate:

- | | |
|--|---|
| 1. $\bar{\nabla} \cdot \bar{u} =$ | 11. $(\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} =$ |
| 2. $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} T =$ | 12. $\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) =$ |
| 3. $\bar{\nabla} P =$ | 13. $\bar{\nabla} \otimes \bar{u} =$ |
| 4. $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} T =$ | 14. $\delta_{ii} =$ |
| 5. $\bar{\nabla} T \cdot \bar{n} =$ | 15. $\delta_{ik} \delta_{ik} =$ |
| 6. $\bar{PI} =$ | 16. $\varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} =$ |
| 7. $(\bar{\nabla} \cdot \bar{T}) \cdot \bar{u} =$ | 17. $\varepsilon_{ik} \delta_{kl} =$ |
| 8. $\frac{DT}{Dt} =$ | 18. $\varepsilon_{ik} \delta_{kl} =$ |
| 9. $\bar{u} \otimes \bar{u} =$ | 19. $\varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} \delta_{ik} \delta_{lm} =$ |
| 10. $\bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) =$ | 20. $\varepsilon_{ik} \Omega_{ik} =$ |

2.12 Soluzioni di alcuni esercizi relativi al Cap. 2

Es. 2.1. Applicazione dei concetti di cinematica al moto di Couette

Consideriamo un moto di *Couette*, ovvero il moto piano di un fluido fra due piani paralleli di cui uno è fisso e l'altro si muove con velocità costante V . Consideriamo il fluido incompressibile e viscoso (moto laminare) e trascuriamo l'effetto della forza peso. Come vedremo in seguito, questo tipo di moto dà una rappresentazione semplificata delle fenomenologie che si osservano nei problemi di lubrificazione ad esempio in cuscinetti concentrici rotanti (supponendo che il meato tra albero e cuscinetto sia molto più piccolo del raggio dell'albero). Come si vedrà più in dettaglio in seguito, se supponiamo la pressione sempre costante, la velocità nel meato è una funzione lineare della distanza dal piano fisso:



Con le notazioni della figura (distanza tra i piani d e velocità del piano mobile V) la velocità di un punto $P(x_1, x_2)$ è data da:

$$v_1 = \frac{V}{d} x_2$$
$$v_2 = 0$$

Supponendo il fluido Newtoniano, lo sforzo di taglio τ che uno strato di fluido trasmette allo strato adiacente meno veloce, è dato da:

$$\tau = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \mu h$$

avendo posto $h=V/d$. μ rappresenta il coefficiente di viscosità che supponiamo essere costante (la temperatura del fluido è mantenuta costante tramite e.g. uno scambiatore di calore). Lo sforzo μ è quindi costante in tutto il campo.

Per questo tipo di flusso, determinare lo spostamento e la deformazione in un tempo dt di un quadrato di fluido con lati paralleli agli assi.

Soluzione Es. 2. 1

Il tensore *velocità di deformazione* sarà dato da:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come abbiamo visto, tale tensore può essere scomposto nella parte simmetrica u_{di} e nella parte antisimmetrica u_{Ri} , e nel caso in esame si ottiene:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}h \\ -\frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix}$$

La prima matrice a secondo membro (rotazione rigida) fornisce due componenti di velocità

$$\frac{1}{2}h\xi_2, \quad -\frac{1}{2}h\xi_1$$

che corrispondono alla rotazione di un punto Q rispetto a P con velocità angolare $-\frac{1}{2}h$.

Infatti, se calcoliamo il rotore della velocità, si ottiene (tenendo conto che il moto è piano):

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -h$$

e cioè la parte antisimmetrica del tensore velocità di deformazione, rappresenta una rotazione rigida con velocità angolare:

$$\zeta = \frac{1}{2}\bar{\nabla} \times \bar{u} = -\frac{1}{2}h$$

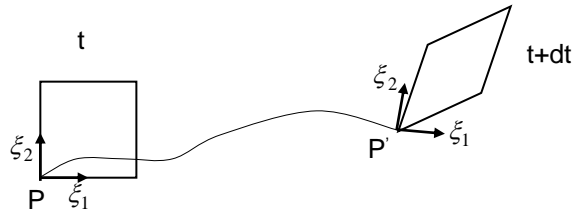
La parte simmetrica del tensore velocità di deformazione, rappresenta invece una deformazione per solo scorrimento (solo i termini fuori della diagonale sono diversi da 0) con dilatazione nulla.

