

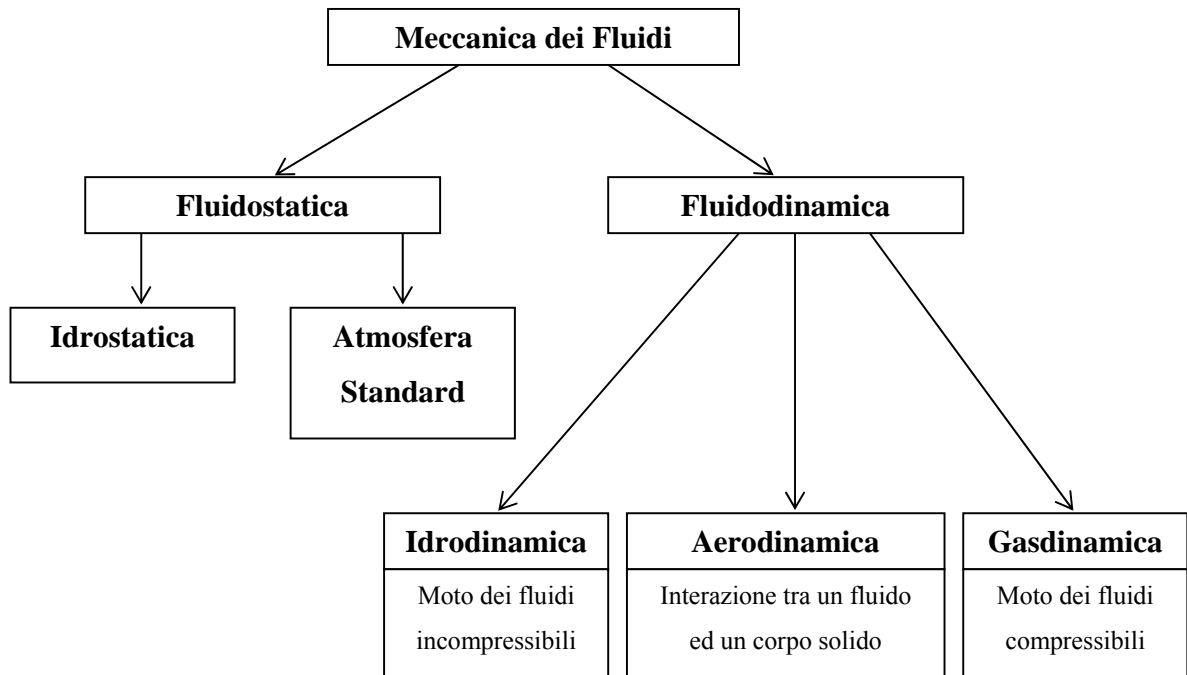
Capitolo 1

Introduzione

La fluidodinamica è la disciplina che studia il comportamento cinematico, dinamico e termodinamico dei fluidi, cioè dei liquidi e dei gas. Ovviamente questo campo della Meccanica si occupa di molteplici classi di problemi che vanno: dalla portanza e resistenza dei profili alari alla spinta e coppia dei rotori ed eliche per propulsione e conversione di energia; dal moto del sangue nei capillari ai problemi di trasporto nelle reti di distribuzione di oleodotti, gasdotti e acquedotti; dal volo e la propulsione dei micro-organismi e di farfalle alla aerodinamica dei mezzi di trasporto terrestri, navali od aerei subsonici e supersonici; dai problemi di propagazione delle onde superficiali (onde marine) a quelli di generazione e propagazione delle onde di pressione (acustica ed aeroacustica); dai cicloni per la separazione di componenti di miscele alla generazione e movimento di cicloni atmosferici in applicazioni di geofisica terrestre

E' anche interessante osservare che la fluidodinamica dà la giustificazione teorica e sperimentale dei motivi per cui una palla da ping-pong è liscia, quelle da tennis e da golf sono rugose, quella da baseball presenta delle cuciture, mentre le superfici di un veicolo (autovettura) o di un velivolo (aereo) sono nuovamente lisce.

Parte delle risposte ai quesiti ed alle problematiche sopra presentate e a numerose altre, saranno fornite, mi auguro, dal contenuto di questo corso di Fluidodinamica.



1.1 Informazioni storiche

- 287 a.C.-212 a.C. **Archimede**. Idrostatica e galleggiamento
- 40 d.C.-103 d.C. **Sextus Julius Frontinus**. Sistemi di trasporto dell'acqua (acquedotto)
- 1452-1515 **Leonardo da Vinci**. Fenomeni idrodinamici
- 1564-1640 **Galileo Galilei**. Meccanica ed idraulica sperimentale
- 1687-1727 **Isaac Newton**. II° libro dei "principia" dedicati alla fluidodinamica. Applicazioni navali
- 1700-1782 **Daniel Bernoulli**. Il padre dell'idrodinamica. Applicazioni sperimentali
- 1717-1783 **Jean Le Roland d'Alembert**. Critica all'impostazione di Newton mediante alcuni esperimenti
- 1707-1783 **Leonard Euler**. Dimostrò l'inconsistenza fisica del modello di Newton ed introdusse un collegamento tra resistenza all'avanzamento di navi e tensioni tangenziali e pressione normale
- 1785-1836 **J. Luis Poiseuille**. Flussi in tubi capillari. Soluzioni analitiche ed esperimenti
- 1810-1879 **William Froude**. Problemi di scalatura dei risultati ottenuti su modelli per applicazioni al vero (navi)
- 1819-1903 **G. Gabriel Stokes**. Formulazioni analitiche di flussi viscosi (in particolare per sfere)
- 1838-1916 **Ernst Mach**. Aerodinamica supersonica
- 1842-1912 **Osborne Reynolds**. Impostazione di alcuni gruppi adimensionali nei flussi viscosi in tubi, fiumi ecc.. Transizione alla turbolenza
- 1842-1919 **J.W. Strutt Rayleigh**. Interazione tra bolle, moto di onde, instabilità di getti
- 1850-1922 **Vincenz Strouhal**. Corde vibranti
- 1867-1940 **Edgard Buckingham**. Sistemazione dell'analisi dimensionale
- 1875-1953 **Ludwig Prandtl**. Strato limite. è il fondatore della attuale fluidodinamica
- 1881-1963 **Theodore Von-Karman**. Fenomeni di scia, transizione alla turbolenza
- 1883-1970 **P. R. Heinrich Blasius**. Soluzione analitica dello strato limite, correlazione tra la resistenza nei tubi ed il numero di Reynolds

1.2 Concetto di mezzo continuo (solidi, liquidi e gas)

Bisogna premettere che lo studio della fluidodinamica riguarda sia liquidi che gas, in quanto entrambi presentano le caratteristiche di una elevata deformabilità. Mentre una porzione di solido ha una forma ben definita, una porzione di fluido non ha una forma ben definita e gli elementi di fluido si possono risistemare in uno spazio senza che cambino significativamente le proprietà macroscopiche del sistema. Le frontiere fra solido e fluido non sono comunque ben definite.

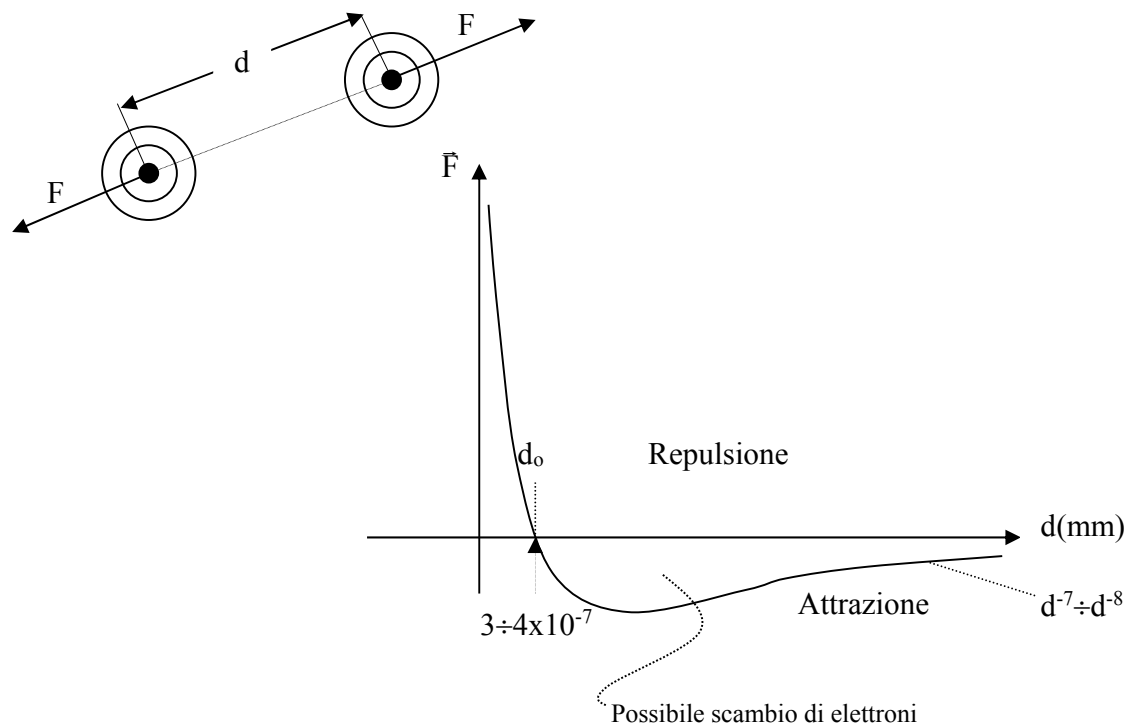
SOLIDO \Rightarrow Forze piccole \Rightarrow Deformazioni piccole

Nel caso dei solidi, c'è quindi "proporzionalità" fra le forze applicate e le deformazioni ottenute. Per i fluidi, il comportamento è molto diverso:

FLUIDO \Rightarrow Forze piccole \Rightarrow Deformazioni infinite (molto grandi)

Con il vincolo che il volume rimanga inalterato per i liquidi. In qualche modo c'è proporzionalità tra le forze applicate e la velocità di deformazione.

Il comportamento macroscopico della materia dipende dalla struttura molecolare:



La distanza media tra molecole per sostanze composte di molecole semplici in fase gassosa ed in condizioni normali di temperatura e pressione è di circa $10d_0$. Se le molecole interagiscono molto raramente, nella teoria cinetica dei gas si usa dire che il gas è perfetto. In tale caso, infatti le molecole interagiscono solo durante collisioni eccezionali.

	<i>Forze</i>	<i>Libero cammino Medio/d_0</i>	<i>Organizzazione molecolare</i>
Solidi	Elevate	$\ll 1$	Ordinata
Liquidi	Medie	$o(1)$	Parzialmente Ordinata
Gas	Deboli	$\gg 1$	Disordinata

Nella materia, in condizioni normali, le molecole sono comunque molto distanziate. Tuttavia, il loro numero in volumi anche piccoli (particelle di fluido) è talmente elevato che si può accettare per la maggior parte degli studi e delle condizioni l'ipotesi di **mezzo continuo**. Cioè le dimensioni fisiche del volume di misura (e.g. una sonda nel caso di analisi sperimentale o la cella di calcolo in una simulazione numerica) sono talmente grandi che si possono valutare essenzialmente solo quantità medie sul volume sensibile.

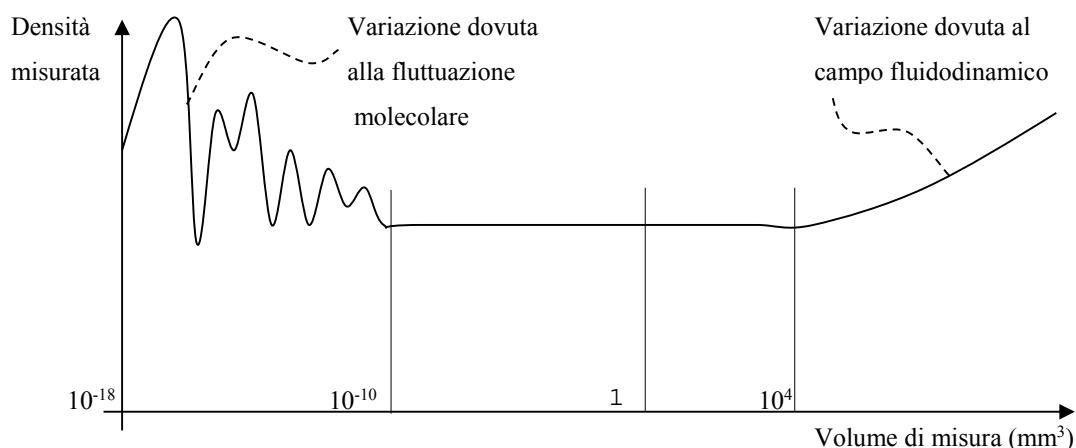


Figura 1.1 Effetto della dimensione del volume sensibile sulla densità misurata da uno strumento

Come si vede dalla Figura 1.1, le fluttuazioni molecolari cominciano a percepirsi per un volume sensibile al massimo dell'ordine di $10^{-10} - 10^{-14}$ mm³. Si pensi che in un mm³ di fluido ci sono circa 10^{18} molecole, per i gas, e 10^{21} per i liquidi. Pertanto, l'ipotesi di mezzo continuo ci consente di definire proprietà e comportamenti macroscopici che prescindono dalla natura della struttura particellare (i.e. molecolare). Ciò consente inoltre di trattare insieme liquidi e gas, anche se dal punto di vista molecolare essi presentano strutture assai diverse.

1.3 Grandezze e parametri che caratterizzano un fluido (Richiami di termodinamica)

Premettiamo che nel seguito utilizzeremo solo il sistema internazionale (SI) o MKS, Metro, Kilogrammo, Secondo rispettivamente per lunghezze, massa e tempo che rappresentano le grandezze fondamentali della fluidodinamica.

