

Elementi di fluidodinamica numerica

Capitolo 9

Elementi di Fluidodinamica numerica

9.1 Equazioni di governo

Si richiamano brevemente le equazioni di governo nella forma differenziale dimensionale e non dimensionale (Ved. Cap. 1 e 2). Le equazioni vengono scritte nella cosiddetta forma “conservativa” in cui le tre equazioni di conservazione sono poste nella stessa struttura formale:

- Conservazione della Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

- Bilancio della quantità di moto:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \vec{T}) = \vec{f}_e = \rho \vec{g}$$

Il tensore delle tensioni viene esplicitato attraverso le relazioni costitutive:

$$\vec{T} = \vec{\sigma} - P \vec{I}$$

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\lambda \cong -\frac{2}{3} \mu$$

- Bilancio dell'energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u} - \vec{T} \cdot \vec{u} + \vec{k}) = \vec{f}_e \cdot \vec{u}$$

Dove si è supposto che non ci sia il termine di produzione di calore e:

\vec{k} = vettore flusso di calore

e = Energia termocinetica specifica = $U + \frac{1}{2} u^2$

essendo U l'energia interna specifica.

Si noti che la scrittura delle equazioni di bilancio nella forma conservativa presenta dei vantaggi dal punto di vista numerico perché un unico solutore può essere utilizzato per ciascuna delle tre equazioni.

Utilizzando le relazioni costitutive per fluidi Newtoniani e per il flusso di calore, le equazioni assumono la forma seguente:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \mu \phi^2 + k \nabla^2 T$$

Cui va aggiunta l'equazione di stato:

$$P = \rho RT$$

Di interesse sono anche le forme seguenti del bilancio dell'energia termica in termini di entalpia $h = U + p/\rho$ e temperatura:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu \phi^2 + k \nabla^2 T$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu \phi^2 + k \nabla^2 T$$

La forma adimensionale, di particolare interesse per le formulazioni asintotiche, per le simulazioni sperimentali e per la maggiore accuratezza delle simulazioni numeriche, è già stata vista al Cap. 2. Si richiamano pertanto solo le forme principali:

Conservazione della Massa:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0$$

Quantità di moto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{St} \left(\rho^* \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* &= -\frac{1}{Ru} \vec{\nabla}^* P^* + \frac{1}{Fr} \rho^* \frac{\vec{g}}{g} + \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \vec{u}^* + \frac{1}{3Re} \vec{\nabla}^* (\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^*) \end{aligned}$$

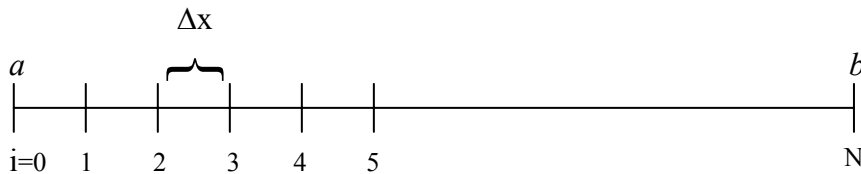
Bilancio dell'energia in termini di temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{St} \rho^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) T^* &= \frac{Ec}{St \cdot Ru} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{Ec}{Ru} (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) P^* + \\ &+ \frac{Ec}{Re} \phi^{2*} + \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^{2*} T^* \end{aligned}$$

9.2 Metodi alle differenze finite

9.2.1 Forma discreta delle derivate prima e seconda

Data una generica funzione $f(x)$ definita su di un intervallo $[a,b]$, per ottenere la formulazione alle differenze finite si effettua un'approssimazione discreta dividendo l'intervallo in N sotto-intervalli:



Per cui si hanno gli $N+1$ valori di $f(x)$:

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(b) \rightarrow f_i = f(x_i) \quad i=0, N$$

essendo Δx l'ampiezza della mesh :

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{L}{N}$$

Si effettua una espansione in serie di Taylor della funzione $f(x)$. Indichiamo genericamente con f_i il valore di $f(x)$ calcolato in x_i .

In *avanti* (*forward*) si ottiene:

$$f_{i+1} = f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \frac{\Delta x^2}{2} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \frac{\Delta x^3}{6} + o(\Delta x^4) \quad (1)$$

da cui si ottiene la stima della derivata prima in avanti:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad \text{che simbolicamente si indica con } \Delta_x^+ f_i. \quad (2)$$

All' *indietro* (*backward*) si ottiene:

$$f_{i-1} = f_i - \left. \frac{df}{dx} \right|_i \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \frac{\Delta x^2}{2} - \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \frac{\Delta x^3}{6} + o(\Delta x^4) \quad (3)$$

da cui si ottiene una stima della derivata prima indietro:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad \text{che simbolicamente si indica con } \Delta_x^- f_i. \quad (4)$$

Si noti che questa derivata (all'indietro) si utilizza nei cosiddetti schemi Up-wind.

La derivata prima *centrata* si ottiene sommando la (3) dalla (1):

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \text{ che simbolicamente si indica con } \Delta_x^0 f_i . \quad (5)$$

La derivata seconda centrata, si ottiene sottraendo la (1) alla (3):

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \text{ che simbolicamente si indica con } \Delta_{xx} f_i . \quad (6)$$

La derivata prima non centrata accurata al secondo ordine, si ottiene sviluppando in serie la f_{i+2} rispetto al punto i (intervallo di $2\Delta x$):

$$f_{i+2} = f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_i 2\Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \frac{4\Delta x^2}{2} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i \frac{8\Delta x^3}{6} + o(\Delta x^4) \quad (7)$$

e combinando la (7) con la (1) si ottiene:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (8)$$

Con riferimento ai simboli prima adottati, si noti che:

$$\frac{1}{2}(\Delta_x^+ + \Delta_x^-) = \Delta_x^0$$

$$\Delta_x^+ - \Delta_x^- = \Delta x \Delta_{xx} \quad (9)$$

$$\Delta_x^+ \Delta_x^- = \Delta_{xx}$$

$$\Delta_x^0 \Delta_x^0 \neq \Delta_{xx}$$

9.2.2 Equazioni differenziali alle derivate ordinarie

9.2.2.1 Modello Matematico

Consideriamo la seguente equazione:

$$A(x) \frac{df}{dx} - \nu \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (10)$$

e con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} f(0) &= V_0 \\ f(1) &= V_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Ad esempio la (10) può corrispondere all'equazione di bilancio dell'energia per un problema monodimensionale stazionario:

$$u \frac{dT}{dx} - \frac{1}{Pe} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (Pe = RePr) \quad (12)$$

9.2.2.2 Modello Numerico

L'espressione approssimata della (10) ottenuta attraverso le derivate centrate, è la seguente:

$$A_i \Delta_x^0 f_i - v \Delta_{xx} f_i = 0 \quad i = 1 \dots N-1 \quad (13)$$

e le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} f_0 &= V_0 \\ f_{N+1} &= V_1 \end{aligned} \quad (14)$$

ovvero:

$$A_i \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - v \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (15)$$

La relazione (15) può essere scritta in forma vettoriale:

$$\overline{\overline{B}} \vec{f} = \vec{d}$$

dove \vec{d} è il vettore dei termini noti e $\overline{\overline{B}}$ è una matrice tridiagonale (compaiono i coefficienti corrispondenti agli indici $i-1$, i e $i+1$) che può essere fattorizzata. In forma esplicita, l'equazione è:

$$a_i f_{i-1} + b_i f_i + c_i f_{i+1} = d_i \quad (16)$$

e le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} f_0 &= V_0 \\ f_N &= V_1 \end{aligned}$$

9.2.2.3 Solutore diretto tridiagonale

Si dicono solutori diretti quelli che consentono il raggiungimento delle soluzioni con un numero finito di operazioni. Poniamo:

$$f_i = X_i f_{i+1} + Y_i \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad (17)$$

e per il punto $i-1$:

$$f_{i-1} = X_{i-1} f_i + Y_{i-1} \quad (18)$$

Combinando le (17) e (18) con la (16) si ottiene la seguente espressione:

$$f_i = -\frac{c_i}{a_i X_{i-1} + b_i} f_{i+1} + \frac{d_i - a_i Y_{i-1}}{a_i X_{i-1} + b_i} \quad (19)$$

Da cui

$$X_i = -\frac{c_i}{a_i X_{i-1} + b_i} \quad (20)$$

$$Y_i = \frac{d_i - a_i Y_{i-1}}{a_i X_{i-1} + b_i} \quad (21)$$

con le condizioni al contorno:

$$f_0 = V_0 = X_0 f_1 + Y_0 \rightarrow X_0 = 0, Y_0 = V_0 \quad (22)$$

Utilizzando la (17) è quindi possibile determinare, con le condizioni al contorno, la f_i .