La parte simmetrica del tensore velocità di deformazione fornisce quindi due componenti di velocità

$$\frac{1}{2}h\xi_2, \quad \frac{1}{2}h\xi_1$$

che corrispondono alla deformazione per scorrimento.

Consideriamo allora il quadrato di fluido $PACB$ con lati paralleli agli assi e prendiamo un riferimento cartesiano locale ξ_1, ξ_2 centrato nel punto P .



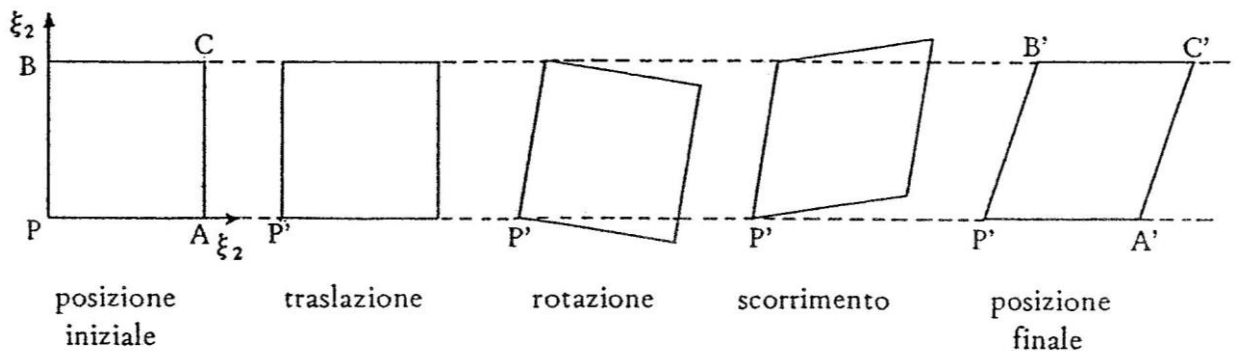
Vediamo separatamente gli effetti della traslazione, rotazione e scorrimento in un tempo dt :

- la traslazione rigida sposta rigidamente tutto il quadrato da P a P' . Se il punto P si trovava nella posizione $(x_1; x_2)$, dopo la traslazione si troverà nel punto:

$$P' = (x_1 + v_1 dt; x_2) \Rightarrow PP' = v_1 dt = \frac{V}{h} x_2 dt$$

- nella rotazione rigida, PA e PB ruotano rigidamente di $1/2 h dt$ in senso orario essendo la velocità angolare $= -1/2h$.
- nella deformazione per scorrimento, il punto A ruota di $1/2 h dt$ in senso antiorario, mentre il punto B ruota sempre di $1/2 h dt$ ma in senso orario.

Globalmente, sommando i tre effetti, si ha che nel punto A , l'effetto della rotazione e dello scorrimento si compensano quindi esso subisce solo la traslazione rigida. Nel punto B i due effetti invece si sommano, quindi, oltre alla traslazione rigida, esso si sposta di $h dt$. Il risultato finale per il quadrato completo quindi:



E' da notare che gli spostamenti infinitesimi sono *commutativi* cioè la posizione finale di un punto non dipende dall'ordine in cui essi vengono applicati. Questo ci ha permesso di considerare separatamente la traslazione, rotazione e scorrimento, e di ottenere la deformazione finale sovrapponendone gli effetti.

Es. 2.2

Un campo di velocità in due dimensioni è dato da:

$$\vec{u} = \frac{10y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{i} - \frac{10x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{j} \quad \left(\frac{m}{s} \right)$$

- Dire se il campo è solenoidale
- Dire se il campo è rotazionale o irrotazionale
- Determinare il modulo della velocità e la velocità dei punti lungo l'asse x e l'asse y
- Determinare l'angolo tra il vettore velocità e l'asse x nei punti $(x,y) = (5;0)$, $(5;5)$ e $(0;5)$
- Determinare l'equazione delle linee di corrente.