1.3.1 Unità di misura

Oltre alla descrizione qualitativa delle varie grandezze, è in genere necessario disporre di una misura quantitativa di ciascuna di esse. Bisogna a tal fine definire le unità di misura scelte. Tra i diversi sistemi di misura, ricordiamo il Sistema Internazionale (SI) in cui l'unità di lunghezza è il metro, quella del tempo il secondo, quella della massa il chilogrammo e quella della temperatura il grado Kelvin. La scala della temperatura in Kelvin è collegata a quella Celsius (centigrada) dalla relazione:

$$K = ^\circ C + 273.15$$

L'unità di forza, chiamata Newton (N), è definita in base alla seconda legge di Newton:

$$1N = (1\text{ kg}) \left(1 \frac{m}{s^2} \right)$$

quindi la forza di $1N$ agente sulla massa di $1kg$ imprime a questa massa l'accelerazione di 1 m/s^2 . Il valore dell'accelerazione di gravità è $g=9.81\text{ m/s}^2$. Perciò $1Kg$ massa pesa $9.81N$ nel campo di gravità normale.

L'unità di Lavoro nel SI è il Joule (J) che corrisponde al lavoro fatto per spostare di $1m$ il punto di applicazione della forza di $1N$ nella direzione della forza:

$$1J = 1\text{ N m}$$

L'unità della Potenza è il Watt (W) definito come lavoro di $1J$ per secondo:

$$1W = 1 \frac{J}{s} = 1 \frac{N\text{ m}}{s}$$

quindi la potenza di $1W$ è quella necessaria per spostare il punto di applicazione della forza di $1N$ con la velocità di $1m/s$.

La pressione si misura in Pascal (Pa) essendo:

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2} \cong 10^{-5}\text{ atm}$$

1.3.2 Leggi di governo, parametri e grandezze di riferimento

La fluidodinamica utilizza le stesse leggi fondamentali incontrate nello studio della fisica e della meccanica: le leggi del moto di Newton, il principio di conservazione della massa, il primo ed il secondo principio della termodinamica. Pertanto, vi sono molti aspetti in comune con la meccanica del corpo rigido e del corpo deformabile.

La meccanica dei fluidi può essere suddivisa in **fluidostatica**, che analizza il comportamento di un fluido in quiete, ed in **fluidodinamica**, che studia il moto di un fluido.

Prima di affrontare lo studio di questi argomenti, è necessario definire alcune proprietà del fluido necessarie a caratterizzarne il comportamento. È infatti ovvio che dei fluidi diversi possano avere delle caratteristiche di comportamento differenti.

1) Densità

Un parametro molto importante è ovviamente la densità ρ definita come $\rho = m/v$ e dimensionalmente $[\rho] = [Kg/m^3]$. Essa può dipendere sia dalla pressione che dalla temperatura. Si definisce in generale sensibilità di una quantità (ad esempio la densità ρ) rispetto ad un'altra (ad esempio la pressione) la derivata parziale della prima rispetto all'altra.

Sensibilità della densità alla pressione

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \rho,$$

essendo α il coefficiente di comprimibilità. Alla temperatura di $T=15^\circ C$ si ha

-Per i liquidi (acqua) $\alpha = 0.49 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/N (\cong 0.49 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1})$

-Per l'aria $\alpha = 0.987 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/N (\cong 0.987 \text{ atm}^{-1})$

I liquidi sono poco comprimibili mentre i gas (e l'aria in particolare) sono molto comprimibili.

Sensibilità della densità alla temperatura

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\beta \rho,$$

essendo β il coefficiente di espansione termica. Alla temperatura di $T=15^\circ C$ si ha

- Per i liquidi (acqua) $\beta = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$
- Per l'aria $\beta = 0.348 \cdot 10^{-2} \text{ 1/K}$

La densità dei gas è quindi più sensibile alle variazioni di temperatura di quella dei liquidi.

Sensibilità per Gas perfetti

Per i gas perfetti, vale l'equazione di stato:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

da cui:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P = -\frac{P}{RT^2} = -\frac{\rho}{T} \Rightarrow \beta = \frac{1}{T}$$

con T espressa in gradi Kelvin. Analogamente si ha:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T = \frac{1}{RT} = \frac{\gamma}{\gamma RT} = \frac{\gamma}{c^2} = \alpha \rho \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{\rho c^2} = \frac{1}{\rho RT}$$

essendo c la *velocità del suono* e $\gamma=c_p/c_v$ il rapporto tra calori specifici.

Per i gas perfetti alla temperatura di $15^\circ\text{C}=288\text{ K}$ si ha quindi:

$$\beta = \frac{1}{288} = 0.003472 \frac{1}{\text{K}} \text{ (dal [Batchelor 1988], si ha } \beta=0.00348 \text{ 1/K, errore } \cong 0.23\%)$$

$$\alpha = \frac{1}{1.22 \times 287 \times 288} = 0.99210^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \text{ (dal [Batchelor 1988], si ha } \alpha=0.987 \text{ m}^2/\text{N, errore } \cong 0.5\%).$$

Poichè nei problemi fluidodinamici la velocità varia significativamente e con essa la pressione, ne consegue che la densità può essere fortemente variabile nella gasdinamica (o aerodinamica) ma ciò non avviene nell'idrodinamica. Pertanto nei gas è particolarmente importante l'equazione di stato che, indipendentemente dal moto, lega tre grandezze termodinamiche. Ad esempio, con ρ , P e T :

$$\rho = \rho(P, T)$$

Per i gas perfetti, quale è l'aria, in condizioni ambiente, vale la relazione:

$$P = \rho RT \quad \text{con} \quad R = c_p - c_v = 286.9 \frac{\text{J}}{\text{K Kg}}$$

Essendo $R = 286.9 \frac{\text{J}}{\text{K Kg}}$ un valore specifico per l'aria.

Infatti, indicando con R_u la costante universale dei gas (pari a $8.314 \text{ J}/\mathcal{M} \text{ K}$ dove \mathcal{M} rappresenta il numero di moli) e tenendo conto che la massa molecolare dell'aria è $28.8 \text{ grammi su moli}$, si ottiene che la costante R per l'aria è:

$$R = \frac{R_u}{\text{massa molecolare}} = \frac{8.314}{28.8 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{J}}{\text{K Kg}} \cong 287 \frac{\text{J}}{\text{K Kg}}$$

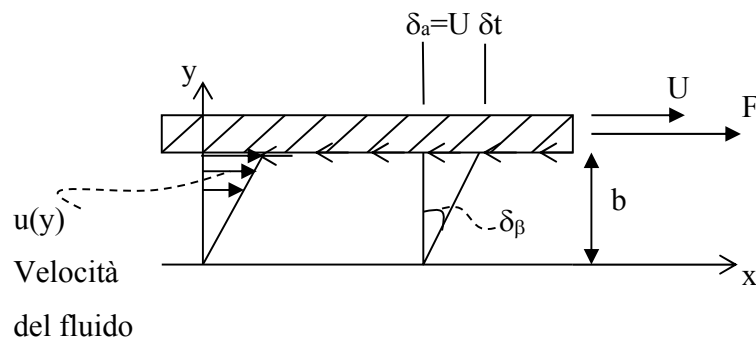
Oppure, introducendo il *volume specifico* $v=1/\rho$ l'equazione di stato risulta:

$$Pv = RT$$

2) Coefficiente di viscosità

Il coefficiente di viscosità dinamica μ è una proprietà che quantifica la resistenza dei fluidi allo scorrimento, quindi la *coesione interna* di un fluido. La definizione rigorosa verrà fornita nell'ambito della trattazione delle relazioni costitutive, per ora accenniamo solo a proprietà di carattere generale.

Consideriamo un semplice esperimento in cui un fluido è inserito in un meato di dimensione b compreso tra una superficie fissa (in basso) ed una lastra piana di superficie A (in alto) che viene spostata da una forza F in direzione parallela alla superficie stessa.



La lastra si sposta con velocità U e quindi lo spostamento δ_a , e conseguentemente l'angolo δ_β , cresce con il tempo, essendo:

$$\delta_a = U \delta t$$

Per un intervallo di tempo infinitesimo δt , confondendo la tangente con l'angolo, si ottiene:

$$\delta_\beta = \frac{\delta_a}{b} = \frac{U \delta t}{b}$$

Si definisce allora la velocità di variazione di δ_β :

$$\gamma = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta_\beta}{\delta t} = \frac{U \delta t}{b \delta t} = \frac{du}{dy}$$

Newton ha mostrato che per i fluidi tale velocità è proporzionale allo sforzo $\tau = F/A$ e quindi:

$$\tau \propto \gamma \Rightarrow \tau \propto \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

La costante di proporzionalità tra τ e $\frac{du}{dy}$ è proprio il coefficiente di viscosità del fluido μ . Il valore della viscosità dipende dal fluido considerato e varia fortemente con la temperatura. I fluidi per cui vale la 1.1 sono detti fluidi Newtoniani. I fluidi più comuni sono di questo tipo ma alcuni fluidi importanti (quali sangue, vernici, polimeri ecc..) non seguono una relazione lineare tra velocità di deformazione e tensione, e sono pertanto indicati come fluidi non Newtoniani. Maggiori dettagli verranno dati nel seguito nella trattazione delle relazioni costitutive (paragrafo 2.10).

Dalla 1.1 si deduce che le dimensioni della viscosità sono $F \cdot T \cdot L^{-2}$. Nel sistema *SI* la viscosità si misura quindi in $\frac{N \cdot s}{m^2}$.

Spesso nei problemi di fluidodinamica, la viscosità viene combinata con la densità nella forma:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Questo rapporto è chiamato *viscosità cinematica* e la sua unità di misura nel sistema *SI* è $\frac{m^2}{s}$.

Nella tabella seguente vengono riportati i valori della viscosità per alcuni fluidi caratteristici:

Fluido	Temperatura (°C)	μ (N s/m ²)	ν (m ² / s)
Acqua	20	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Acqua	100	$2.82 \cdot 10^{-4}$	$2.94 \cdot 10^{-7}$
Aria	15	$1.79 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-5}$
Aria	100	$2.17 \cdot 10^{-5}$	$2.29 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	20	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.15 \cdot 10^{-7}$
Olio SAE 30	20	0.38	$4.2 \cdot 10^{-4}$
Glicerina	20	1.5	$1.19 \cdot 10^{-3}$

Si può notare la notevole variazione dei valori di viscosità dei vari fluidi ed anche la forte dipendenza dalla temperatura. In particolare, nei liquidi la viscosità diminuisce all'aumentare della temperatura, mentre nei gas un aumento della temperatura produce un aumento della viscosità. La dipendenza della viscosità dalla pressione è invece molto più debole, per cui viene

di solito trascurata. L'effetto della temperatura sulla viscosità può essere bene approssimato mediante due formule empiriche.

Per i gas si utilizza l'equazione detta di Sutherland:

$$\mu = \frac{C \cdot T^{\frac{3}{2}}}{T + S}$$

in cui C e S sono due costanti empiriche e T è la temperatura assoluta.

Per i liquidi, la relazione empirica è la seguente (detta spesso relazione di Andrade):

$$\mu = D \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

con D e B due costanti empiriche.

Le costanti C , S e D , B possono essere calcolate se si conoscono i valori della viscosità a due diverse temperature.

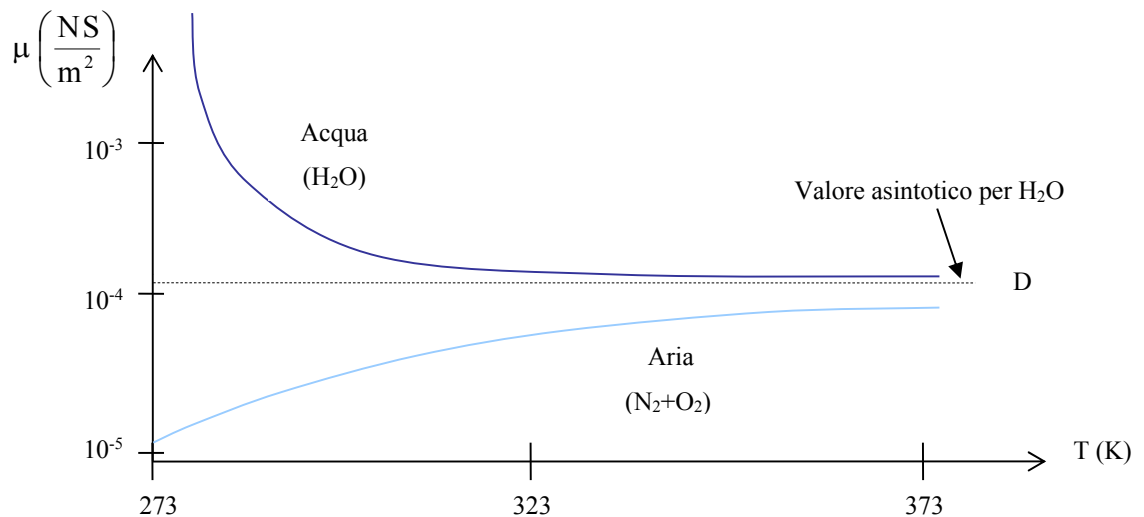


Figura 1.2 Andamento della temperatura al variare della temperatura per aria e acqua

1.3.3 Richiami di termodinamica e processi isentropici di gas perfetti

Ricordiamo il I° principio della termodinamica:

$$dU = \delta Q - Pd v \Rightarrow \delta Q = dU + Pd v$$

con U = Energia Interna, δQ = Calore ceduto al sistema (fluido) e $Pd v$ = Lavoro compiuto sul sistema. Ricordiamo anche la definizione di entalpia:

$$h = U + P v$$

Per il II° principio della termodinamica (definizione di entropia) si ha che: per una trasformazione reversibile da uno stato di equilibrio ad un altro, la variazione di entropia S è proporzionale alla quantità di calore ceduta al sistema (fluido) e la costante di proporzionalità è $1/T$, pertanto:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow T dS = \delta Q$$

In condizioni adiabatiche $\delta Q=0$, quindi $T dS=0$, e cioè:

$$S_f = S_i$$

essendo i pedici f e i rispettivamente relativi al punto finale ed iniziale e la trasformazione essendo reversibile.