La tecnica di risoluzione dell'equazione si basa quindi sull'utilizzo di un solutore tridiagonale. La soluzione è accurata se la matrice B_{ij} è ben condizionata, ovvero se i termini sulla diagonale sono dominanti. Questa condizione si traduce nella seguente disequazione:

$$|B_{ll}| \geq \sum_{m=1}^N |B_{lm}| \quad \text{per } l \neq m, \quad l = 1, \dots, N \quad (23)$$

In particolare la condizione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{|A|\Delta x}{\nu} \leq 2 \quad (24)$$

che, ricordando il significato fisico di $A(x)$, si traduce in una condizione restrittiva sul cosiddetto numero di Reynolds della cella:

$$\text{Re}_c = \frac{|u|\Delta x}{\nu} \leq 2 \quad (25)$$

9.2.3 Metodi iterativi

Altre tecniche possono essere utilizzate per la risoluzione dell'equazione generale (16). Tali metodi si basano sulla determinazione della soluzione al punto i -esimo attraverso un certo numero di iterazioni (indicate con l'indice m) il che, per $m \rightarrow \infty$ corrisponde teoricamente ad un numero di operazioni da eseguire infinito. L'iterazione viene interrotta quando un certo criterio di convergenza definito a priori viene soddisfatto. I metodi iterativi più noti vengono riportati nel seguito.

9.2.3.1 Il metodo di Jacobi

La forma iterativa dell'equazione (16) diventa la seguente:

$$f_i^{m+1} = \frac{1}{b_i} (-a_i f_{i-1}^m - c_i f_{i+1}^m + d_i) \quad i = 1 \dots N-1 \quad (26)$$

Questo metodo non viene molto usato perché poco efficiente.

9.2.3.2 Il metodo di Gauss-Seidel

La forma iterativa dell'equazione (16) diventa la seguente:

$$f_i^{m+1} = \frac{1}{b_i} (-a_i f_{i-1}^{m+1} - c_i f_{i+1}^m + d_i) \quad i = 1 \dots N-1 \quad (27)$$

In cui la condizione di convergenza è quella data dalla (24) o (25).

9.2.3.3 Il metodo SOR (Successive Over Relaxation)

Un valore di prima approssimazione viene determinato dallo schema Gauss-Seidel:

$$\tilde{f}_i^{m+1} = \frac{1}{b_i}(-a_i f_{i-1}^{m+1} - c_i f_{i+1}^m + d_i) \quad i = 1 \dots N - 1 \quad (28)$$

mentre il valore finale viene ottenuto da una procedura di rilassamento utilizzando un parametro positivo ω :

$$f_i^{m+1} = \omega \tilde{f}_i^{m+1} + (1 - \omega) f_i^m \quad (29)$$

ω rappresenta il fattore di sovra-rilassamento. Si noti che:

$\omega = 0 \rightarrow f_i^{m+1} = f_i^m$ cioè non c'è iterazione

$\omega = 1$ torna il metodo di Gauss-Seidel

$0 < \omega \leq 1$ Under-Relaxation

$\omega > 1$ Over-Relaxation

(In genere per matrici simmetriche e definite positive si ha $0 < \omega < 2$)

Per $\omega > 1$ il metodo iterativo è più veloce di Gauss-Seidel se la soluzione è stabile. In ogni caso la condizione (24) o (25) sul Reynolds di cella deve essere soddisfatta, mentre il criterio di convergenza può essere stabilito fissando una arbitraria norma L (ad es. $L=2$):

$$\frac{\|f_i^{m+1} - f_i^m\|^L}{\|f_i^{m+1}\|^L} \leq \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon \text{ piccolo a piacere} \quad (30)$$

Si noti che è molto importante la scelta di ε (può anche non essere molto piccolo), in quanto questo parametro deve tenere conto di tutti gli errori che si commettono (in particolare sull'accuratezza delle derivate adottate, ad esempio $\varepsilon = \Delta x^2 / L^2$).

9.2.4 Soluzione di un'equazione parabolica nel tempo e mono-dimensionale nello spazio

Consideriamo la seguente equazione, simile alla (10) ma in cui compare il termine di derivata temporale (caso non stazionario)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (31)$$

assumendo che $A = \text{cost.}$ e $\nu = \text{cost.}$ e che siano entrambi positivi.

A questa equazione vanno aggiunte oltre alle condizioni al contorno già viste, anche le condizioni iniziali ($f(t=t_0) = f_0$). Il modello discreto dovrà ovviamente tenere conto anche della discretizzazione temporale, che indichiamo con l'indice n .

Si definisce *consistente* uno schema tale per cui il limite della soluzione discretizzata nello spazio e nel tempo per $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, coincide con la soluzione dell'equazione continua. A questo proposito esiste un teorema molto importante (teorema di equivalenza), di cui non si riporta la dimostrazione, che afferma:

“per un problema ben posto associato ad una equazione di evoluzione lineare ed approssimato con uno schema consistente, la stabilità dello schema è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza”.

E' quindi molto importante stabilire la consistenza o meno degli schemi adottati per la discretizzazione dell'equazione (31). A questo proposito si possono adottare diversi approcci che vengono descritti nel seguito.

9.2.4.1 Schema esplicito

Tutti i termini vengono calcolati al tempo "n" tranne il termine che compare nella derivata temporale:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + A \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} - \nu \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (32)$$

con $x = i\Delta x$, $t = n\Delta t \rightarrow f_i^n \approx f(i\Delta x, n\Delta t)$

La (32) può essere scritta in forma compatta come segue:

$$f_i^{n+1} = F(f_i^n, f_{i+1}^n, f_{i-1}^n) \quad (33)$$

Si può dimostrare che lo schema esplicito è consistente ed è chiamato *Forward Time Centered Space* ovvero FTSC.

Per ciò che riguarda la stabilità, si può dimostrare che la condizione da rispettare è la seguente:

$$S = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (34)$$

si noti che il parametro S può essere interpretato come rapporto tra la diffusività fisica (ν) e la diffusività numerica ($\Delta x^2 / \Delta t$).

9.2.4.2 Schema implicito

Tutti i termini vengono calcolati al tempo "n+1" tranne il termine che compare nella derivata temporale:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + A \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \nu \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

ovvero in forma compatta

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (A\Delta_x^0 - \nu\Delta_{xx})f_i^{n+1} = 0 \quad (35)$$

Questo schema può essere definito *Backward Time Centered Space* ovvero BTSC ed è incondizionatamente stabile. La struttura dell'equazione è ancora del tipo visto nell'eq. (16) per cui ad ogni passo temporale deve essere risolta la matrice tridiagonale. Quindi anche se stabile (nei limiti di stabilità della x e quindi del soddisfacimento delle condizioni sul Re_C) è piuttosto oneroso dal punto di vista del tempo di calcolo. Lo schema descritto dalla (35) è anche detto *Fully Implicit*, per distinguerlo da altre tipologie di schemi impliciti descritti nel seguito.

9.2.4.3 Schemi a due livelli

Si utilizza una derivata centrata anche nel tempo con un coefficiente di rilassamento (tipo SOR ma nel tempo). Formalmente si ha:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (A\Delta_x^0 - v\Delta_{xx}) \left[\theta f_i^{n+1} + (1-\theta) f_i^n \right] = 0 \quad (36)$$

Il fattore di rilassamento θ varia tra 0 e 1. In particolare:

per $\theta=0$ si ritrova lo schema esplicito

per $\theta=1$ si ritrova lo schema implicito

Per $\theta=1/2$ lo schema è quello di Crank-Nicholson:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (A\Delta_x^0 - v\Delta_{xx}) \frac{1}{2} [f_i^{n+1} + f_i^n] = 0 \quad (37)$$

questo è uno schema *Centered Time Centered Space* ovvero CTSC. Si può dimostrare che questo schema, molto usato nella pratica, è accurato al secondo ordine sia nel tempo che nello spazio ed incondizionatamente stabile.