Soluzione Es. 2.2

Affinché il campo di velocità sia solenoidale, deve valere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Chiameremo

$$A(x, y) = x^2 + y^2$$

quindi l'espressione del campo diventa:

$$\vec{u} = A^{-\frac{1}{2}} \cdot 10y \cdot \vec{i} - A^{-\frac{1}{2}} \cdot 10x \cdot \vec{j}$$

Poiché

$$\frac{\partial A^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} = -A^{-\frac{3}{2}} x \quad \text{e} \quad \frac{\partial A^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} = -A^{-\frac{3}{2}} y$$

si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10y \left(-\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} 2x \right) = -10xy A^{-\frac{3}{2}}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -10x \left(-\frac{1}{2} A^{-\frac{3}{2}} 2x \right) = 10xy A^{-\frac{3}{2}}$$

Quindi, sommando le due derivate, si vede che il campo di velocità è solenoidale.

Determiniamo ora se il campo è rotazionale o irrotazionale.

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 10y^2 A^{-\frac{3}{2}} - 10A^{-\frac{1}{2}} + 10A^{-\frac{3}{2}}x^2 - 10A^{-\frac{1}{2}} = -20A^{-\frac{1}{2}} + 10A^{-\frac{3}{2}}(x^2 + y^2) = \\ &= -20A^{-\frac{1}{2}} + 10A^{-\frac{1}{2}} = -10A^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Quindi il campo è rotazionale.

Calcoliamo adesso il modulo della velocità e la velocità dei punti lungo gli assi x e y.
Il modulo è:

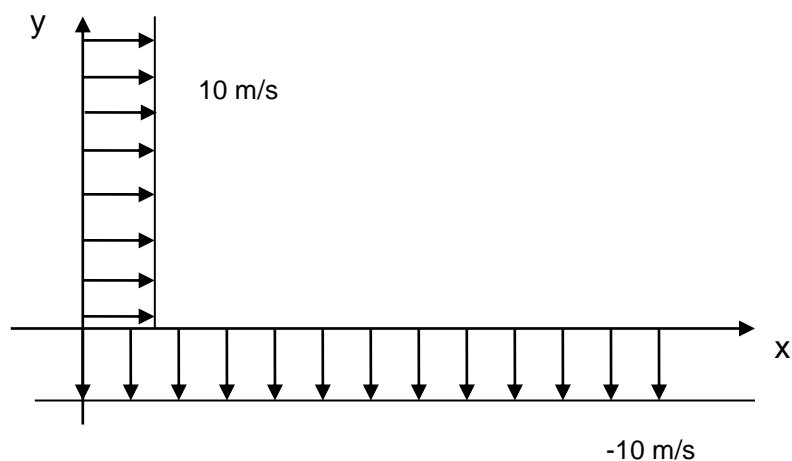
$$|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{A^{-1}} \sqrt{100y^2 + 100x^2} = 10\sqrt{A^{-1}} \sqrt{A} = 10 \text{ m/s}$$

Lungo l'asse x, cioè per $y = 0$, si ha:

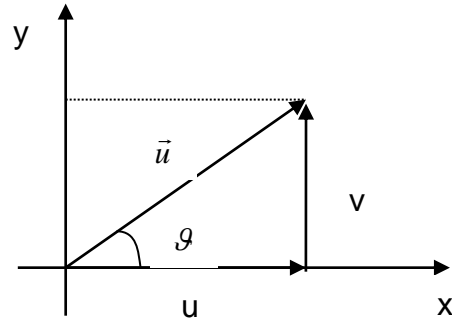
$$u = -\frac{10x}{x} = -10\vec{j} \text{ m/s}$$

Analogamente lungo l'asse y, cioè per $x = 0$, si può scrivere:

$$v = \frac{10y}{y} = 10\vec{i} \text{ m/s}$$



Determiniamo ora l'angolo ϑ che c'è tra il vettore velocità e l'asse x nei punti $(x,y) = (5;0)$, $(5;5)$ e $(0;5)$.