Combinando I° e II° principio della termodinamica si ha:

$$\delta Q = T dS \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dv$$

dall'equazione di stato per gas termicamente perfetti $Pv=RT$:

$$\frac{P}{T} = \frac{R}{v} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + R \frac{dv}{v}$$

ricordando che per gas più che perfetti o caloricamente perfetti ($c_v=cost$ e $c_p=cost$) i calori specifici a pressione e volume costanti sono dati da:

$$\left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_v = \frac{dU}{dT} = c_v \quad \text{e} \quad \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_p = \frac{dh}{dT} = c_p$$

si ha

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}.$$

Integrando tra i due stati i e f si ottiene:

$$c_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + R \ln\left(\frac{v_f}{v_i}\right) = S_f - S_i = 0$$

ma $R=c_p - c_v = c_v (\gamma - 1)$, con $\gamma = c_p / c_v$, e quindi:

$$c_v \ln \frac{T_f}{T_i} \left(\frac{\rho_i}{\rho_f}\right)^{\gamma-1} = 0$$

da cui:

$$\frac{T_f}{T_i} \left(\frac{\rho_i}{\rho_f} \right)^{\gamma-1} = 1$$

e quindi:

$$\frac{T_f}{\rho_f^{\gamma-1}} = \frac{T_i}{\rho_i^{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \mathbf{cost}} \quad (1.2.a)$$

Dall'equazione di stato si ha:

$$T = \frac{P}{R\rho}$$

si ottiene inoltre:

$$\frac{P_f}{P_i} \left(\frac{\rho_i}{\rho_f} \right)^{\gamma} = 1$$

e quindi:

$$\frac{P_f}{\rho_f^{\gamma}} = \frac{P_i}{\rho_i^{\gamma}} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \mathbf{cost}} \quad (1.2.b)$$

La legge data nell'equazione (1.2.b) è estremamente importante in quanto collega per processi adiabatici reversibili, la pressione P con la densità ρ .

E infine:

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{T(RT)^{\gamma-1}}{P^{\gamma-1}} = \frac{R^{\gamma-1}T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \mathbf{cost}} \quad (1.2.c)$$

oppure

$$\frac{T_f^{\gamma}}{P_f^{\gamma-1}} = \frac{T_i^{\gamma}}{P_i^{\gamma-1}}$$

1.3.4 Velocità del suono

Si definisce *velocità del suono* c la velocità con cui si propagano le perturbazioni di pressione (si definirà meglio successivamente):

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$$

Poichè le perturbazioni sono piccole e si muovono velocemente, la velocità è calcolata ad entropia S costante e ricordando la prima delle 1.2 :

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial \rho} \left(\frac{P_i}{\rho_i^\gamma} \right)_S = \gamma \rho_i^{\gamma-1} \left(\frac{P_i}{\rho_i^\gamma} \right)_S = \gamma RT$$

essendo per l'aria $R = 286.9 \frac{J}{^\circ K Kg}$ e $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$. Pertanto, a $20^\circ C$ ($293 K$) la velocità del suono è $343 m/s$.

Il risultato $c = \sqrt{\gamma RT}$ è consistente con la circostanza che le onde acustiche si propagano a mezzo delle collisioni molecolari. Infatti, la velocità molecolare media c_m , data dalla teoria cinetica dei gas, è:

$$c_m = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}}$$

e la c risulta essere circa $3/4$ la velocità media molecolare c_m .

1.3.5 Variabili e parametri della fluidodinamica

Riassumendo quanto in parte abbiamo visto finora e quanto vedremo più compiutamente nel seguito, nello studio dei flussi sono presenti:

4 variabili indipendenti x, y, z, t (coordinate e tempo)

6 variabili dipendenti u, v, w, ρ, P, T di cui le ultime tre di carattere termodinamico e le prime tre le componenti di velocità

n parametri caratterizzanti il tipo di fluido (ad esempio il coefficiente di viscosità μ) o le forze di massa (e.g. la massa per l'accelerazione di gravità \vec{g}).

1.4 Fluidostatica

1.4.1 La pressione idrostatica

Consideriamo note le leggi dell'idrostatica. L'equazione di riferimento è la componente lungo z (coordinata verticale positiva verso l'alto) della legge di conservazione della quantità di moto in forma differenziale (si vedrà in dettaglio in seguito) quando le sole forze che agiscano siano quelle di pressione:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\gamma \quad (1.3)$$

Ora con γ indichiamo il peso specifico ρg . Nel caso dell'acqua, $\gamma = \text{cost.}$ per cui, integrando la (1.3) tra due quote z_1 e z_2 si ottiene la nota legge:

$$P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \Rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g h$$

avendo indicato con $h = z_2 - z_1$.

1.4.2 Atmosfera standard

Nel caso dell'aria γ non è costante perchè ρ varia con la quota. Abbiamo quindi bisogno di un'altra equazione. Utilizziamo l'equazione di stato dei gas perfetti, quale è l'aria:

$$\frac{P}{\rho} = RT$$

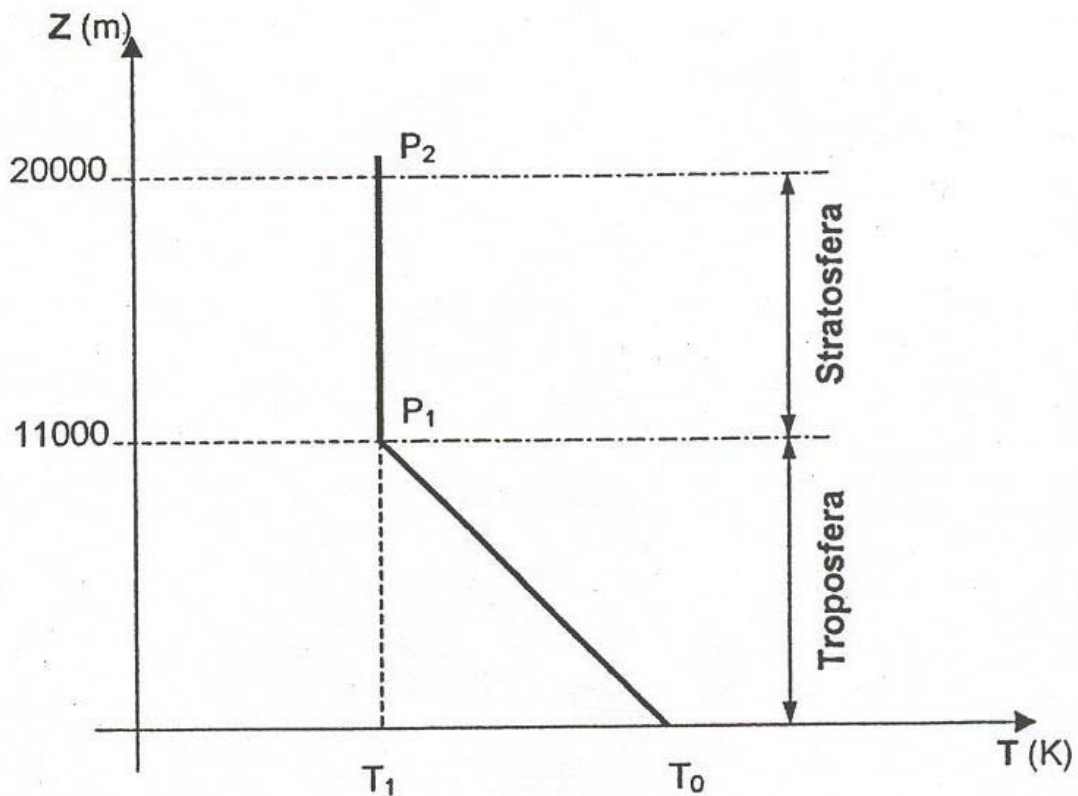
Ma così facendo si è introdotta un'altra incognita, la temperatura T . L'atmosfera standard consente di determinare, tramite delle relazioni empiriche, la dipendenza di T da z . In particolare, consideriamo le quote comprese tra $z=0$ (livello del mare) e $z=20000m$. In questa zona possiamo individuare 2 regioni nelle quali viene definita (ipotizzata) una legge $T(z)$:

La Troposfera per $0 \leq z \leq 11000m$ in cui $T(z) = T(0) - \alpha z$ con $\alpha = 0.0065 \text{ K/m}$ (andamento lineare)

La Stratosfera per $11000 < z \leq 20000m$ in cui $T(z) = \text{cost} = T(11000)$.

Nella prima regione (Troposfera) si ha quindi una diminuzione lineare della temperatura a partire dal valore al livello del mare, mentre nella stratosfera, la temperatura resta costante e pari al valore ottenuto in $z=11000$. Ricordiamo che al livello del mare convenzionalmente

$$T_0 = 288 \text{ K}, \quad P_0 = 101.33 \text{ kPa (1atm)}, \quad \rho_0 = 1.22 \text{ kg/m}^3.$$



Abbiamo indicato col pedice 0 le grandezze alla quota $z=0$, col pedice 1 alla quota $z=11000$ e col pedice 2 alla quota $z=20000$.

Andamento della pressione nella Troposfera

Usiamo l'equazione (1.3) e l'equazione di stato. Si ha:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{RT} g \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T}$$

differenziando la relazione $T=T_0-\alpha z$ si ottiene:

$$dT = -\alpha dz \rightarrow dz = -\frac{dT}{\alpha}$$

e quindi:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{R} \frac{1}{T} \left(-\frac{dT}{\alpha} \right) = \frac{g}{R\alpha} \frac{dT}{T}$$

integrando tra 0 e 1 si ottiene:

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{g}{R\alpha} \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

da cui:

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$$

Per una quota generica z nella Troposfera, si ha:

$$\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}} = \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$$

Andamento della pressione nella Stratosfera

Abbiamo ancora:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{RT} g \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T}$$

Stavolta $T=T_1=const$ per cui posso integrare direttamente tra 1 e 2:

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{g}{RT_1}(z_2 - z_1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{-\frac{g}{RT_1}(z_2 - z_1)}$$

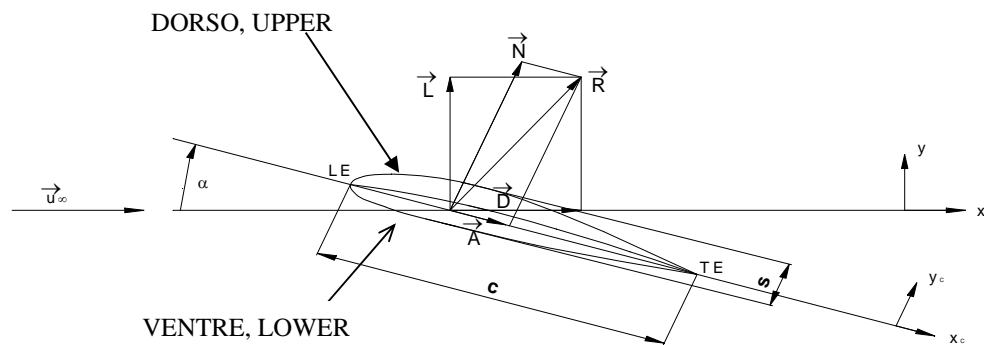
Per una quota generica nella Stratosfera:

$$\frac{P(z)}{P_1} = e^{-\frac{g}{RT_1}(z - z_1)}$$

1.5 Forze e momenti su corpi e profili aerodinamici

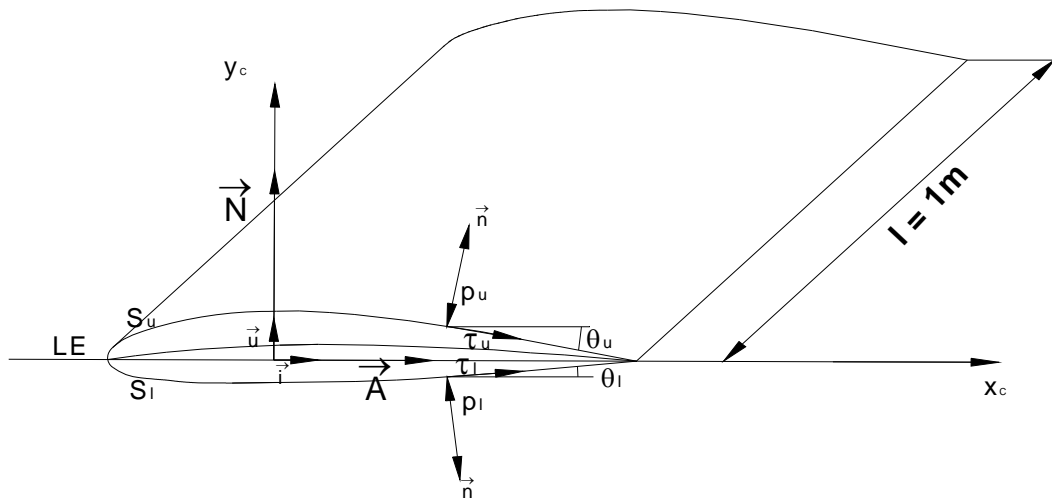
Ci proponiamo di valutare le forze che vengono scambiate tra fluido e corpi solidi (per ora considerati bidimensionali - 2D).

Consideriamo un profilo aerodinamico, cioè avente la forma indicata in figura:



dove si è utilizzata la seguente notazione:

- c = corda del profilo
- LE = Leading edge = bordo d'attacco
- TE = Trailing edge = bordo d'uscita
- s = spessore
- α = angolo d'incidenza
- \vec{U}_∞ = velocità indisturbata incidente sul profilo
- \vec{R} = risultante delle forze aerodinamiche
- \vec{N} e \vec{A} , rispettivamente forza normale e assiale, sono le forze componenti di \vec{R} nel sistema di riferimento (assi corpo) associato al profilo (assi x_c e y_c , $\vec{A} \parallel \vec{x}_c$ e $\vec{N} \parallel \vec{y}_c$)
- \vec{L} e \vec{D} , rispettivamente Portanza e Resistenza, sono le componenti di \vec{R} nel sistema di riferimento (assi vento) associato a \vec{U}_∞ (cioè tale che $\vec{L} \perp \vec{U}_\infty$ e $\vec{D} \parallel \vec{U}_\infty$)



Nel disegno si sono indicati gli sforzi di taglio e le pressioni agenti sul profilo.

S_l e S_u indicano rispettivamente la superficie inferiore (*lower*) e superiore (*upper*) del profilo; \vec{n} rappresenta il versore della normale uscente dal profilo.