9.2.5 Soluzione di un'equazione multidimensionale

Consideriamo la seguente equazione di trasporto e diffusione in due dimensioni:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} - v \nabla^2 f = 0 \quad (38)$$

assumendo $A=\text{cost.}$, $B=\text{cost.}$ e $v=\text{cost.}>0$.

A questa equazione vanno aggiunte le condizioni al contorno su ciascun lato (il problema è 2D) e le condizioni iniziali.

Uno schema esplicito per la discretizzazione temporale dell'equazione (38) è il seguente:

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} + A\Delta_x^0 f_{i,j}^n + B\Delta_y^0 f_{i,j}^n - v(\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) f_{i,j}^n = 0 \quad (39)$$

La condizione per la stabilità (assumendo $\Delta x = \Delta y$) è la seguente:

$$\frac{v\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (40)$$

I metodi Fully-implicit per la risoluzione della (38), sono da evitare in quanto l'utilizzo di un solutore diretto ad ogni passo temporale è molto pesante da un punto di vista computazionale. Se comunque si preferisce utilizzare uno schema implicito per i vantaggi che esso ha in termini di stabilità, è bene utilizzare i cosiddetti metodi di tipo ADI ovvero Alternate Direction Implicit. Questi schemi portano alla seguente forma dell'equazione discretizzata :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} (\tilde{f}_{i,j} - f_{i,j}^n) + (A\Delta_x^0 - \nu\Delta_{xx})\tilde{f}_{i,j} + (B\Delta_y^0 - \nu\Delta_{yy})f_{i,j}^n &= 0 \\ \frac{2}{\Delta t} (f_{i,j}^{n+1} - \tilde{f}_{i,j}) + (A\Delta_x^0 - \nu\Delta_{xx})\tilde{f}_{i,j} + (B\Delta_y^0 - \nu\Delta_{yy})f_{i,j}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Supponendo A e B costanti, lo schema è dell'ordine $\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2$. Infatti sommando le due equazioni (41) si ottiene:

$$\frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)}{\Delta t} + (A\Delta_x^0 - \nu\Delta_{xx})\tilde{f}_{i,j} + (B\Delta_y^0 - \nu\Delta_{yy})\frac{f_{i,j}^n + f_{i,j}^{n+1}}{2} = 0 \quad (42)$$

Il sistema tridiagonale può essere risolto attraverso la tecnica della fattorizzazione (tridiagonale). In questo caso la condizione di dominanza dei termini della diagonale porta alle seguenti condizioni di stabilità:

$$\frac{|A|\Delta x}{\nu} \leq 2, \quad \frac{|B|\Delta y}{\nu} \leq 2 \quad (43)$$

Si noti che se le condizioni (43) non sono soddisfatte, è necessaria una limitazione sul passo temporale:

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x^2}{|A|\Delta x - 2\nu}, \quad \Delta t \leq \frac{2\Delta y^2}{|B|\Delta y - 2\nu} \quad (44)$$

Le relazioni (42), (43) e (44) possono essere estese al caso non lineare in cui i coefficienti A e B sono funzioni di f .

9.3 Metodi spettrali ed integrali

9.3.1 Introduzione

L'idea di base di questi metodi è di trovare la forma discretizzata dell'equazione differenziale originale proiettando l'equazione su di uno spazio a dimensione finita. In pratica si effettua una proiezione della soluzione ignota e dei termini noti su di una base di funzioni ortonormali opportunamente scelta. Questa procedura può essere condotta in due modi:

Metodi agli elementi finiti: il dominio è suddiviso in sottoregioni (elementi finiti) e la proiezione è effettuata utilizzando una base *locale* (ad es. un polinomio).

Metodi spettrali: la proiezione è effettuata sull'intero dominio utilizzando una base di funzioni trigonometriche.

Entrambi i metodi utilizzano quindi una rappresentazione continua, solo che il metodo degli elementi finiti discretizza lo spazio fisico mentre, come vedremo, il metodo spettrale utilizza uno sviluppo in serie di Fourier troncato.

9.3.2 Rappresentazione di una funzione nota

A titolo di esempio, consideriamo la rappresentazione di una funzione nota $f(x)$ definita sull'intervallo $[0, 2\pi]$, utilizzando i metodi sopra descritti.

- **Rappresentazione agli elementi finiti**

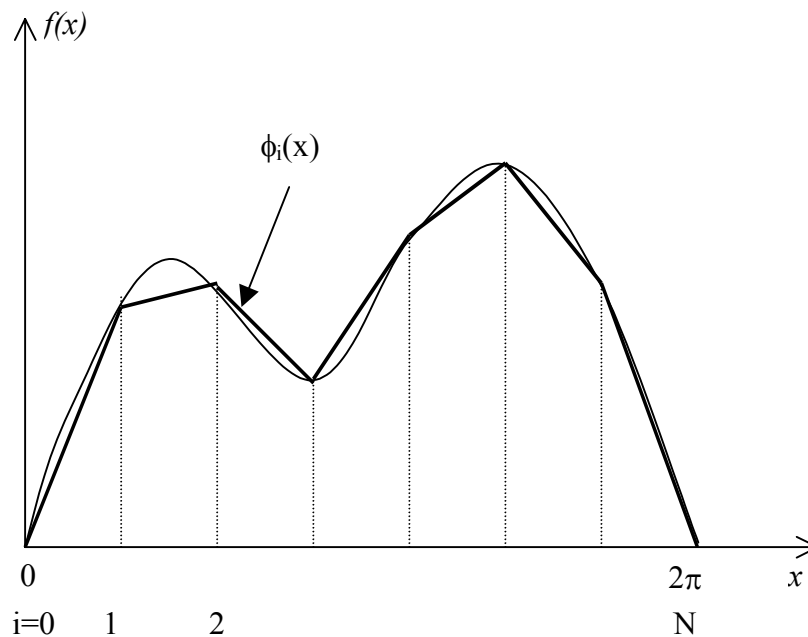
In generale si avrà:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^N \varphi_i(x) f_i \quad (45)$$

avendo indicato con $f_i = f(x_i)$, quantità note, mentre $\varphi_i(x)$ rappresentano le funzioni approssimanti.

Per semplicità, consideriamo dei polinomi di ordine 1, ovvero approssimiamo la funzione di partenza con una curva lineare a tratti.

E' logico che, con riferimento alla (45), una migliore approssimazione della $f(x)$ si può ottenere utilizzando delle funzioni approssimanti più complesse (ad esempio con polinomi di ordine superiore al primo).



In questo caso particolare, le funzioni approssimanti sono definite come segue

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & x \geq x_1 \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & x > x_{i+1} \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0 & x < x_N \\ \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & x_{N-1} \leq x \leq x_N \end{cases}$$

- **Rappresentazione con metodi spettrali**

In questo caso la rappresentazione viene effettuata nel dominio dei numeri d'onda attraverso una espansione in serie di Fourier ovvero proiettando la funzione su di una base di funzioni trigonometriche:

$$\varphi_k(x) = e^{jkx} \Rightarrow f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jkx} \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (46)$$

Per le applicazioni numeriche, la serie (46) va scritta per un numero finito di numeri d'onda:

$$f(x) \approx \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F_k e^{jkx} \quad (47)$$

I coefficienti della serie di Fourier (F_k), si possono ricavare seguendo quanto esposto nei Capp. 7 e 8:

$$F_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jkx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) e^{-jkx} dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} e^{-jkx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) C_k(n) \quad (48)$$

avendo posto

$$C_k(n) = \frac{e^{jkx_{n+1/2}} - e^{jkx_{n-1/2}}}{-jk} \quad (49)$$

Inoltre, se e^{-jkx} è circa costante nell'intervallo Δx , tenendo conto che $\Delta x = \frac{2\pi}{N}$ si ottiene:

$$F_k \approx \frac{\Delta x}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jkx_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jkx_n}$$