$$u = |\vec{u}| \cos \vartheta$$

$$v = |\vec{u}| \sin \vartheta$$

$$v = u \cdot \operatorname{tg} \vartheta \Rightarrow \operatorname{tg} \vartheta = \frac{v}{u} \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$$

Per il punto di coordinate $(5;0)$ si ha:

$$\frac{v}{u} = -\infty \Rightarrow \vartheta = \frac{3}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$$

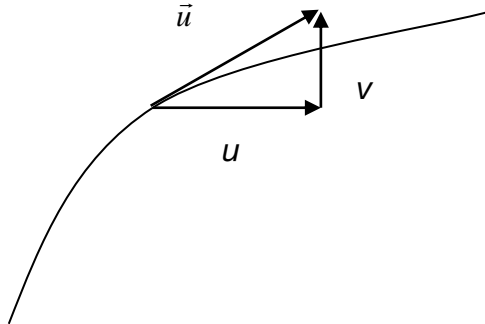
Per il punto di coordinate $(5;5)$ si ha:

$$\vec{u} = \frac{50}{5\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{50}{5\sqrt{2}} \vec{j}$$

$$\begin{cases} u = \frac{10}{\sqrt{2}} \\ v = -\frac{10}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\frac{v}{u} = -1 \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg}(-1) \Rightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{4}$$

Determiniamo ora l'equazione delle linee di corrente.



Le linee di corrente sono tangenti alle velocità quindi:

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} = -\frac{10xA^{-\frac{1}{2}}}{10yA^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{y}$$

Allora:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y \cdot dy = -x \cdot dx$$

Integrando:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c^2$$

Pertanto l'equazione delle funzioni di corrente è una circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot c^2$$

Es. 2.3

Un campo di velocità è dato da

$$\vec{u} = \frac{V_0}{l}(x\vec{i} - y\vec{j})$$

Con V_0 ed l costanti. In quale posizione del campo il modulo della velocità è V_0 ? Diagrammare la velocità nel I e II quadrante usando delle frecce per rappresentare la velocità del fluido in alcune posizioni, e individuare di che tipo di flusso si tratta. Inoltre:

- Verificare che il campo è irrotazionale
- Verificare che il campo è solenoidale.
- Determinare la funzione di corrente e disegnare le linee di corrente
- Determinare il potenziale scalare e disegnare le linee equipotenziali
- Dimostrare che linee equipotenziali e linee di corrente sono perpendicolari tra loro.

Soluzione Es. 2.3

Il modulo della velocità è:

$$|\vec{u}| = \frac{V_0}{l}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Esso è pari a V_0 quando

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l$$

Quindi il modulo della velocità è V_0 su una circonferenza di raggio l (vedi figura):

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Inoltre è facilmente verificabile che il campo è irrotazionale e solenoidale, infatti:

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \text{campo irrotazionale}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \text{campo solenoidale}$$

Troviamo ora le linee di corrente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