Esplicitiamo gli elementi di forza in termini di P e τ .

$$d\vec{N}_u = [-P_u dS_u \cos\theta_u - \tau_u dS_u \sin\theta_u] \vec{j}$$

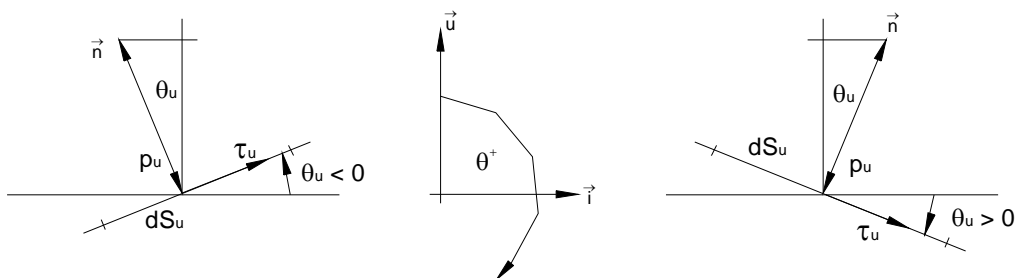
$$d\vec{N}_l = [P_l dS_l \cos\theta_l - \tau_l dS_l \sin\theta_l] \vec{j}$$

$$d\vec{A}_u = [-P_u dS_u \sin\theta_u + \tau_u dS_u \cos\theta_u] \vec{i}$$

$$d\vec{A}_l = [P_l dS_l \sin\theta_l + \tau_l dS_l \cos\theta_l] \vec{i}$$

dove

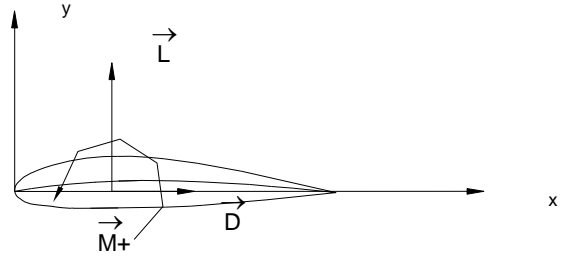
- P e τ sono la pressione e la tensione tangenziale alla parete
- i pedici u (*upper*) e l (*lower*) indicano rispettivamente il dorso ed il ventre del profilo
- θ rappresenta l'angolo tra la tangente locale alla superficie del profilo e l'asse x_c (preso positivo se orario rispetto a questo).



$$d\vec{N}_{tot} = d\vec{N}_u + d\vec{N}_l$$

$$d\vec{A}_{tot} = d\vec{A}_u + d\vec{A}_l$$

$$\vec{N}_{tot} = \int_{LE}^{TE} d\vec{N}_{tot} \quad \text{e} \quad \vec{A}_{tot} = \int_{LE}^{TE} d\vec{A}_{tot}$$



Si noti che

$$N = \int_L^T dN = \int_L^T -P_u \cos \theta_u dS_u + \int_L^T P_l \cos \theta_l dS_l - \int_L^T \tau_u \sin \theta_u dS_u - \int_L^T \tau_l \sin \theta_l dS_l =$$

$$\int_L^T [P_l(x) - P_u(x)] dx - \int_L^T \tau_u \sin \theta_u dS_u - \int_L^T \tau_l \sin \theta_l dS_l$$

ma $P = o(q_\infty)$ con $q_\infty = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$ e $\tau = o(\varepsilon q_\infty) \ll q_\infty$, $\cos \theta = o(1)$ e $\sin \theta = o(\varepsilon)$, quindi,

essendo inoltre $dS_u \cos \theta_u = dx$ e $dS_l \cos \theta_l = dx$, si ha che:

$$N = \int_L^T [P_l(x) - P_u(x)] dx = o(F) = o(q_\infty S)$$

Analogamente si può dimostrare che A è dell'ordine di $o(\varepsilon F) = o(\varepsilon q_\infty S)$.

$$A = \int_L^T dA = \int_L^T -P_u \sin \theta_u dS_u + \int_L^T P_l \sin \theta_l dS_l + \int_L^T \tau_u \cos \theta_u dS_u + \int_L^T \tau_l \cos \theta_l dS_l = q_\infty \varepsilon + \varepsilon q_\infty$$

quindi nel calcolo di A intervengono sia P che τ , le P danno le resistenze di forma e le τ la resistenza d'attrito e sono dello stesso ordine di grandezza.

La portanza \vec{L} e la resistenza \vec{D} aerodinamiche, sono definite come:

$$|\vec{L}| = |\vec{N}_{tot}| \cos \alpha - |\vec{A}_{tot}| \sin \alpha \Rightarrow \text{portanza}$$

$$|\vec{D}| = |\vec{N}_{tot}| \sin \alpha + |\vec{A}_{tot}| \cos \alpha \Rightarrow \text{resistenza}$$

Andando ad effettuare considerazioni sugli ordini di grandezza, e chiamando con F il modulo della forza risultante, si ha che:

$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha \cong N \cos \alpha = o(F)$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha = o(\varepsilon F)$$

Poiché L deve equilibrare il peso dell'aereo (diviso per l'apertura dell'ala) e la D deve essere equilibrata dalla spinta dei propulsori, si evince che i propulsori devono spingere circa (0.01-0.1) volte il peso, tranne che nei velivoli a decollo verticale.

I momenti sono positivi se picchianti:

$$M_{LE} = - \int_{LE}^{TE} [(P_u \cos \theta_u + \tau_u \sin \theta_u)x - (P_u \sin \theta_u - \tau_u \cos \theta_u)y] dS_u - \\ - \int_{LE}^{TE} [(-P_l \cos \theta_l + \tau_l \sin \theta_l)x - (P_l \sin \theta_l + \tau_l \cos \theta_l)y] dS_l$$

Prendendo come riferimento la pressione dinamica $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$ e la superficie di una striscia unitaria S , i coefficienti di forza (portanza e resistenza) e momento, sono definiti come segue:

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S} \quad c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S} \quad c_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c S}$$

Si possono definire anche i coefficienti di pressione e d'attrito:

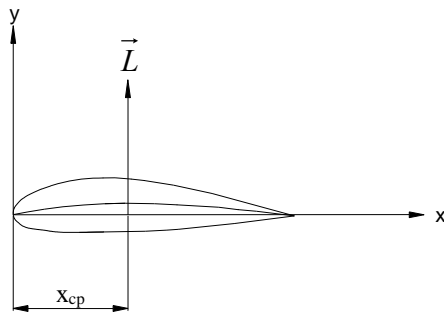
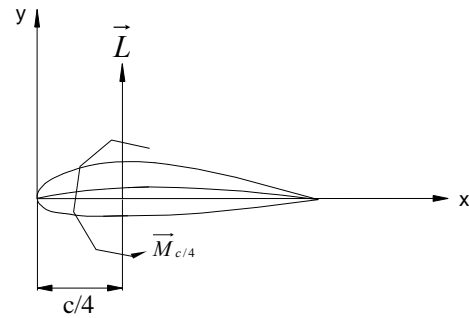
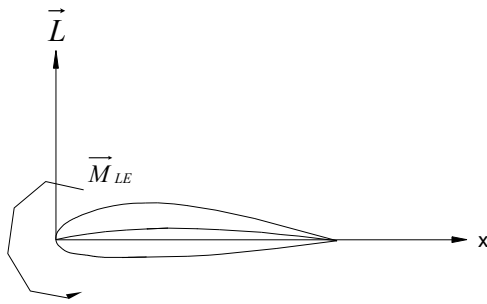
$$c_p(s) = \frac{P(s) - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad \text{coefficiente di pressione locale}$$

$$c_\tau(s) = \frac{\tau(s)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad \text{coefficiente di attrito locale}$$

Si definisce *centro di pressione* x_{cp} quel punto rispetto al quale il coefficiente di momento è nullo (è quindi una quantità teorica che può variare di ampiezza al variare di α o c_L).

Si definisce *centro aerodinamico* x_{ca} o *fuoco* quel punto rispetto al quale il coefficiente di momento è sempre costante (è quindi una quantità di maggiore importanza dal punto di vista pratico in quanto non varia al variare di α o c_L).

Per profili sottili e piccoli angoli di incidenza, si ha che $x_{ca} = \frac{c}{4}$ (avendo preso l'origine come al solito a partire dal LE). Per profili simmetrici e piccoli α si ha che fuoco e centro di pressione coincidono $x_{ca} = x_{cp} = c/4$.



Dall'equivalenza dei 3 sistemi di forze e momenti, si ha che, calcolando i momenti rispetto al LE :

$$M_{LE} = x_{cp}L \quad \text{e} \quad M_{LE} = M_{c/4} + L\frac{c}{4}$$

da cui:

$$x_{cp} = \frac{M_{c/4}}{L} + \frac{c}{4}$$

Analogamente, in termini adimensionali:

$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{c_{M_{LE}}}{c_L} \quad \text{e} \quad c_{M_{LE}} = c_{M_{c/4}} + \frac{c_L}{4}$$

$$\text{e quindi:} \quad \frac{x_{cp}}{c} = +\frac{c_{M_{c/4}}}{c_L} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Per } \alpha \ll 1 \text{ si ha che } c_{M_{c/4}} \approx 0 \text{ e quindi } \frac{x_{cp}}{c} \approx \frac{1}{4}$$

1.6 Teorema di Buckingham e classificazione

Con classificazione si intende la determinazione delle quantità fisiche significative ed indipendenti. In meccanica generale, ed in particolare nella fluidodinamica, massa, lunghezza e tempo sono le quantità fisiche fondamentali. Nella meccanica (o nella fluidodinamica) con scambi di calore, si deve aggiungere la temperatura. Le altre quantità vengono espresse in termini di queste 3 (o 4) mediante l'analisi dimensionale. La presentazione dei risultati di misure o di sistemi di equazioni in termini adimensionali, consente di estendere la validità a classi di problemi (anzichè ad un problema singolo).

Il teorema di Buckingham (detto anche teorema Π), “*stabilisce che se in un fenomeno intervengono n grandezze, l'equazione che le governa può essere sostituita da un'altra equazione fra gli $n-3$ (o $n-4$) prodotti Π (adimensionali) che con esse si possono formare (supposto che i 3 (o 4) parametri adimensionali diano una base)*”.

Questo significa che, per la meccanica isoterma, se il problema è retto da una equazione implicita che lega 5 grandezze A, B, C, D, E:

$$F(A, B, C, D, E) = 0 \quad (1.4)$$

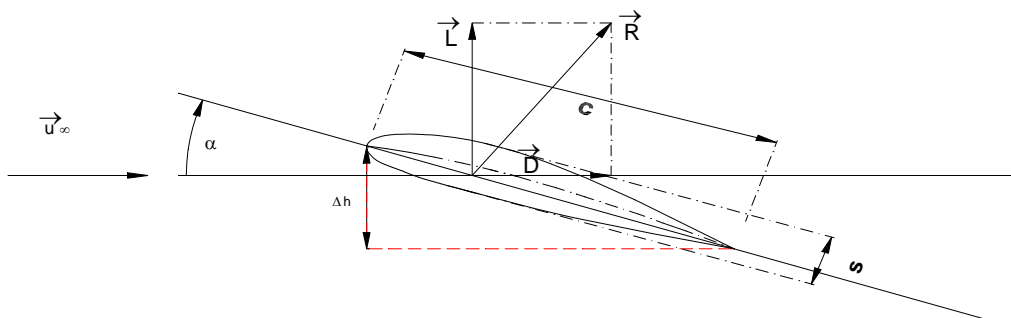
tale relazione può essere sostituita da:

$$f(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \quad (1.5)$$

dove Π_1 e Π_2 sono gli $n-3=5-3=2$ gruppi adimensionali.

La dimostrazione del teorema di Buckingham è riportata nei testi di Fisica Tecnica e Fluidodinamica (e.g. Mattioli, Schlichting) pertanto ci limitiamo a spiegare il procedimento tramite un esempio pratico della sua applicazione.

Si consideri un profilo aerodinamico e siano date per una certa configurazione, le quantità definite nel paragrafo precedente:



$$\begin{aligned}
c_L &= c_N \cos \alpha - c_A \sin \alpha \\
c_D &= c_N \sin \alpha + c_A \cos \alpha \\
c_R &= \sqrt{c_L^2 + c_D^2} = \sqrt{c_N^2 + c_A^2}
\end{aligned}
\tag{1.6}$$

Il quesito cui dobbiamo rispondere è: “le quantità c_L , c_D , c_R da quanti parametri indipendenti dipendono?”. La risposta è data dal teorema di Buckingham sull'analisi dimensionale. Infatti, se il profilo di figura è immerso in un fluido in moto a velocità $u_\infty < a_\infty$ (dove con a_∞ si è indicata la velocità del suono nella regione indisturbata) la risultante \vec{R} e le componenti \vec{L} e \vec{D} dipenderanno da:

- u_∞ = velocità di avanzamento
- a_∞ = velocità del suono
- ρ_∞ = densità
- μ = coefficiente di viscosità
- c = corda del profilo
- s = spessore
- Δh = innalzamento del bordo d'attacco

In forma esplicita si avrà:

$$R = R(u_\infty, a_\infty, \rho_\infty, \mu, c, s, \Delta h) \tag{1.7}$$

o, nella forma implicita più generale:

$$F_a(R, u_\infty, a_\infty, \rho_\infty, \mu, c, s, \Delta h) = 0 \tag{1.8}$$

essendo quindi $n=8$. Il numero di combinazioni di parametri indipendenti è pari a $n(=8)-k$ essendo k il numero di grandezze fondamentali della fisica. Non compare la termodinamica e quindi $k=3$ (lunghezza, massa, tempo). Ci aspettiamo quindi di trovare $8-3=5$ gruppi adimensionali indipendenti:

$$f_a(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5) = 0 \tag{1.9}$$

Se assumiamo le 3 grandezze fondamentali:

$$\begin{aligned}
m &= \text{massa} \\
l &= \text{lunghezza} \\
t &= \text{tempo}
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

avremo che:

$$1. R = [m l t^2]$$

$$2. u_\infty = [l t^{-1}]$$

$$3. a_\infty = [l t^{-2}]$$

$$4. \rho_\infty = [m l^{-3}]$$

$$5. \mu = [m l^{-1} t^{-1}]$$

$$6. c = [l]$$

$$7. s = [l]$$

$$8. \Delta h = [l]$$

Conviene ricavare quantità fondamentali dalle variabili dimensionali che compaiono nella equazione di governo (in questo c'è una certa arbitrarietà):

$$\begin{aligned} l &= [c] \\ m &= [\rho_\infty c^3] \\ t &= [c u_\infty^{-1}] \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dalla 1. si ha:

$$\Pi_1 = \frac{R}{[m l t^{-2}]} = \frac{R}{\rho_\infty c^2 u_\infty^2} = \mathbf{C}_R$$

essendo \mathbf{C}_R il coefficiente di forza.

$$\Pi_2 = \frac{a_\infty}{[l t^{-1}]} = \frac{a_\infty}{u_\infty} = \mathbf{Ma}^{-1}$$

essendo *il numero di Mach* = \mathbf{Ma} .