9.3.3 Metodo degli elementi finiti

Accenniamo solamente al modo in cui può essere determinata a seconda del problema da studiare, la funzione di forma da cui determinare la base di funzioni più opportuna. L'approssimazione viene effettuata con una funzione polinomiale a tratti. Si introducono le coordinate standard:

$$X = \frac{x}{\Delta x} - i$$

- La base di funzioni lineari a tratti, è:

$$\varphi_i(X) = \begin{cases} 0 & X < -1 \\ 1+X & -1 \leq X \leq 0 \\ 1-X & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & X > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Graph of } \varphi_i(X) \text{ showing a triangular shape with vertices at } (-1, 0), (0, 1), \text{ and } (1, 0). \end{array} \quad (50)$$

- La base di funzioni quadratiche a tratti, utilizzano tre nodi per elemento:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^N \psi_i(X) f_i + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{j+1/2}(X) f_{j+1/2} \quad (51)$$

essendo:

$$\psi_i(X) = \begin{cases} 0 & X < -1 \\ 1+3X+2X^2 & -1 \leq X \leq 0 \\ 1-3X+2X^2 & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & X > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Graph of } \psi_i(X) \text{ showing a cubic shape with nodes at } (-1, 0), (0, 1), \text{ and } (1, 0). \end{array} \quad (52)$$

$$\phi_i(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 4X-4X^2 & 0 < X < 1 \\ 0 & X > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Graph of } \phi_i(X) \text{ showing a parabolic shape with nodes at } (0, 0), (1/2, 1), \text{ and } (1, 0). \end{array} \quad (53)$$

- Se si vogliono imporre le condizioni di continuità sulle derivate nei punti della griglia, è necessario utilizzare polinomi cubici a tratti:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^N \{ \varphi_i^0(X) f_i + \varphi_i^1(X) f'_i \} \quad (54)$$

cosicché nei punti della griglia si otterrà:

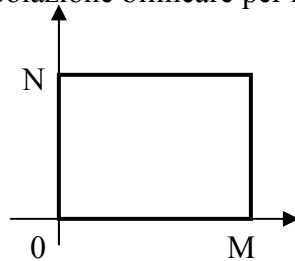
$$f(x) = \alpha_i(x) f_i + \beta_i(x) f_{i+1} + \gamma_i(x) f'_i + \delta_i(x) f'_{i+1} \quad (55)$$

- Caso bidimensionale, interpolazione bilineare per regioni rettangolari

In questo caso si ha:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \varphi_{ij}(X, Y) \quad (56)$$

essendo:



$$\varphi_{ij}(X, Y) = \begin{cases} (1+X)(1+Y) & -1 < X < 0, -1 < Y < 0 \\ (1+X)(1-Y) & -1 < X < 0, 0 < Y < 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & \text{nel resto dello spazio} \end{cases} \quad (57)$$

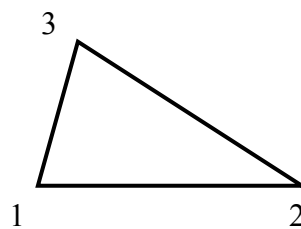
- Caso bidimensionale con geometrie complesse

In questi casi il campo viene solitamente diviso in elementi triangolari con vertici (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3$, e si ha:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) f_i \quad (58)$$

essendo:

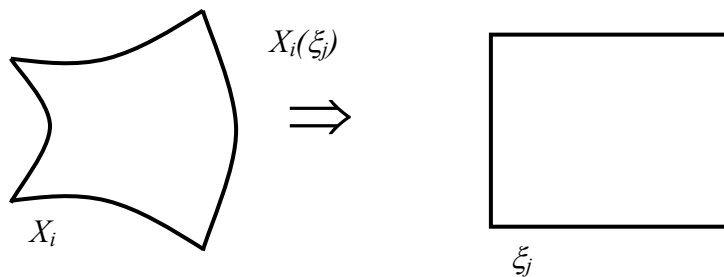
$$\begin{aligned} \alpha_1(x, y) &= \frac{1}{2C} (\tau_{23} + \eta_{23}x - \xi_{23}y) \\ \alpha_2(x, y) &= \dots \\ \alpha_3(x, y) &= \dots \end{aligned} \quad (59)$$



e

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= x_i y_j - x_j y_i \\ \xi_{ij} &= x_i - x_j \\ \eta_{ij} &= y_i - y_j \end{aligned} \quad (60)$$

- Nel caso generale di coordinate curvilinee, è necessario effettuare una mappatura in modo che ciascun elemento curvilineo sia trasformato in un elemento rettangolare. A questo scopo, è necessario che la mappatura sia differenziabile.



In questi casi è possibile definire una matrice di trasformazione:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = J \quad \text{Jacobiano della trasformazione} \quad (61)$$

9.3.4 Formulazione del problema discreto per gli elementi finiti

I metodi agli elementi finiti possono essere formulati in due modi distinti:

- Per analisi strutturale, attraverso i principi variazionali (metodo di Ritz)
- Per analisi non strutturale, attraverso il metodo di Galerkin

Si rimanda alla bibliografia per maggiori dettagli.

9.4 Metodo ai volumi finiti

Il metodo si basa sulla formulazione integrale delle equazioni di governo che devono essere risolte. Consideriamo, ad esempio, l'equazione di bilancio dell'energia in termini di temperatura, che, in forma adimensionale nel caso incompressibile (con $Ma \rightarrow 0$, $Ec \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T$$

che scritta nella forma conservativa, o di divergenza, risulta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u}T - \frac{1}{Pe} \vec{\nabla} T \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (62)$$

$$\vec{H} = \vec{u}T - \frac{1}{Pe} \vec{\nabla} T$$

La forma integrale si ottiene considerando che la (62) deve essere valida su di un arbitrario volume di controllo V , ed utilizzando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V T dV + \int_{\partial V} \vec{H} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (63)$$

dove la funzione \vec{H} rappresenta il vettore flusso delle quantità considerate. In questo caso, considerando un problema 2D, si ha:

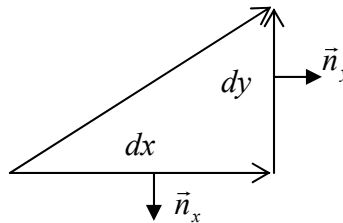
$$\vec{H} = \vec{H}(F, G)$$

$$F = uT - \frac{1}{Pe} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (64)$$

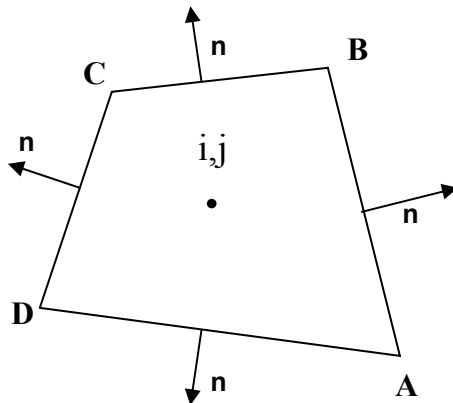
$$G = vT - \frac{1}{Pe} \frac{\partial T}{\partial y}$$

e quindi:

$$\vec{H} \cdot \vec{n} dS = Fdy - Gdx \quad (65)$$



Se consideriamo il volume V (o la superficie 2D) come relativo ad una cella che resta costante nel tempo, di forma quadrilatera e delimitata da superfici (o linee) piane (dritte),



l'equazione (63) diventa:

$$V \frac{\partial T_p}{\partial t} + H_{AB} + H_{BC} + H_{CD} + H_{DA} = 0$$

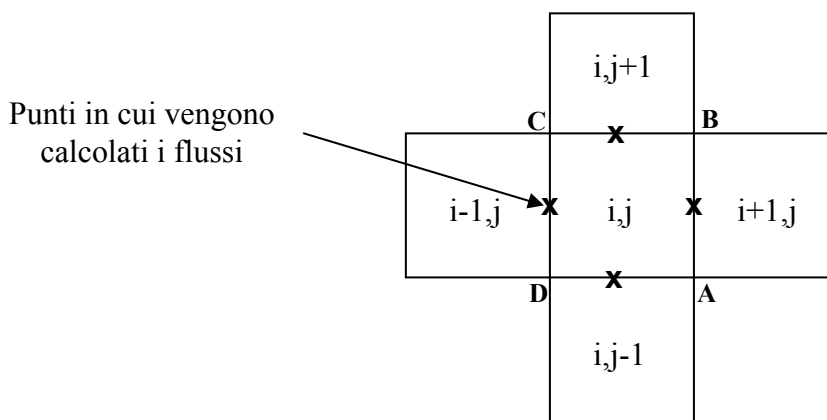
dove T_p , rappresenta il valore medio di T nella cella i,j . I flussi $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$, tenendo conto della (65) diventano:

$$\begin{aligned} H_{AB} &= F_{AB} \Delta y_{AB} - G_{AB} \Delta x_{AB} \\ H_{BC} &= F_{BC} \Delta y_{BC} - G_{BC} \Delta x_{BC} \end{aligned} \quad (66)$$