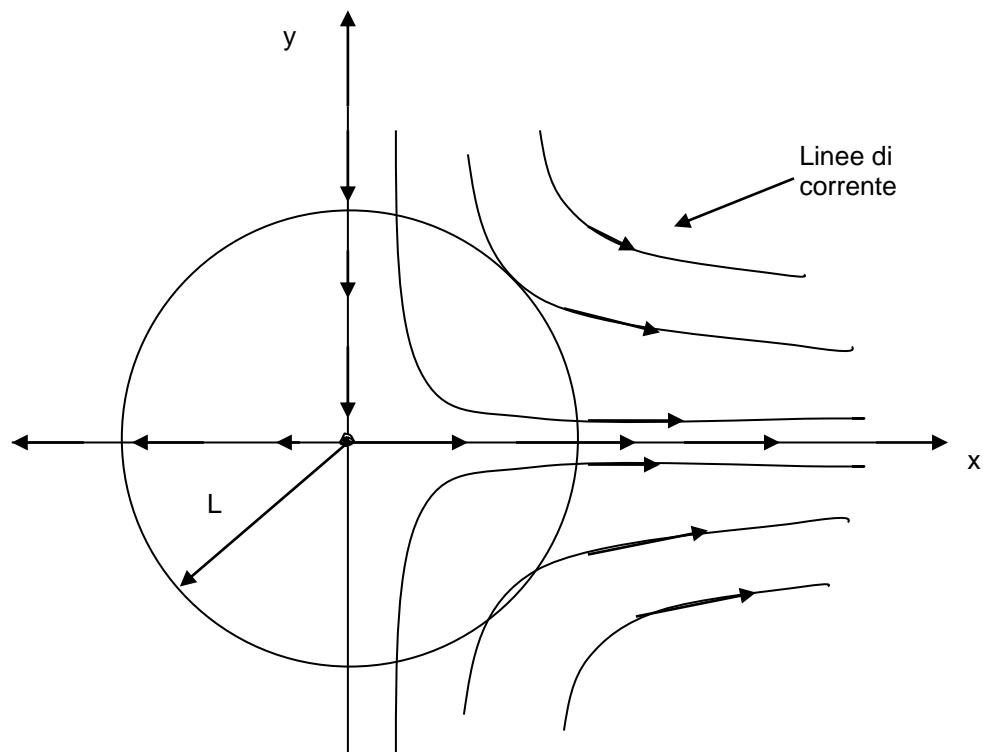
$$\log y = -\log x + c$$

$$\log y + \log x = c$$

$$\log xy = c$$

$$xy = e^c = c_1$$

$$xy = c_1 \Rightarrow \text{iperbole}$$



Posso introdurre il potenziale scalare φ , infatti:

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

Esso sar\`a:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^x u dx + \int_0^y v dy = \int_0^x x dx - \int_0^y y dy = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Per dimostrare che le linee equipotenziali e le linee di corrente sono ortogonali tra loro, si può imporre:

$$\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi = 0$$

cioè

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0$$

con

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial y} xy = y - x$$

Quindi:

$$(x\vec{i} - y\vec{j}) \cdot (y\vec{i} - x\vec{j}) = xy - xy = 0$$

Pertanto sono ortogonali.

Es. 2.4

Il gas di uscita da un motore a reazione di un aereo si trova a temperatura T funzione della quota z e del tempo t . Fissata la quota, la temperatura aumenta con legge:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -c_1 \quad \text{con} \quad c_1 < 0$$

Al crescere della quota la temperatura diminuisce con legge:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -c_2 \quad \text{con} \quad c_2 > 0$$

Determinare la velocità verticale dell'aereo affinché la temperatura si mantenga costante.

Soluzione Es. 2.4

Determino sulla verticale

$$T[z(t), t]$$

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$-c_1 + u(-c_2) = 0$$

$$u = -\frac{c_1}{c_2}$$

poiché $c_1 < 0$ $u > 0$

Quindi dovrò salire con velocità pari a:

$$|\vec{u}| = \left| \frac{c_1}{c_2} \right|$$

Soluzione Es. 2.18

$$1. \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$11. \quad (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \hat{e}_i$$

$$2. \quad \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T = u_k \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

$$12. \quad \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k}$$

$$3. \quad \bar{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial x_k} \hat{e}_k$$

$$13. \quad \bar{\nabla} \otimes \bar{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_k$$

$$4. \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2}$$

$$14. \quad \delta_{ii} = 3$$

$$5. \quad \bar{\nabla} T \cdot \bar{n} = \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k$$

$$15. \quad \delta_{ik} \delta_{ik} = \delta_{ii} = 3$$

$$6. \quad \bar{P} \bar{I} = P \delta_{ik}$$

$$16. \quad \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 + 2\varepsilon_{23}^2$$

$$7. \quad (\bar{\nabla} \cdot \bar{T}) \cdot \bar{u} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} u_k$$

$$17. \quad \varepsilon_{ik} \delta_{ik} = \varepsilon_{ii}$$

$$8. \quad \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

$$18. \quad \varepsilon_{ik} \delta_{kl} = \varepsilon_{il}$$

$$9. \quad \bar{u} \otimes \bar{u} = u_i u_k \hat{e}_i \hat{e}_k$$

$$19. \quad \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} \delta_{ik} \delta_{lm} = \varepsilon_{ii}^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2$$

$$10. \quad \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) = \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} \hat{e}_i$$

$$20. \quad \varepsilon_{ik} \Omega_{ik} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$