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{[m l^{-1} t^{-1}]} = \frac{\mu}{\rho_\infty c u_\infty} = \mathbf{Re}^{-1}$$

essendo *il numero di Reynolds* = \mathbf{Re} .

$$\Pi_4 = \frac{s}{[l]} = \frac{s}{c} = s'$$

essendo s' lo spessore relativo.

$$\Pi_5 = \frac{\Delta h}{[l]} = \frac{\Delta h}{c} = \text{sen } \alpha \cong \alpha$$

essendo α l'angolo di incidenza aerodinamico.

Pertanto la (1.9) si specializza in:

$$f_R(c_R, Ma, Re, s', \alpha) = 0$$

oppure

$$c_R = c_R(Ma, Re, s', \alpha)$$

Come detto vi sono enormi vantaggi a lavorare in termini adimensionali, in particolare:

- Vantaggi teorici

Estensione delle soluzioni a famiglie di problemi
Possibilità di trovare soluzioni analitiche di tipo asintotico

- Vantaggi sperimentali

Possibilità di condurre esperimenti su modelli in scala ridotta

- Vantaggi numerici sulle simulazioni con calcolatore

Possibilità di eseguire i calcoli su numeri dell'ordine di 1 con aumento della precisione ottenibile

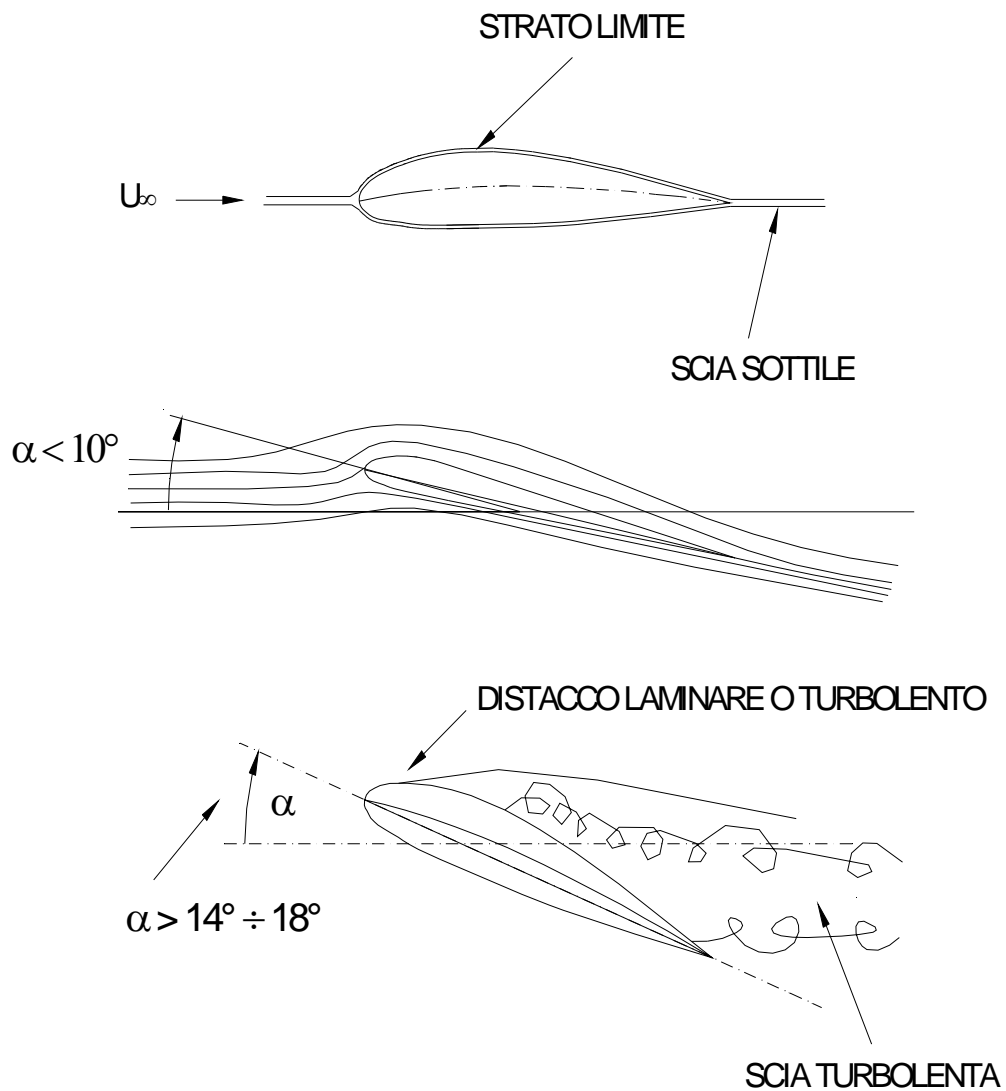
- Vantaggi pratici

Eliminazione delle unità di misura e possibilità di dialogo diretto con ricercatori stranieri

1.7 Principali tipi di moto e visualizzazioni (*leggere*)

Effetto del Re : flussi non viscosi ($Re \gg 1$) e viscosi ($Re \cong 1$)

Comportamento qualitativo a $Re \gg 1$ (interesse ingegneristico)



Effetto del Ma : flussi compressibili e incompressibili

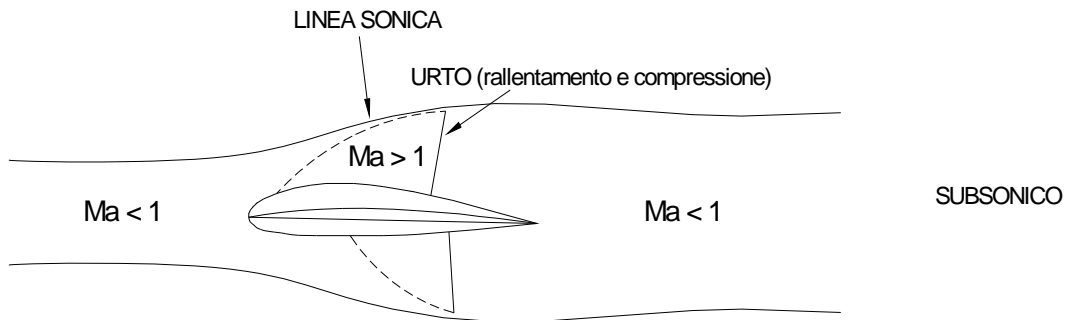
Il limite tra i due casi (flussi compressibili e incompressibili) è dato da $Ma \cong 0.3$

Flussi compressibili

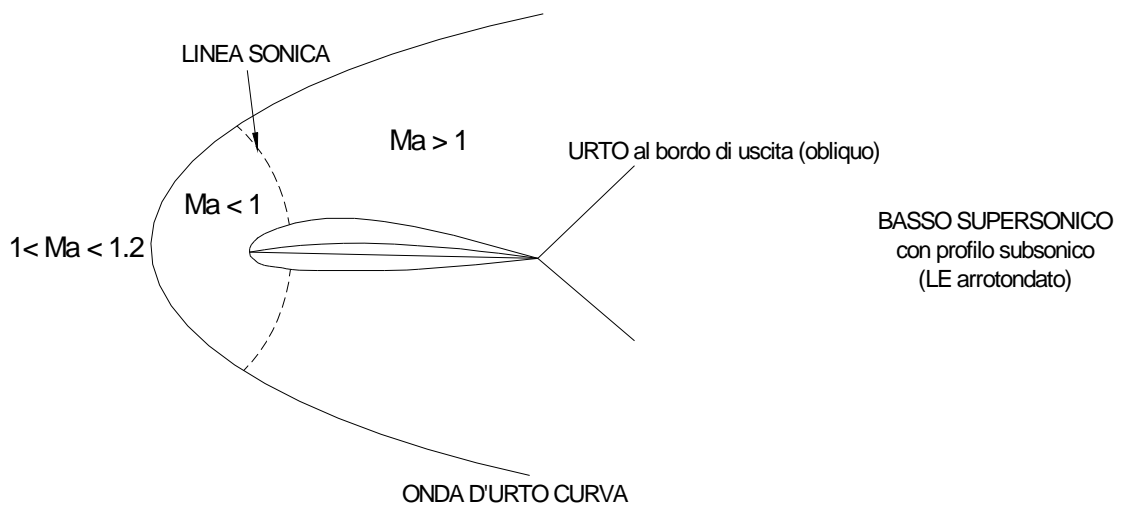
Subsonici ($Ma_\infty < 0.8$)

Non compaiono significative differenze qualitative d'insieme nelle visualizzazioni, ma notevoli differenze quantitative.

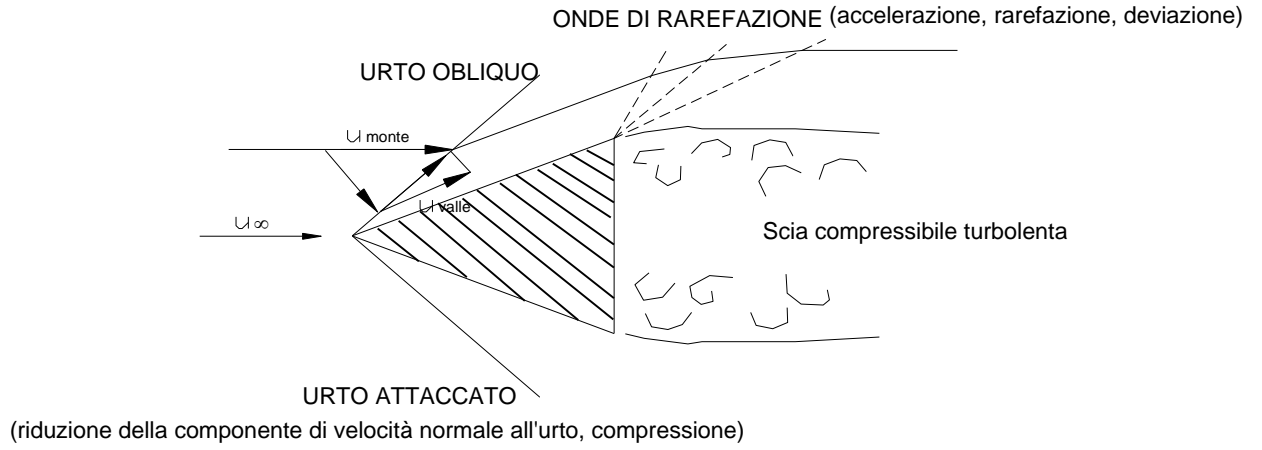
Transonici ($0.8 \leq Ma_\infty \leq 1.2$)



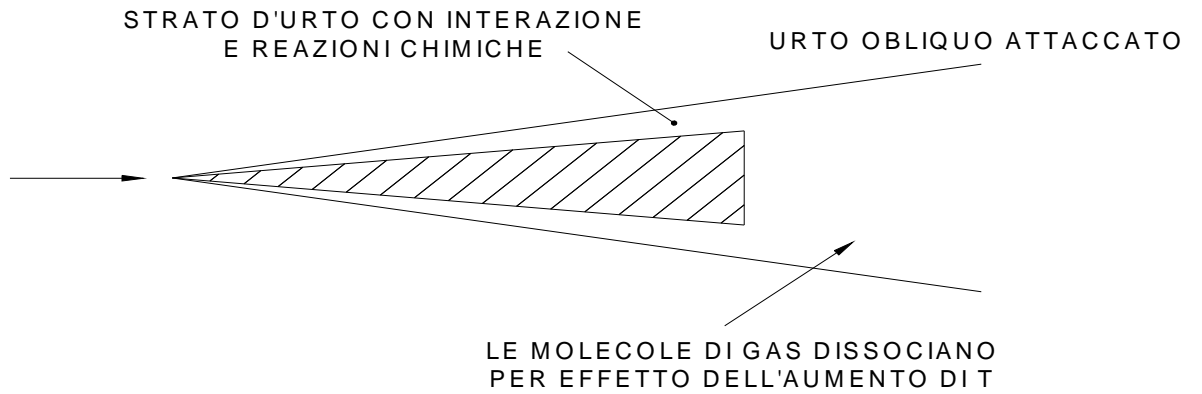
ONDA D'URTO CURVA



Supersonici ($1.2 \leq Ma_\infty < 5$)



Ipersonici ($Ma_\infty > 5$)



Per altri dettagli si vedano le immagini inserite all'interno del paragrafo 3.8 .

1.8 Esercizi relativi al capitolo 1

1.8.1. Esercizi Atm. standard

Es.1.1.1

Il Monte Bianco è alto $4810m$, determinare la pressione a questa quota utilizzando la legge di dipendenza per la Troposfera.

Assumendo per l'aria un peso specifico costante $\gamma=12.014 N/m^2$, quale sarebbe la pressione a $4810m$ di quota?

Assumendo per l'aria una temperatura costante e pari a $15\text{ }^\circ C$, quale sarebbe la pressione a $4810m$ di quota?

Es.1.1.2

Dall'andamento della temperatura in atmosfera standard, determinare la pressione e la densità dell'aria ad una quota di $15Km$.

1.8.2 Esercizi PROFILI (Forze e momenti sui profili)

Es.1.2.1

Dato un profilo NACA 2412 (non simmetrico), di corda c , la distribuzione del coefficiente di pressione (differenza tra c_{Pl} e c_{Pu}) è data da

$$c_{Pl} - c_{Pu} = (1 - x^*)$$

essendo $x^* = x/c$ la posizione lungo la corda adimensionale ($x=0$ al LE) ed essendo c_{Pl} e c_{Pu} rispettivamente i coefficienti di pressione superiore ed inferiore.

Tenendo conto che il profilo è sottile e a bassa incidenza, e che i momenti sono presi positivi se picchianti, determinare:

1. La posizione adimensionale del centro di pressione
2. Il coefficiente di momento rispetto a $c/4$ dalla formula che lega c_{MCA} a x_{cp}
3. Il coefficiente di momento rispetto a $c/4$ dall'integrazione del c_p .