.....

dove si è posto $\Delta x_{AB} = x_B - x_A$ e $\Delta y_{AB} = y_B - y_A$. Inoltre F_{AB}, G_{AB}, \dots rappresentano i valori medi di F e G sulle facce AB, \dots

Nel caso di una cella rettangolare, è evidente come i flussi vengano calcolati al centro dei lati, e quindi si ottengono le seguenti espressioni:

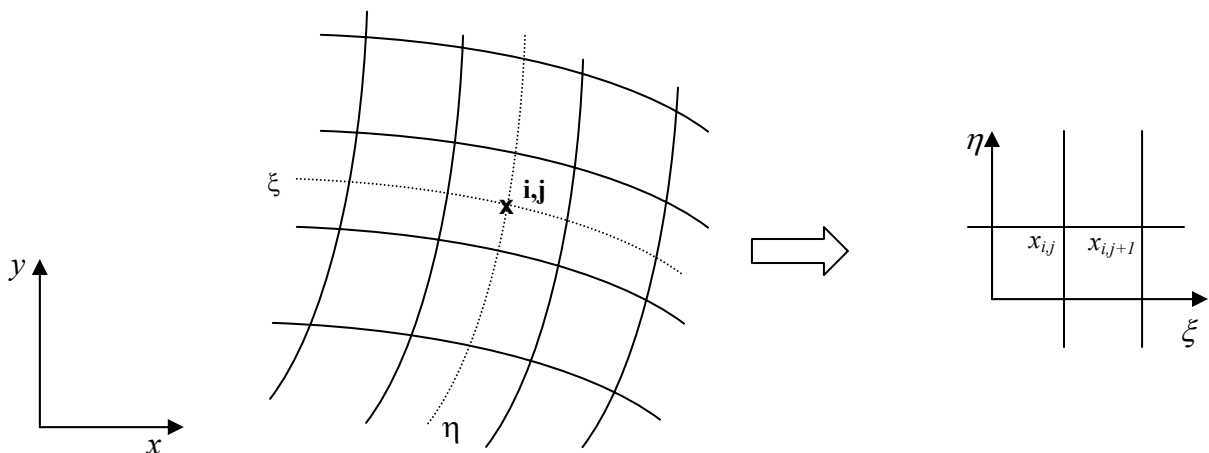


$$H_{AB} = H_{i+1/2,j} = \left[\frac{(uT)_{i+1,j} + (uT)_{i,j}}{2} - \frac{1}{Pe} \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \right) \right] \Delta y_{AB} \quad (67)$$

e così via per gli altri termini.

Nel caso di geometrie non cartesiane, con celle generiche sempre quadrilatere, i termini convettivi mantengono la stessa forma in quanto, come è evidente dalla (67), essi vengono ottenuti nei centri dei lati come media dei valori al centro delle celle. Invece, i termini di gradiente cambiano in quanto le derivate spaziali vanno effettuate lungo le linee $\xi, \eta = \text{cost.}$ dove la funzione T è definita:

Per cui rispetto agli assi x,y si avrà:



$$\begin{aligned}
H_{AB} = H_{i+1/2,j} = & \left[\frac{(uT)_{i+1,j} + (uT)_{i,j}}{2} \right] \Delta y_{AB} - \left[\frac{(vT)_{i+1,j} + (vT)_{i,j}}{2} \right] \Delta x_{AB} + \\
& - \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{AB} \Delta y_{AB} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{AB} \Delta x_{AB} \right]
\end{aligned} \tag{68}$$

Se la trasformazione di coordinate $x_i = x_i(\xi_j)$ è analitica ed invertibile in modo che si possa definire la funzione inversa $\xi_j = \xi_j(x_i)$, il secondo termine della (68) contenente le derivate della T , può essere calcolato esplicitando le derivate composte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}
\end{aligned}$$

cioè
$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$$

Se la trasformazione $\xi_j = \xi_j(x_i)$ non è nota, ovvero le linee ξ e $\eta = \text{cost}$ sono note solo numericamente, occorre utilizzare una procedura inversa risolvendo il sistema $\frac{\partial T}{\partial \xi_j} = \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$

ovvero:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right)^{-1} \frac{\partial T}{\partial \xi_j} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

dove J è lo Jacobiano della trasformazione (il rapporto tra le aree):

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

9.5 Soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes per flussi viscosi incompressibili

Le possibili formulazioni sono le seguenti:

FORMULAZIONI	Incognite ed equazioni a disposizione	
	3D	2D
Variabili Primitive (\vec{u}, P)	4	3
Vorticità-velocità ($\vec{u}, \vec{\omega}$)	6	3
Vorticità-Potenziale vettore ($\vec{\psi}, \vec{\omega}$) (in 2D vorticità-funzione di corrente)	6	2

Vediamo separatamente le diverse formulazioni.

9.5.1 Variabili Primitive (\vec{u}, P)

9.5.1.1 Formulazione generale

Consideriamo le equazioni di governo per un flusso laminare di un fluido Newtoniano incompressibile ($Ma \rightarrow 0, Ec \rightarrow 0$) scritte nella forma velocità-pressione:

Conservazione della massa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (69)$$

Bilancio della quantità di moto:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} - \frac{Gr}{\text{Re}^2} T \frac{\vec{g}}{g} \quad (70)$$

essendo $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u})$

Bilancio dell'energia in termini di temperatura

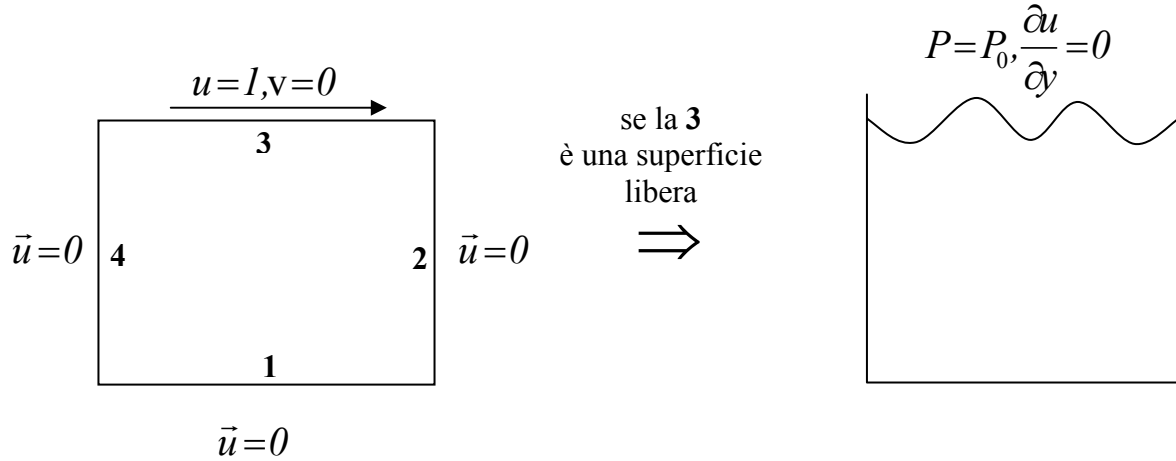
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u}T - \frac{1}{Pe} \vec{\nabla}T \right) = 0 \quad (71)$$

Nel caso generale di flusso 3D, le equazioni (69), (70) e (71) costituiscono un sistema di 5 equazioni alle derivate parziali nelle 5 incognite (\vec{u}, P, T). Se consideriamo il caso di un problema a temperatura costante, le incognite diventano 4 e le equazioni di governo in (\vec{u}, P) sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} \quad (73)$$

Il problema deve essere completato dalle condizioni al contorno sulla velocità. Solo nel caso di superfici libere o altri casi particolari, devono essere imposte le condizioni al contorno sulla pressione, ed in questi casi una delle condizioni al contorno sulla velocità deve essere eliminata. Consideriamo ad esempio il caso della cosiddetta “driven cavity”, che è un problema classico solitamente utilizzato per la validazione dei codici di calcolo:



Le condizioni al contorno sulla velocità devono soddisfare la condizione integrale di conservazione della massa:

$$\int_{\partial V} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{74}$$

mentre le condizioni iniziali devono soddisfare la continuità

$$\vec{u}(t=0) = \vec{u}_0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \tag{75}$$

Difficoltà:

1. Soddisfacimento della continuità (72) in particolare per problemi non stazionari
2. La pressione è singolare nel tempo in quanto nelle equazioni non è presente un termine del tipo $\frac{\partial P}{\partial t}$ (in termini fisici questo vuol dire che la velocità di propagazione delle onde acustiche è infinita)
3. Mancano delle condizioni al contorno sulla pressione (in genere)

9.5.1.2 Problemi 2D stazionari e algoritmo di Chorin

Si introduce una compressibilità artificiale (Chorin, 1967) aggiungendo la seguente equazione per la pressione:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \tag{76}$$

in cui c è una costante arbitraria che rappresenta una compressibilità artificiale. La soluzione stazionaria viene raggiunta dalla (76) e (72) per $t \rightarrow \infty$ cosicché $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$.

Il metodo si definisce con compressibilità artificiale in quanto, se consideriamo l'equazione di conservazione della massa in forma adimensionale con $\beta T_0 \ll 1$, $\alpha P_0 \ll 1$, $\frac{\alpha P_0}{St} \cong c^2$ si ottiene proprio la (76).

Collocazione delle variabili nel dominio computazionale

L'equazione (76) (che sostituisce la (72)) e la (73), scritte in forma indiciale in un riferimento cartesiano, sono (con la virgola rappresentiamo la derivata):

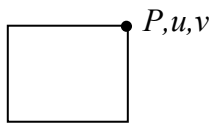
$$\begin{cases} u_{i,t} + (u_i u_j)_{,j} = -P_{,i} + \frac{1}{\text{Re}} u_{i,jj} \\ c^2 u_{i,i} + P_{,t} = 0 \\ u_i = \bar{u}_i \quad \text{su } \partial V \end{cases} \quad (77)$$

o, per esteso:

$$\begin{cases} u_t + (uu)_x + (uv)_y = -P_x + \frac{1}{\text{Re}} (u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + (uv)_x + (vv)_y = -P_y + \frac{1}{\text{Re}} (v_{xx} + v_{yy}) \\ c^2 (u_x + v_y) + P_t = 0 \\ u = \bar{u}, v = \bar{v} \quad \text{su } \partial V \end{cases} \quad (78)$$

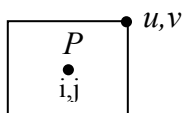
Le possibili collocazioni delle variabili nelle celle di calcolo, sono le seguenti:

1. Tutte le variabili sono definite nei nodi (locazione originale):



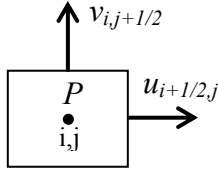
La soluzione di u , v e p oscilla nello spazio

2. La pressione è definita al centro della cella e le velocità nei nodi:



Solo la P oscilla nello spazio

3. La pressione è definita al centro della cella e le velocità nel punto medio dei lati della cella (Harlow & Welsh, 1965). In questo caso la locazione si dice STAGGERED e lo schema è cosiddetto MAC (*Marker and cell*)



Non sono presenti oscillazioni.

In pratica si deve usare la locazione staggered delle variabili anche se il sistema discreto corrispondente al sistema (78), risulta essere più complesso. Si ha infatti che:

la prima delle (78) va scritta in $[i+1/2,j]$:

$$\frac{1}{\Delta t} (u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n) + \Delta_x^{1/2} (uu)_{i+1/2,j}^n + \Delta_y^{1/2} (vu)_{i+1/2,j}^n = -\Delta_x^{1/2} P_{i+1/2,j}^n + \frac{1}{\text{Re}} (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) u_{i+1/2,j}^n \quad (79)$$

la seconda delle (78) va scritta in $[i,j+1/2]$:

$$\frac{1}{\Delta t} (v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n) + \Delta_x^{1/2} (uv)_{i,j+1/2}^n + \Delta_y^{1/2} (vv)_{i,j+1/2}^n = -\Delta_y^{1/2} P_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{\text{Re}} (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) v_{i,j+1/2}^n \quad (80)$$

la terza delle (78) va scritta in $[i,j]$:

$$\frac{1}{\Delta t} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n) = c^2 (\Delta_x^{1/2} u_{i,j}^n + \Delta_y^{1/2} v_{i,j}^n) \quad (81)$$

Si noti che le condizioni al contorno sulla pressione non sono necessarie.

Nelle (79-81) si è indicato:

$$\begin{aligned} \Delta_x^{1/2} &= \Delta_x^0 \text{ con passo } \frac{\Delta x}{2}. \text{ Ad esempio } \Delta_x^{1/2} P_{i+1/2,j}^n = \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} \\ \Delta_y^{1/2} &= \Delta_y^0 \text{ con passo } \frac{\Delta y}{2}. \text{ Ad esempio } \begin{cases} \Delta_y^{1/2} (vv)_{i,j+1/2}^n = \frac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2}{\Delta y} \\ \Delta_y^{1/2} (vu)_{i+1/2,j}^n = \frac{(vu)_{i+1/2,j+1/2} - (vu)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre:

$$(u^2)_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})^2$$

$$(uv)_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} (u_{i+1/2,j+1} + u_{i+1/2,j}) \cdot (v_{i+1/2,j+1/2} + v_{i,j+1/2})$$

Si noti infine che gli operatori $\Delta_x^{1/2}$ e $\Delta_y^{1/2}$ delle (79) e (80) possono essere sostituiti rispettivamente da Δ_x^0 e Δ_y^0 , ma con proprietà peggiori di conservatività (Arakawa, 1966).

Convergenza (=consistenza+stabilità)

La soluzione raggiunge la stazionarietà se le seguenti condizioni per $t \rightarrow \infty$ sono soddisfatte:

$$\frac{1}{\Delta t} \|u^{n+1} - u^n\|, \frac{1}{\Delta t} \|v^{n+1} - v^n\|, \frac{1}{\Delta t} \|P^{n+1} - P^n\| < \varepsilon$$

(dove $\|\dots\|$ rappresenta una norma opportuna). Non si deve considerare il denominatore della (30) in quanto le equazioni sono adimensionali ed il denominatore è dell'ordine di 1.

In questo caso le condizioni di consistenza sono quelle relative allo schema alle differenze finite delle derivate spaziali centrate.

Lo schema temporale è esplicito per cui è condizionatamente stabile. Un'analisi della stabilità per il sistema completo delle equazioni non lineari è impossibile e quindi l'analisi è condotta su una forma linearizzata del sistema ottenuta trascurando i termini $\vec{\nabla}P$ o $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u})$. In particolare le condizioni di stabilità sono:

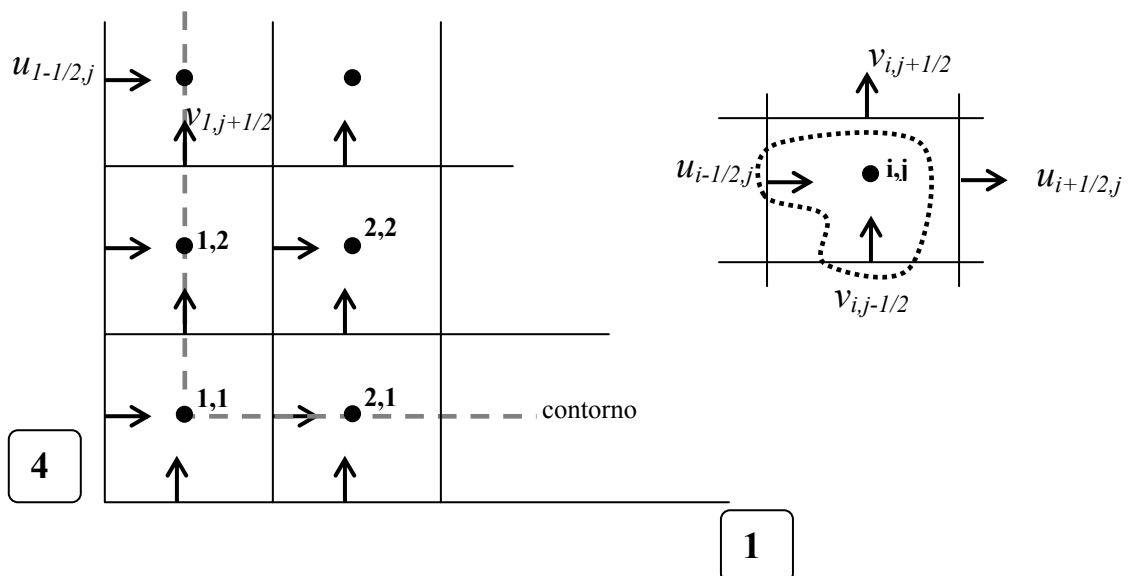
$$\frac{1}{4} (|u|^2 + |v|^2) \Delta t \text{Re} \leq 1 \quad \text{se si è trascurato } \vec{\nabla}P \tag{82}$$

$$\frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{c^2 \Delta t}{2} \right) \leq 1 \quad \text{se si è trascurato } \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}) \tag{83}$$

I valori \vec{u}, P noti al passo $n+1$, possono essere utilizzati nel calcolo risultando in uno schema tipo Gauss-Seidel (Fortin, 1971) ma più rapido e stabile (anche se non consistente nei transitori).

Condizioni al contorno

Senza entrare nei dettagli, accenniamo solo al fatto che nello schema staggered, è necessaria una procedura di interpolazione per le condizioni al contorno sulla velocità. Riferiamoci allo schema seguente:



Ad esempio sul lato 4, se la condizione al contorno è $\vec{u} = \vec{u}^*$, si ha:

$$v_{1,j-1/2} = \bar{v}[0, (j-1/2)\Delta y]$$

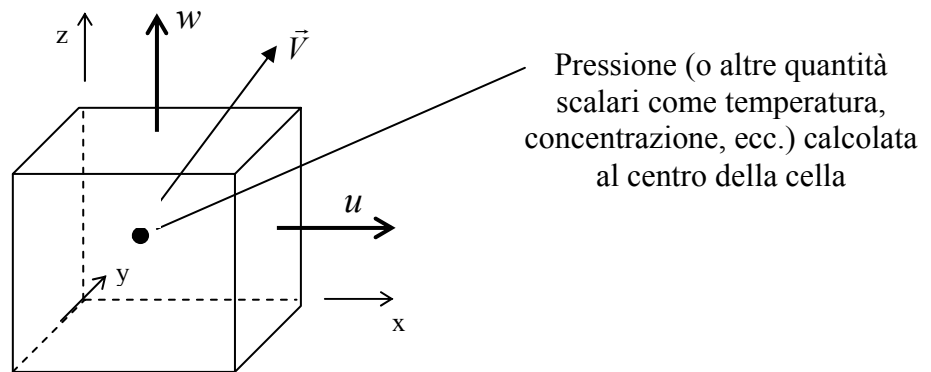
$$u_{1-1/2,j} + u_{1+1/2,j} = 2\bar{u}[0, (j-1)\Delta y]$$

9.5.1.3 Problemi 2D non-stazionari

In questi casi il termine convettivo non lineare richiede l'accoppiamento di tutte le equazioni. Anche in questo caso si può usare un metodo con compressibilità artificiale ma da un punto di vista computazionale, il procedimento è pesante.

9.5.1.4 Problemi 3D

I metodi visti in 2D possono essere estesi facilmente a 3D tenendo conto che si hanno ora 4 equazioni nelle quattro incognite velocità (3) e pressione (1). Come visto in precedenza, anche in questo caso le variabili devono essere *staggered* come nello schema seguente:



9.5.2 Formulazione vorticità-velocità

Occorre utilizzare l'equazione del trasporto della velocità applicando l'operatore rotore all'equazione di bilancio della quantità di moto. L'equazione che si ottiene scritta in forma non conservativa, è la seguente:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (84)$$

mentre nella forma conservativa:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (85)$$

a cui va aggiunta la relazione cinematica:

$$-\nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\omega} \quad (86)$$

(notiamo che si sono implicitamente imposte le condizioni di solenoidalità sia per la velocità che per la vorticità).

Il sistema (85-86) va completato con le condizioni al contorno che in pratica consistono nell'assegnare velocità e vorticità sul contorno del campo.

9.5.2.1 Problemi 2D stazionari

L'equazione della vorticità può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}\omega) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (87)$$

I termini di derivate temporali si trattano ancora utilizzando un metodo cosiddetto di falso transiente in modo che le equazioni (85-86) risultino parabolizzate nel tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}\omega) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega = 0 \\ \frac{1}{\alpha_u} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \nabla^2 \vec{u} = 0 \end{array} \right. \quad (88)$$

con le opportune condizioni al contorno. In questo modo il sistema (88) è ben posto (3 eq. In 3 incognite) e le due equazioni hanno la stessa struttura. Analogamente a quanto visto per le variabili primitive, le incognite devono essere allocate in maniera staggered affinché siano rispettate le conservazioni delle quantità integrali e, in particolare, della massa.

Senza entrare in ulteriori dettagli, si ricorda solo che il sistema può poi essere risolto utilizzando metodi impliciti, espliciti, utilizzando Crank-Nicholson o con il metodo ADI.

9.5.2.2 Problemi 2D non-stazionari

In problemi non stazionari reali, le equazioni di governo della dinamica e della cinematica sono accoppiate:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}\omega) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega = 0 \quad (89)$$

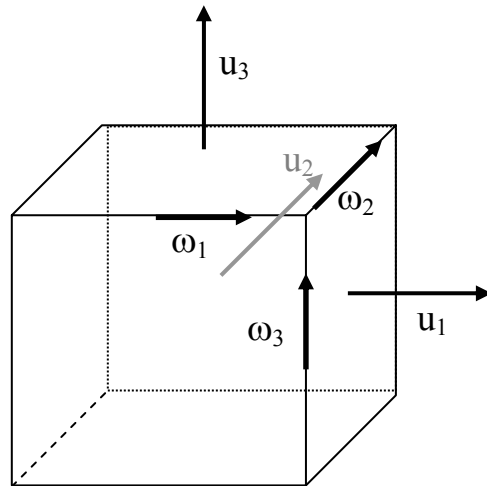
$$\nabla^2 \vec{u} = -\vec{\nabla} \times \vec{\omega} \quad (90)$$

Se si effettua un passo temporale sulla (89) e poi si risolve la (90) (utilizzando ad esempio un solutore diretto) non viene soddisfatta la conservazione della massa. Le possibilità che si hanno per superare questa difficoltà, sono le seguenti:

- Utilizzare un solutore diretto per tutte le equazioni
- Utilizzare un metodo iterativo per tutte le equazioni
- Assegnare delle condizioni integrali per le condizioni al contorno della vorticità
- Utilizzare un solutore tri-diagonale

9.5.2.3 Problemi 3D

L'equazione del trasporto della vorticità è quella completa (85). E le variabili devono essere allocate in maniera staggered, come nello schema che segue:



Le condizioni di solenoidalità per velocità e vorticità vengono imposte implicitamente.