Si noti che NACA 2412, (NACA, Northern Advisory Committee for Aeronautics) indica 4-Digit series (1932), con 4 cifre numeriche, dove le cifre rappresentano nell'ordine: freccia (prima cifra), posizione del massimo della freccia rispetto alla corda (seconda cifra), spessore massimo del profilo rispetto alla corda (ultime due cifre). Ad esempio il profilo NACA 2412, indica che la freccia è $0,02 \cdot c$ (2% della corda), che la posizione di massimo spessore è situata a $0,4 \cdot c$ (40% della corda) e che lo spessore massimo è $0,12$ volte la corda (12%).

Es.1.2.2

Si consideri un profilo NACA 2412 a bassa incidenza. Nella tabella vengono riportati i valori misurati di α , c_L e $c_{Mc/4}$.

α	c_L	$c_{Mc/4}$
-2	0.05	0.042
0	0.25	0.040
2	0.44	0.038
4	0.64	0.036
6	0.85	0.036
8	1.08	0.036
10	1.26	0.034

1. Completare la tabella con i valori corrispondenti di x_{cp}/c .
2. Tenendo conto che per $\alpha = 10^\circ$ si ha $c_D = 0.015$, calcolare per questa incidenza i coefficienti di forza normale ed assiale.

Es.1.2.3

Consideriamo una lastra sottile di corda $c=1m$ ed angolo di attacco $\alpha = 10^\circ$ in un flusso supersonico.

La pressione e gli sforzi di taglio sulla superficie superiore ed inferiore, sono dati da:

$$\begin{aligned}P_u &= 4 \cdot 10^4 \cdot (x-1)^2 + 5.4 \cdot 10^4 \\P_l &= 2 \cdot 10^4 (x-1)^2 + 1.73 \cdot 10^5 \\ \tau_s &= 288 x^{-0.2} \\ \tau_i &= 731 x^{-0.2}\end{aligned}$$

dove x è la distanza dal bordo d'attacco in metri e P e τ sono dati in N/m^2 (Pa). Calcolare, considerando il profilo bidimensionale:

1. forza assiale e forza normale (\bar{A} e \bar{N})
2. forza di portanza e forza di resistenza (\bar{L} e \bar{D})
3. momenti rispetto al bordo d'attacco e rispetto a $c/4$
4. posizione del centro di pressione

1.8.3 Esercizi Buckingham (Analisi dimensionale)

Es.1.3.1

Consideriamo il flusso intorno a 2 cilindri uno con diametro 4 volte più grande dell'altro, entrambi di lunghezza 1m.

Le condizioni di densità, pressione e velocità del flusso a monte del cilindro più piccolo sono ρ_1 , T_1 e v_1 mentre quelle relative al cilindro più grande, sono $\rho_2 = \rho_1/4$, $T_2=4T_1$ e $v_2= 2 v_1$.

Assumendo che sia la velocità del suono a che il coefficiente di viscosità μ sono proporzionali a $T^{1/2}$, mostrare che

1. i due flussi sono dinamicamente simili
2. le forze di resistenza sui due cilindri sono diverse tra loro, e determinare il loro rapporto

Es.1.3.2

Si consideri un aeroplano B747 in volo ad una velocità di $885km/h$ ad una altitudine di $11000m$ con pressione e temperatura dell'aria indisturbata, rispettivamente pari a $20700N/m^2$ e $216K$. Un modello in scala $1/50$ viene provato in una galleria del vento ad una temperatura di $240K$. Calcolare i valori richiesti per la velocità e la pressione dell'aria nella galleria in modo da far sì che i coefficienti di portanza e resistenza misurati sul modello in galleria siano gli stessi di quelli dell'aeroplano vero. Si assuma che sia a (velocità del suono) che μ (coefficiente di viscosità) siano proporzionali a $T^{1/2}$.

Es.1.3.3

La spinta F di un'elica dipende dal diametro d , dalla velocità di avanzamento v , dalla densità del fluido ρ , dal numero di giri al secondo N e dal coefficiente di viscosità del fluido μ . Determinare un'espressione di F in funzione di queste grandezze.

Es.1.3.4

Consideriamo il flusso intorno ad un corpo immerso in un liquido. La resistenza R è funzione della densità ρ , della velocità v , della lunghezza caratteristica del corpo l e del coefficiente di viscosità del fluido μ . Esprimere la dipendenza di R dai parametri sopradetti per i casi seguenti:

- a) $\mu \rightarrow 0$
- b) $\rho \rightarrow 0$

Es.1.3.5

La relazione tra la caduta di pressione per unità di lunghezza lungo un tubo cilindrico e liscio, e le variabili che influenzano le cadute di pressione, devono essere determinate sperimentalmente. Nel laboratorio, la caduta di pressione viene misurata alle estremità di un tubo di diametro $d = 0.0126m$ e lungo $0.15m$. Il fluido utilizzato nell'esperimento è acqua a 21° ($\mu = 1.12 \cdot 10^{-3} N s/m^2$). Dai test compiuti sperimentalmente si ottiene la seguente tabella:

$V(m/s)$	0.036	0.059	0.089	0.178	0.339	0.516	0.711	0.876
$\Delta P(N/m^2)$ $\times 10^{-3}$	299.73	746.93	1479.5	5075.3	15752.5	32606.3	57456	82832

Determinare una relazione generale (adimensionale) tra le cadute di pressione per unità di lunghezza e le altre variabili, e in particolare la caduta di pressione per $V = 1m/s$ e su una distanza di $2m$.

1.9 Soluzione degli esercizi relativi al capitolo 1

1.9.2 Esercizi PROFILI (Forze e momenti sui profili)

Es. 1.2.1

Dato un profilo NACA 2412 (non simmetrico), di corda c , la distribuzione del coefficiente di pressione (differenza tra c_{P_l} e c_{P_u}) è data da

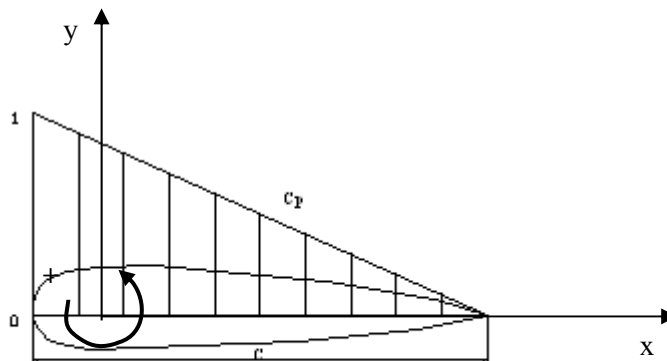
$$c_{P_l} - c_{P_u} = (1 - x^*)$$

essendo $x^* = x/c$ la posizione lungo la corda adimensionale ($x=0$ al LE) ed essendo c_{P_l} e c_{P_u} rispettivamente i coefficienti di pressione superiore ed inferiore.

Tenendo conto che il profilo è sottile e a bassa incidenza, e che i momenti sono presi positivi se picchianti, determinare:

1. La posizione adimensionale del centro di pressione
2. Il coefficiente di momento rispetto a $c/4$ dalla formula che lega c_{MCA} a x_{cp}
3. Il coefficiente di momento rispetto a $c/4$ dall'integrazione del c_P .

Soluzione Es. 1.2.1



(Suggerimento: il momento picchiante è positivo)

1. Ricordiamo che per un profilo sottile e a bassa incidenza si ha $x_{CA} = c/4$. Ora, dalla formula:

$$\frac{x_{cp}}{c} = + \frac{c_{MLE}}{c_L}$$

calcoliamo c_L e c_{MLE} dall'espressione del c_P assegnata:

$$c_L = \int_0^1 (1-x^*) dx^* = \left[x^* - \frac{(x^*)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$c_{MLE} = \int_0^1 (1-x^*) x^* dx^* = \left[\frac{(x^*)^2}{2} - \frac{(x^*)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

con il segno + poiché il momento è picchiante;

da cui:

$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{c_{MLE}}{c_L} = \frac{1}{3}.$$

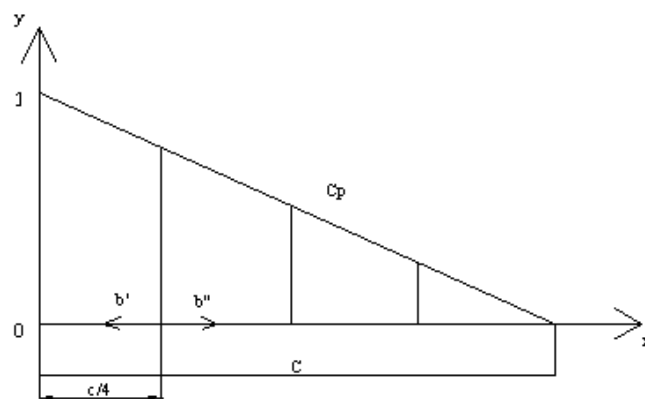
2. Ora, dalla relazione:

$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{1}{4} + \frac{c_{Mc/4}}{c_L}$$

si ricava:

$$c_{Mc/4} = \left(\frac{x_{CP}}{c} - \frac{1}{4} \right) c_L = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

3. Per il calcolo del $c_{Mc/4}$ a partire dal c_P si ha:



Tenendo conto che:

$$b' = -x^* + \frac{1}{4} \quad \text{e che} \quad b'' = x^* - \frac{1}{4}$$

si ha:

$$c_{Mc/4} = -\int_0^{1/4} (1-x^*) \left(\frac{1}{4} - x^* \right) dx^* + \int_{1/4}^1 (1-x^*) \left(x^* - \frac{1}{4} \right) dx^* = -\int_0^1 (1-x^*) \left(\frac{1}{4} - x^* \right) dx^* =$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}x^* + (x^*)^2 \right) dx^* = -\left[\frac{1}{4}x^* - \frac{5(x^*)^2}{8} + \frac{(x^*)^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{-6+15-8}{24} = \frac{1}{24}$$

Analogamente si può calcolare variando solo il braccio:

$$c_{Mc/4} = \int_0^1 (1-x^*) \left(x^* - \frac{1}{4} \right) dx^* = \frac{1}{24}$$

Es. 1.2.2

Si consideri un profilo NACA 2412 a bassa incidenza. Nella tabella vengono riportati i valori misurati di α , c_L e $c_{Mc/4}$.

α	c_L	$c_{Mc/4}$
-2	0.05	0.042
0	0.25	0.040
2	0.44	0.038
4	0.64	0.036
6	0.85	0.036
8	1.08	0.036
10	1.26	0.034

1. Completare la tabella con i valori corrispondenti di x_{cp}/c .
2. Tenendo conto che per $\alpha = 10^\circ$ si ha $c_D=0.015$, calcolare per questa incidenza i coefficienti di forza normale ed assiale.

Soluzione Es. 1.2.2

Si ha:

$$c_{MLE} = \frac{x_{cp}}{c} \cdot c_L$$

$$c_{MLE} \cong c_{Mc/4} + c_{LXCA^*} \cong c_{Mc/4} + c_L \frac{1}{4}$$

$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{1}{4} + \frac{c_{Mc/4}}{c_L}$$

Il risultato è un andamento di x_{cp}/c che mostra una debole dipendenza da α .

α	x_{cp}/c
-2	1.09
0	0.41
2	0.34
4	0.31
6	0.29
8	0.28
10	0.27

Si noti che per valori di $\alpha < 0$, il centro di pressione è fuori dal profilo.
Nel caso $\alpha = 10^\circ$, si usa la relazione:

$$\begin{cases} C_L = C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha \\ C_D = C_N \sin \alpha + C_A \cos \alpha \end{cases}$$

Con:

$$\cos 10^\circ = 0.9848$$

$$\sin 10^\circ = 0.1736$$

Quindi

$$\begin{cases} 1.26 = 0.9848x - 0.1736y \\ 0.015 = 0.1736x + 0.9848y \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per 5.673 (cioè $0.9848/0.1736$) e sottraendo si ottiene:

$$C_N = 1.2436$$

$$C_A = -0.2040$$

Si noti che:

$$1.26 = 1.2247 + 0.0354$$

$$0.015 = 0.2159 - 0.2009$$

quindi C_N e C_A nell'equazione del C_D hanno lo stesso ordine di grandezza, mentre nell'equazione del C_L hanno ordini di grandezza diversi (il C_A è circa pari al 3% di C_N).

Es. 1.2.3

Consideriamo una lastra sottile di corda $c = 1m$ ed angolo di attacco $\alpha = 10^\circ$ in un flusso supersonico.

La pressione e gli sforzi di taglio sulla superficie superiore ed inferiore, sono dati da:

$$\begin{aligned} P_u &= 4 \cdot 10^4 \cdot (x-1)^2 + 5.4 \cdot 10^4 \\ P_l &= 2 \cdot 10^4 (x-1)^2 + 1.73 \cdot 10^5 \\ \tau_s &= 288 x^{-0.2} \\ \tau_i &= 731 x^{-0.2} \end{aligned}$$

dove x è la distanza dal bordo d'attacco in metri e P e τ sono dati in N/m^2 (Pa). Calcolare, considerando il profilo bidimensionale:

1. forza assiale e forza normale (\bar{A} e \bar{N})
2. forza di portanza e forza di resistenza (\bar{L} e \bar{D})
3. momenti rispetto al bordo d'attacco e rispetto a $c/4$
4. posizione del centro di pressione

Soluzione Es. 1.2.3

La soluzione si ottiene utilizzando le equazioni:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_0^1 [P_l(x) - P_u(x)] dx = 10^4 \int_0^1 \{2(x-1)^2 + 17.3 - 4(x-1)^2 - 5.4\} dx = \\
 &= 10^4 \int_0^1 \{11.9 - 2(x-1)^2\} dx = 10^4 \left[11.9x - 2 \frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = \left\{ 11.9 - \frac{2}{3}(0+1) \right\} 10^4 = \\
 &= (11.9 - 0.66) 10^4 = 11.23 \times 10^4 N
 \end{aligned}$$

$$A = (288 + 731) \int_0^1 x^{-0.2} dx = 1019 \left[\frac{1}{0.8} x^{0.8} \right]_0^1 = \frac{1019}{0.8} [1^{0.8} - 0] = 1274 N$$

$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha \cong N \cos \alpha = 11.06 \times 10^4 N$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha = 2.08 \times 10^4 N$$

$$\begin{aligned}
 M_{LE} &= 10^4 \int_0^1 \{11.9x - 2(x-1)^2 x\} dx = 10^4 \left\{ \frac{11.9}{2} x^2 - 2 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^3}{3} \right] \right\}_0^1 = \\
 &= 10^4 \times 5.78 Nm
 \end{aligned}$$

$$M_{c/4} = M_{LE} - L \frac{c}{4} = +5.78 \times 10^4 - 11.06 \times 10^4 \frac{1}{4} = +3.01 \times 10^4 Nm$$

$$x_{cp} = \frac{M_{LE}}{L} = \frac{5.78 \times 10^4}{11.06 \times 10^4} = 0.52$$

Si noti che nel caso di supersonico il centro di pressione è molto vicino a $c/2$, cioè quasi a metà del profilo.