In generale, i vantaggi della formulazione velocità-vorticità, sono i seguenti:

- L'equazione del trasporto della vorticità deve essere risolta solo dove la vorticità è realmente presente e non nell'intero campo (ad esempio se consideriamo un problema di strato limite intorno ad un profilo)
- Si elimina il calcolo della pressione
- Il metodo è facilmente estendibile a casi compressibili
- Il metodo si può estendere a flussi in sistemi di riferimento non Galileiani

Mentre gli svantaggi sono i seguenti:

- La condizione di continuità non è soddisfatta né esplicitamente né identicamente
- Il numero di incognite è 6 (in 3D)
- E' necessaria una ulteriore fase di processamento per ottenere la pressione
- Non è possibile imporre delle condizioni al contorno sulla pressione
- E' difficoltosa la trattazione di domini multiconnessi

9.5.3 Formulazione Vorticità-Potenziale vettore ($\vec{\psi}, \vec{\omega}$)

Nella formulazione in termini di potenziale vettore l'equazione di continuità viene soddisfatta identicamente ricordando che:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 0 \quad \text{identicamente.}$$

Se la condizione di solenoidalità di $\vec{\psi}$ è soddisfatta, è noto che vale la seguente relazione cinematica:

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega} \tag{91}$$

9.5.3.1 Problemi 2D stazionari

Nei casi 2D, invece del potenziale vettore, è possibile utilizzare la funzione di corrente che soddisfa ancora identicamente la continuità. Come visto in precedenza, anche in questi casi è necessario introdurre un metodo di falso transiente in modo che le equazioni che descrivono la dinamica e la

cinematica siano accoppiate il più possibile. Il sistema di equazioni da risolvere (analogo al sistema 88) è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\psi} \omega) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega = 0 \\ \frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla^2 \psi - \vec{\omega} = 0 \end{cases} \quad (92)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = -\nabla^2 \psi \\ \psi = \bar{\psi} \end{cases} \quad (93)$$

dove $\bar{\psi} = \int_0^l \vec{u} \cdot \vec{n} dl$ con \vec{n} la normale alla superficie che delimita il volume e \vec{u} la velocità nota sul contorno.

La soluzione stazionaria si ottiene per $t \rightarrow \infty$ se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

$$\frac{1}{\alpha_\omega \Delta t} \|\omega^{n+1} - \omega^n\|, \frac{1}{\alpha_\psi \Delta t} \|\psi^{n+1} - \psi^n\| < \varepsilon \quad (94)$$

L'integrazione nel tempo per il falso transiente può essere:

- implicita
- esplicita
- ADI

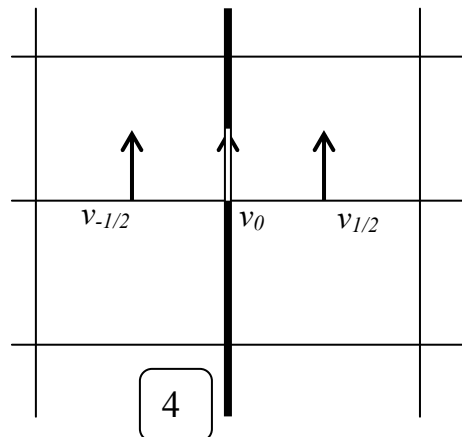
Per ciò che riguarda la locazione delle variabili, in questo caso esse vanno allocate nei nodi. E' facile mostrare che in questo caso la condizione di solenoidalità è identicamente soddisfatta scrivendo la relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$ discretizzata al centro della cella. Infatti tale allocazione corrisponde a quella staggered per la velocità:

$$\begin{aligned} u_{i,j-1/2} &= -\frac{(\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1})}{\Delta y} \\ v_{i-1/2,j} &= -\frac{(\psi_{i,j} - \psi_{-1,j})}{\Delta x} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \bullet \end{array} \begin{array}{l} i,j \\ \omega, \Psi \end{array} \quad (95)$$

La discretizzazione delle condizioni al contorno può essere effettuata tenendo conto che la funzione di corrente in generale ha associate delle condizioni di Dirichlet al contorno. Per l'equazione della vorticità, occorre utilizzare la sua definizione sul contorno.

Ad esempio per il lato 4 si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} &= -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{(v_{1/2} - v_{-1/2})}{\Delta x} = \frac{(v_{1/2} - v_0)}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{v_{1/2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \\ &= \frac{(\psi_{1,j} - \bar{\psi}_{0,j})}{\Delta x / 2} \end{aligned}$$



dove $\psi_{1,j}$ è noto perché all'interno del campo e $\bar{\psi}_{0,j}$ è noto dalle condizioni al contorno.

Si noti infine che il sistema delle equazioni di governo può essere ridotto ad un'unica equazione differenziale di quarto ordine in ψ ma, poiché compare l'operatore ∇^4 non può più essere utilizzata la tecnica di fattorizzazione.

9.5.3.2 Problemi 2D non stazionari

Nei casi 2D non stazionari, il sistema di equazioni di governo (in analogia con le equazioni 89-90) è il seguente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \times \bar{\psi} \omega) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega = 0 \quad (96)$$

$$\nabla^2 \psi = -\bar{\omega} \quad (97)$$

con le relative condizioni al contorno.

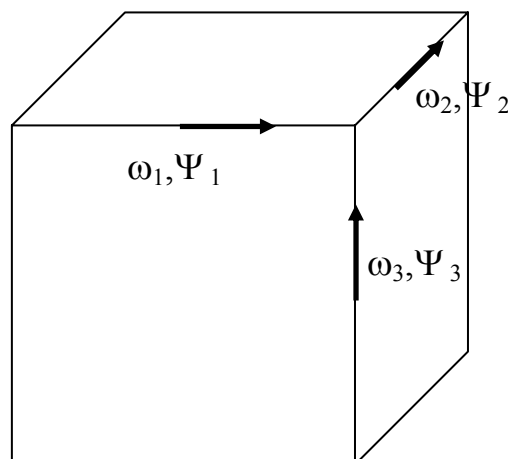
E' importante notare che se viene effettuato un passo temporale sulla prima equazione (96), e si risolve in maniera esatta la seconda utilizzando un solutore diretto, non si è in grado di seguire un transitorio reale. Infatti, la cinematica associata alla funzione di corrente necessita di una sola condizione al contorno (l'impermeabilità) come nei casi di flussi potenziali anch'essi governati da una sola equazione cinematica (l'equazione di Laplace). In analogia con la formulazione vorticità-velocità in cui la condizione di compressibilità non può essere imposta per un dato campo di vorticità, anche in questo caso non è possibile soddisfare tutte le condizioni al contorno.

E' necessario quindi accoppiare le due equazioni con uno dei metodi che seguono:

- Utilizzare un solutore diretto su entrambe le equazioni
- Metodo ADI
- Metodo iterativo

9.5.3.3 Problemi 3D

La formulazione 3D è molto complessa perché l'imposizione implicita delle condizioni di solenoidalità sia per la vorticità che per il potenziale vettore impongono l'utilizzo di una mesh staggered. Inoltre, le condizioni al contorno sul potenziale vettore non sono univocamente definite in quanto esso è definito a meno del gradiente di un campo solenoidale. Senza entrare in ulteriori dettagli, lo schema della mesh è il seguente:



In generale, i vantaggi della formulazione vorticità-potenziale vettore, sono i seguenti:

- Le condizioni di continuità sono identicamente soddisfatte
- In 2D si può utilizzare una mesh non staggered
- La pressione non appare nella formulazione
- E' facilmente estendibile a sistemi di riferimento non Galileiani

Mentre gli svantaggi sono i seguenti:

- Difficoltà nell'estensione a 3D in particolare in presenza di condizioni *inflow* e *outflow*
- E' necessario un ulteriore processamento dei dati per il calcolo della pressione
- Non si possono trattare problemi con condizioni al contorno sulla pressione
- E' necessario introdurre anche il potenziale scalare per trattare flussi compressibili.

Bibliografia

- Batchelor F.R.S., "An introduction to Fluid Dynamics", Cambridge Univ. Press, 1967.
- Peyret R., Taylor T.D., "Computational methods for fluid flows", Springer Series in Comp. Phys., 1982.
- Roachie P.J., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publ., 1972.
- Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A., "Spectral methods in fluid dynamics", Springer-Verlag, 1988.
- Wait R., Mitchell A.R., "Finite element analysis and applications", John Wiley & Sons, 1985.
- Thual O., Sulem P.L., "Methodes spectrales pour des problemes aux limites simples", Minist. Des Tranp., 1984.
- Hinze J.O., « Turbulence », McGraw-Hill, 1975.
- Rodi W., « Turbulence models and their applications in hydraulics – a state of the art », Inst. Fur hydromechanik, 1980.
- Tennekes H., Lumley J.L., "A first course in turbulence", the M.J.T., 1980.
- Jones W.P., "Numerical solutions of elliptic flow equations", Imp. Coll., London, 1981.