1.9.3 Esercizi Buckingham (Analisi dimensionale)

Es. 1.3.1

Consideriamo il flusso intorno a 2 cilindri uno con diametro 4 volte più grande dell'altro, entrambi di lunghezza 1m.

Le condizioni di densità, pressione e velocità del flusso a monte del cilindro più piccolo sono ρ_1 , T_1 e v_1 mentre quelle relative al cilindro più grande, sono:

$$\rho_2 = \rho_1/4, T_2=4T_1 \text{ e } v_2= 2 v_1.$$

Assumendo che sia la velocità del suono a che il coefficiente di viscosità μ sono proporzionali a $T^{1/2}$, mostrare che

1. i due flussi sono dinamicamente simili
2. le forze di resistenza sui due cilindri sono diverse tra loro, e determinare il loro rapporto

Soluzione Es. 1.3.1

Poichè:

$$\mu \propto \sqrt{\frac{1}{T}} = CT^{1/2}$$

$$a \propto \sqrt{\frac{1}{T}} = \sqrt{\gamma RT}^{1/2}$$

Si ha:

$$Re_1 = \frac{\rho_1 v_1 d_1}{\mu_1} = \frac{\rho_1 v_1 d_1}{CT_1^{1/2}}$$

$$Re_2 = \frac{\rho_2 v_2 d_2}{\mu_2} = \frac{2\rho_1 v_1 4d_1}{4C(4T_1)^{1/2}} = \frac{\rho_1 v_1 d_1}{CT_1^{1/2}}$$

E, quindi:

$$Re_2 = Re_1$$

come volevasi dimostrare.

Per quanto riguarda il numero di Mach si ha:

$$Ma_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma RT}^{1/2}}$$

$$Ma_2 = \frac{v_2}{a_2} = \frac{2v_1}{\sqrt{\gamma R(4T)}^{1/2}}$$

E, quindi:

$$Ma_2 = Ma_1$$

come volevasi dimostrare.

Dalla similitudine dinamica si ha che $c_{D1} = c_{D2}$, quindi, utilizzando l'espressione del c_D :

$$c_D = \frac{D_1}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 d_1} = \frac{D_2}{\frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 d_2}$$

Si ha che:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1/2\rho_2 v_2^2 d_2}{1/2\rho_1 v_1^2 d_1} = \frac{\rho_1 4v_1^2 4d_1}{4\rho_1 v_1^2 d_1} = 4$$

Es. 1.3.2

Si consideri un aeroplano B747 in volo ad una velocità di 885km/h ad una altitudine di 11000m con pressione e temperatura dell'aria indisturbata, rispettivamente pari a 20700N/m^2 e 216K . Un modello in scala $1/50$ viene provato in una galleria del vento ad una temperatura di 240K . Calcolare i valori richiesti per la velocità e la pressione dell'aria nella galleria in modo da far sì che i coefficienti di portanza e resistenza misurati sul modello in galleria siano gli stessi di quelli dell'aeroplano vero. Si assuma che sia a (velocità del suono) che μ (coefficiente di viscosità) siano proporzionali a $T^{1/2}$.

Soluzione Es. 1.3.2

Sono fornite due soluzioni equivalenti

a)

Si denotino ora con il pedice 1 le grandezze relative alle condizioni di volo libero descritte nell'esercizio, mentre con il 2 quelle relative al volo in galleria.

Per avere $C_{L1} = C_{L2}$ e $C_{D1} = C_{D2}$ è necessario imporre la similitudine dinamica, ovvero l'uguaglianza dei numeri di Mach e Reynolds nelle due condizioni considerate:

$$Ma_1 = \frac{V_1}{a_1} \cong \frac{V_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{V_1}{\sqrt{T_2}} \cong \frac{V_2}{a_2} = Ma_2$$

$$Re_1 = \frac{\rho_1 V_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_1 V_2 l_2}{\mu_2} = Re_2$$

Da cui si ottengono, considerando anche le relazioni note dal testo tra le grandezze e la temperatura:

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 259.13\text{m/s}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1 c_1}{V_2 c_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{c_1}{c_2} = 50$$

Con le grandezze ora note si ricava la pressione in galleria del vento per le condizioni assegnate:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 T_2 R}{\rho_1 T_1 R} = 55.55$$

$$P_2 = 1150 \text{ kPa} = 11.35 \text{ atm}$$

E' necessaria, quindi, una forte pressurizzazione per ottenere il valore adatto per il numero di Reynolds, cioè vi è una grossa difficoltà a simulare contemporaneamente i numeri di Reynolds e di Mach.

Un' alternativa è quella di simulare separatamente Re e Ma cercando poi di correlare i risultati.

b)

Per il volo libero si ha:

$$u_\infty = 885 \text{ km/h} = 246 \text{ m/s}$$

$$h = 11000 \text{ m}$$

$$T_\infty = 216 \text{ K}$$

$$\rho_\infty = \frac{P_\infty}{RT_\infty} = 0.334 \text{ kg/m}^3$$

Per quello in galleria si ha:

$$T_\infty = 240 \text{ K}$$

Per avere :

$$\begin{cases} C_{Lm} = C_L \\ C_{Dm} = C_D \end{cases}$$

è necessario imporre la similitudine dinamica, ovvero, considerando l'espressione della viscosità ($\mu = AT^{1/2}$):

$$Re_\infty = \frac{246 \cdot 0.334 \cdot L_\infty}{A(216)^{1/2}} = \frac{u_m \rho_m L_m}{50A(240)^{1/2}} = Re_m$$

$$Ma_\infty = \frac{u_\infty}{a} = \frac{246}{(\gamma R)^{1/2} (216)^{1/2}} = \frac{u_m}{(\gamma R)^{1/2} (240)^{1/2}} = \frac{u_m}{a} = Ma_m$$

Da cui:

$$u_m = \left(\frac{240}{216}\right)^{1/2} 246 = 259 \text{ m/s}$$

$$\rho_m = \rho_\infty \frac{u_\infty}{u_m} \frac{\mu_m}{\mu_\infty} \frac{L_\infty}{L_m} = 0.334 \frac{246}{259} \left(\frac{240}{216}\right)^{1/2} \frac{L_\infty}{L_m} = 16.7 \text{ kg/m}^3$$

$$P_m = (16.7 \cdot 287 \cdot 240) \text{ Pa} = 1150 \text{ kPa}$$

Es. 1.3.3

La spinta F di un'elica dipende dal diametro d , dalla velocità di avanzamento v , dalla densità del fluido ρ , dal numero di giri al secondo N e dal coefficiente di viscosità del fluido μ . Determinare un'espressione di F in funzione di queste grandezze.

Soluzione Es. 1.3.3

Si cerca una relazione del tipo:

$$F = \varphi(d, v, \rho, \mu, N)$$

Con:

$$[F] = \text{MLT}^{-2}$$

$$[d] = \text{L}$$

$$[v] = \text{LT}^{-1}$$

$$[\rho] = \text{ML}^{-3}$$

$$[N] = \text{T}^{-1}$$

$$[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$$

Poiché il numero delle variabili (n) è 6, mentre quelle indipendenti (k) sono 3 si hanno:
 $n-k = 3$ gruppi adimensionali

$$1) \Pi_1 = f_1(\rho, v, d, F)$$

$$\Pi_1 = (\text{ML}^{-3})^i (\text{LT}^{-1})^j \text{L}^k \text{MLT}^{-2} = (\text{MLT})^0 = \text{M}^{i+1} \text{L}^{-3i+j+k+1} \text{T}^{-j-2}$$

Da cui si ottengono:

$$i = -1 ; j = -2 ; k = -2$$

e quindi:

$$\Pi_1 = \rho^{-1} v^{-2} d^{-2} F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v^2 d^2} = c_F$$

$$2) \Pi_2 = f_2(\rho, v, d, \mu)$$

$$\Pi_2 = \rho^i v^j d^k = ML^{-3} (LT^{-1})^i v^j (ML^{-1}T^{-1})^k = (MLT)^0 = M^{1+k} L^{-3+i+j-k} T^{-i-k}$$

Da cui si ottengono:

$$i = 1 ; j = 1 ; k = -1$$

e quindi:

$$\Pi_2 = \rho v d \mu^{-1} = \frac{\rho v d}{\mu} = Re$$

$$\Pi_3 = f_3(\rho, v, d, N)$$

$$\Pi_3 = \rho^i v^j d^k N = (ML^{-3})^{-1} (LT^{-1})^j L^k T^{-1} = (MLT)^0 = M^i L^{-3+i+j+k} T^{-j-1}$$

e quindi:

$$\Pi_3 = v^{-1} d N = \frac{dN}{v} = N^*$$

Si ha pertanto:

$$\Pi_1 = \varphi_1(\Pi_2, \Pi_3) = \varphi(Re, N^*) = C_F$$

Se Re e N^* sono uguali per modello e full size allora il C_F è lo stesso:

$$\frac{F_{\text{model}}}{F_{\text{fullsize}}} = \frac{(\rho v^2 d^2)_{\text{model}}}{(\rho v^2 d^2)_{\text{fullsize}}}$$

Es. 1.3.4

Consideriamo il flusso intorno ad un corpo immerso in un liquido. La resistenza R è funzione della densità ρ , della velocità v , della lunghezza caratteristica del corpo l e del coefficiente di viscosità del fluido μ . Esprimere la dipendenza di R dai parametri sopradetti per i casi seguenti:

- $\mu \rightarrow 0$
- $\rho \rightarrow 0$

Soluzione Es. 1.3.4

Si cerca una relazione del tipo:

$$R = f(v, \rho, \mu, l)$$

a)

E' da notare che la condizione posta ($\mu \rightarrow 0$) è la condizione di Reynolds che tende ad infinito. Ora, è possibile operare come negli altri esercizi, cercando una relazione analitica esplicita del tipo:

$$R = f_1(\rho, v, l)$$

con:

$$[v] = LT^{-1}$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[l] = L$$

$$[R] = MLT^{-2}$$

Il numero di gruppi adimensionali da trovare si determina come al solito utilizzando la relazione:

$N = 4$ = numero di variabili

$K = 3$ = numero di variabili indipendenti

$N - K = 1$ = numero di gruppi adimensionali necessari per descrivere il fenomeno.

Essendo:

$$[v] = LT^{-1}$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[l] = L$$

$$[R] = MLT^{-2}$$

Si ha:

$$\Pi_1 = \rho^i v^j l^k R = (ML^{-3})^i (LT^{-1})^j L^k MLT^{-2} = (MLT)^0 = M^{i+1} L^{1-3i+j+k} T^{-j-2}$$

Da cui si ottengono:

$$i = -1 ; j = -2 ; k = -2$$

e quindi:

$$\Pi_1 = \frac{R}{\rho v^2 l^2} = c_R$$

$$R = f_1(\rho v^2 l^2)$$

b)

La condizione posta ($\rho \rightarrow 0$) si può verificare nel caso in cui una particella cada lentamente in un fluido viscoso. Ora, anche nel caso in esame, si cerca una relazione analitica esplicita del tipo:

$$R = f_2(v, l, \mu)$$

Il numero di gruppi adimensionali da trovare si determina come al solito utilizzando la relazione:

$N = 4$ = numero di variabili

$K = 3$ = numero di variabili indipendenti

$N - K = 1$ = numero di gruppi adimensionali necessari per descrivere il fenomeno.

Essendo:

$$[v] = LT^{-1}$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[l] = L$$

$$[R] = MLT^{-2}$$

Si ha:

$$\Pi_1 = \mu^i v^j l^k R = (ML^{-1}T^{-1})^i (LT^{-1})^j L^k MLT^{-2} = (MLT)^0 = M^{i+1} L^{1-i+j+k} T^{-j-2-i}$$

Da cui si ottengono:

$$i = -1 ; j = -1 ; k = -1$$

Per cui si ha:

$$\Pi_1 = \frac{R}{\mu v l}$$

$$R = f_2(\mu v l) = C \cdot \mu v l$$

Attraverso esperimenti si è riusciti a determinare, nel caso di $Re \ll 1$, il valore di tale costante, arrivando alla **Legge di Stokes**:

$$R = 3\pi \cdot \mu v l$$

Es. 1.3.5

La relazione tra la caduta di pressione per unità di lunghezza lungo un tubo cilindrico e liscio, e le variabili che influenzano le cadute di pressione, devono essere determinate sperimentalmente. Nel laboratorio, la caduta di pressione viene misurata alle estremità di un tubo di diametro $d = 0.0126m$ e lungo $0.15m$. Il fluido utilizzato nell'esperimento è acqua a 21° ($\mu = 1.12 \cdot 10^{-3} N s/m^2$). Dai test compiuti sperimentalmente si ottiene la seguente tabella:

$V(m/s)$	0.036	0.059	0.089	0.178	0.339	0.516	0.711	0.876
$\Delta P(N/m^2)$ $\times 10^{-3}$	299.73	746.93	1479.5	5075.3	15752.5	32606.3	57456	82832

Determinare una relazione generale (adimensionale) tra le cadute di pressione per unità di lunghezza e le altre variabili, e in particolare la caduta di pressione per $V = 1m/s$ e su una distanza di $2m$.

Soluzione Es. 1.3.5

Determinare i due parametri adimensionali relativi a V e ΔP e cercare una legge che li lega è proprio di un approccio sperimentale.

Prima di compiere esperimenti occorre fare l'analisi dimensionale.

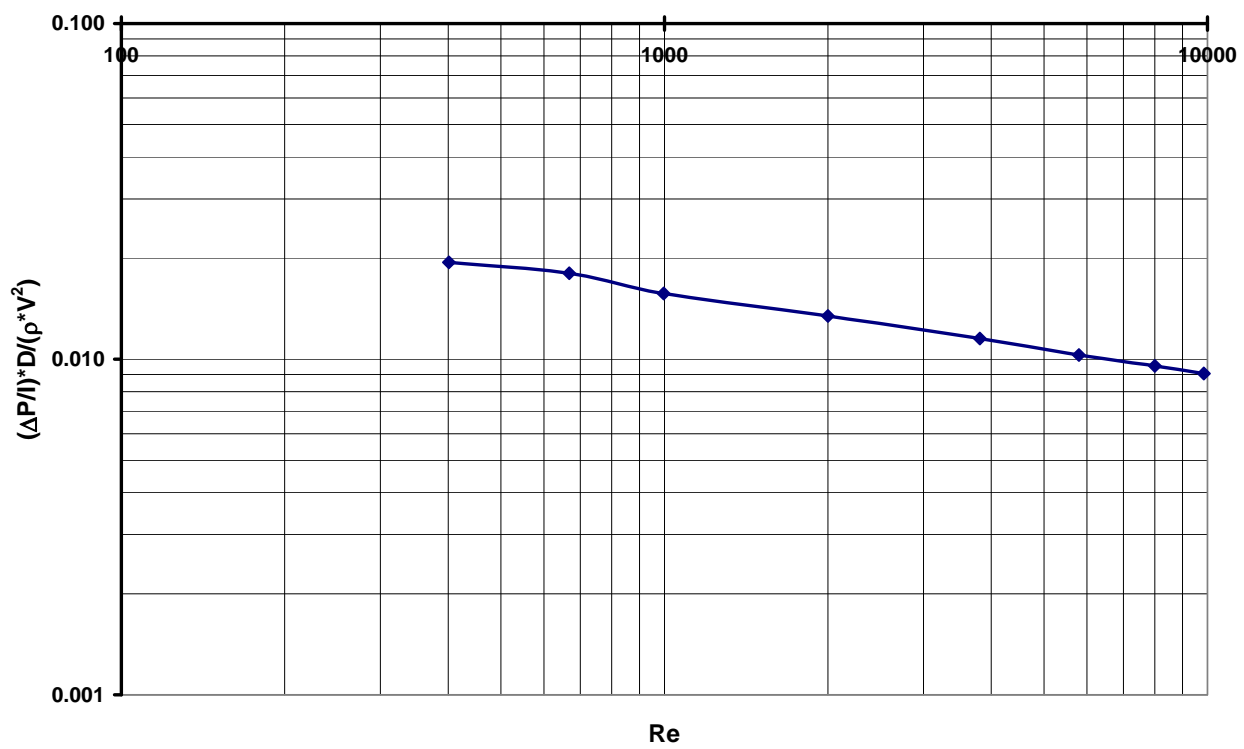
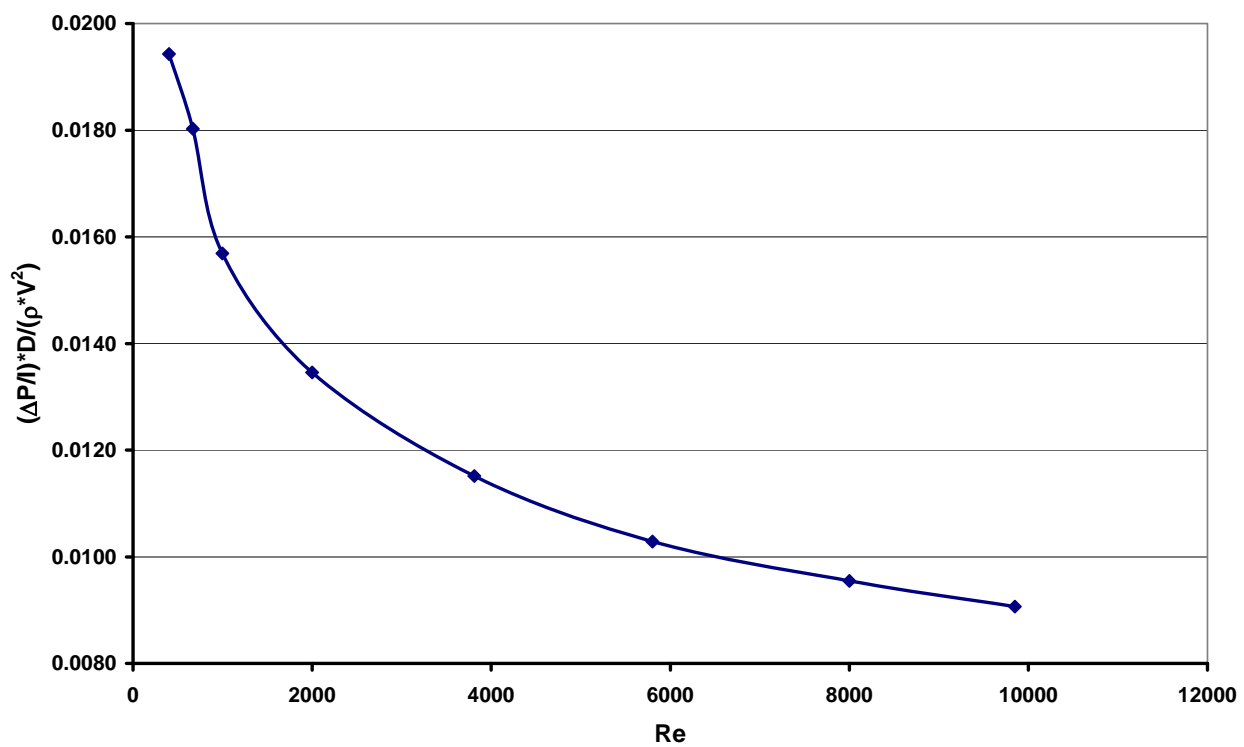
Le cadute di pressione per unità di lunghezza, ΔP_l , sono funzione di D, ρ, μ e V , non compare l perché non è un parametro libero ma vale $1 m$:

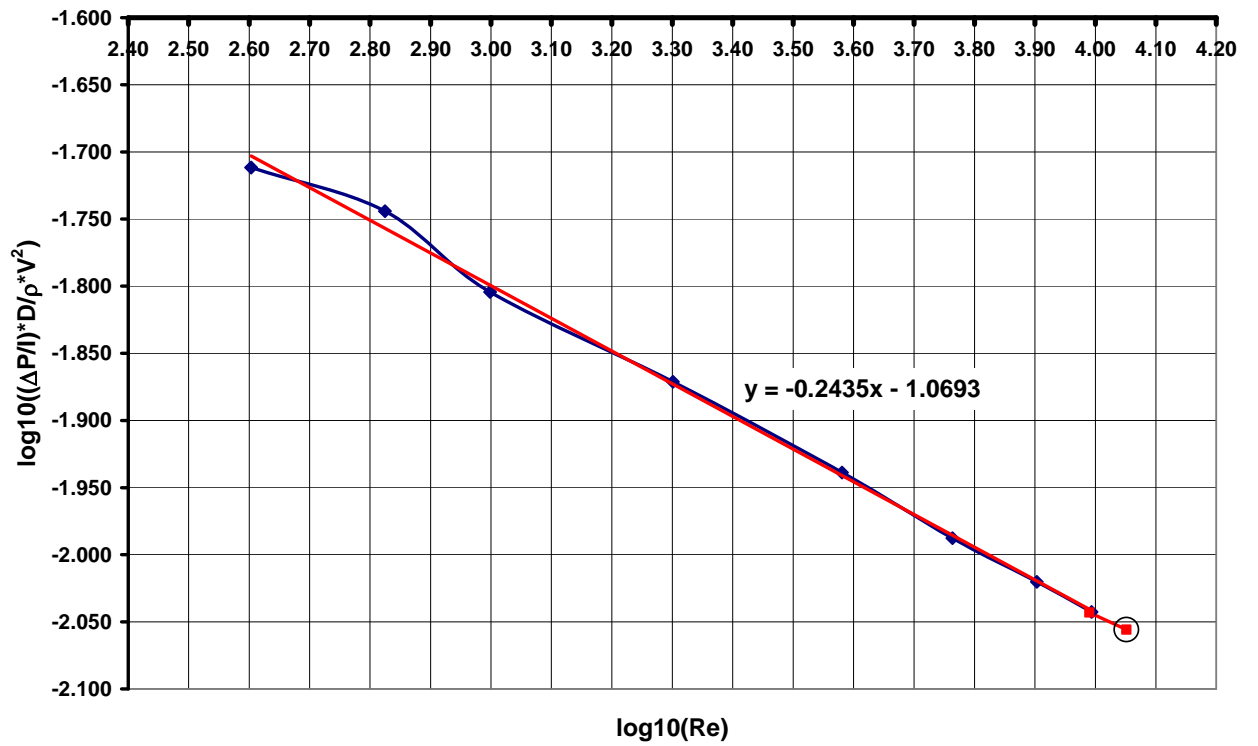
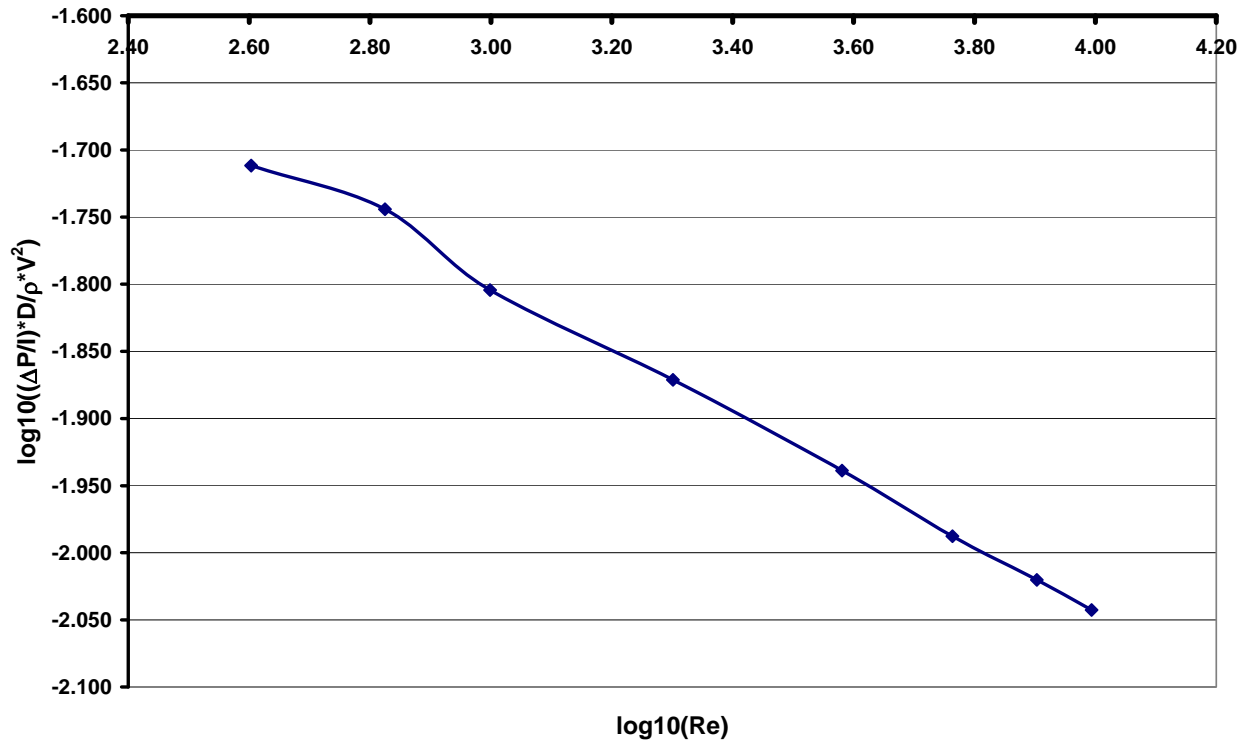
$$\Delta P_l = f(D, \rho, \mu, V)$$

$$\frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \Phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = \Phi(Re)$$

A questo punto, per trovare la funzione Φ , dovrei far variare il Re ed il modo più semplice per farlo è variare la velocità. Con i dati assegnati, si ottiene:

$\Delta P_l = \frac{\Delta P}{l} = \frac{\Delta P}{1m}$	2.00	4.98	9.86	33.84	105.02	217.38	383.04	552.21
$\Pi_1 = \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2 l}$	0.0194	0.0180	0.0157	0.0135	0.0115	0.0103	0.0095	0.0091
$\Pi_2 = Re$	$4.01 \cdot 10^2$	$6.68 \cdot 10^2$	$9.97 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^3$	$3.81 \cdot 10^3$	$5.8 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$9.85 \cdot 10^3$





Ora, graficando $\frac{D\Delta P_l}{\rho V^2}$ in funzione di Re (preferibilmente su una scala log-log) si vede che vale tra le due grandezze una relazione lineare del tipo:

$$\log \Pi_1 = -0.2435 \log \Pi_2 - 1.0693 \quad (1)$$

Eseguo una verifica risostituendo un valore delle tabelle.
Verifica:

$$\Pi_1 = 10^{-0.2435 \log \Pi_2 - 1.07}$$

Calcolo per $\Pi_2 = Re = 9.85 \times 10^3$

$$\Pi_1 = 10^{-0.97 - 1.07} = 10^{-2.04} = 0.0091$$

E' esatto!

A questo punto, dato il nuovo Re ($V = 1 \text{ m/s}$) che vale 11250, determino dalla (1) il $\log \Pi_1$ che sarà di -2.056 dal quale ricaverò ΔP :

$$\Pi_1 (v = 1 \text{ m/s}) = 10^{-0.2435 \times 4.05 - 1.07} = 10^{-2.05} = 0.0089$$

$$\Delta P (l = 2 \text{ m}) = \frac{\rho \cdot v^2 \cdot l}{D} \cdot 0.0089 = \frac{10^3 \cdot 2 \cdot 0.0089}{0.0126} = 1414 \text{ Pa} .$$