

5 L'ala incompressibile

5.1 Schema vorticoso dell'ala finita

Come per lo studio del profilo (Cap.IV) anche ora immagineremo di sostituire il corpo alare con aria a concentrazione vorticoso di intensità:

$$\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u} \quad (5.1)$$

Avremo così tanti filetti vorticosi elementari aventi una direzione approssimativamente coincidente con l'apertura alare (l'asse y in fig.1), che posseggono una intensità pari al flusso di ω :

$$\omega d\sigma \equiv d\Gamma \quad (5.2)$$

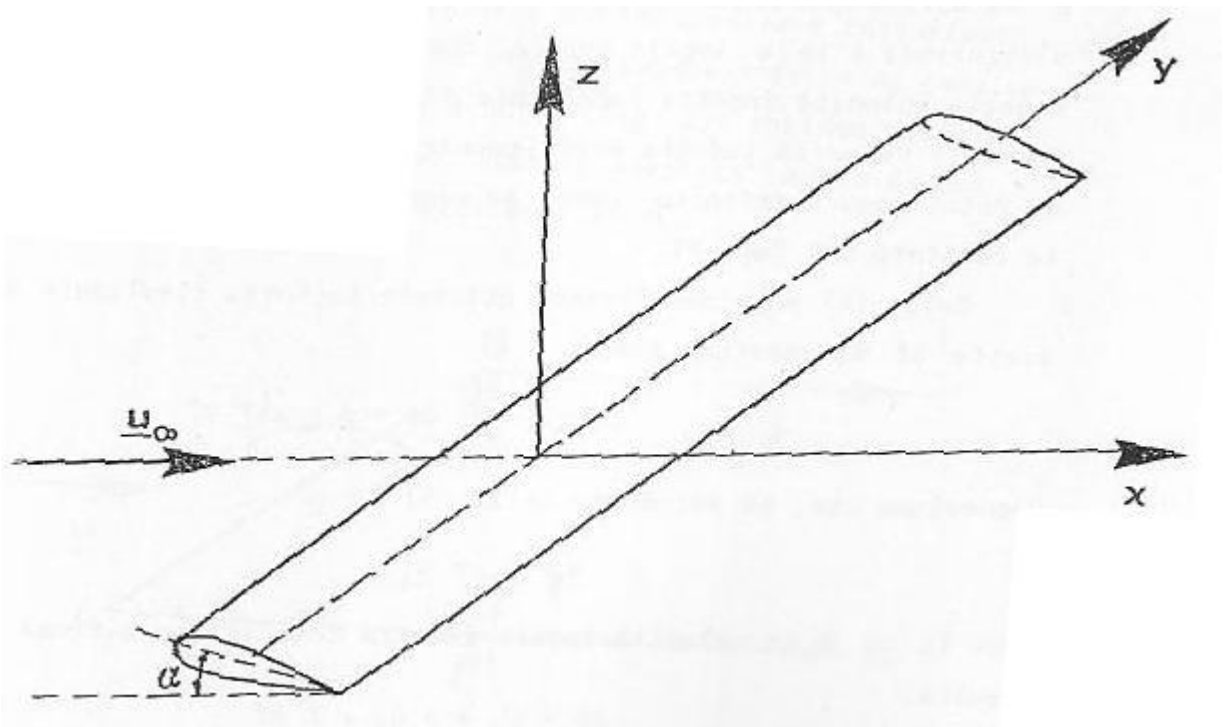


Figura 1

dove $d\sigma$ è un elemento della sezione trasversale dell'ala, per esempio:

$$d\sigma = dx dz$$

mentre $d\Gamma$ è la circolazione attorno al filetto.

Tale vortice elementare subisce una forza, data dal teorema di Kutta-Joukowski pari a:

$$\underline{df}' = \rho \underline{u} \wedge \underline{\omega} d\sigma$$

per unità di lunghezza.

Un elemento di vortice elementare, di lunghezza $d\ell$, subisce quindi una forza pari a:

$$d\underline{f} = \rho \underline{u} \wedge \underline{\omega} d\sigma d\ell \quad (5.3)$$

oppure:

$$d\underline{f} = \rho \underline{u} \wedge d\underline{\Gamma} d\ell \quad (5.4)$$

oppure:

$$d\underline{f} = \rho \underline{u} \wedge \underline{\omega} dV \quad (5.5)$$

È da notare che nelle (5.3), (5.4) e (5.5) la velocità \underline{u} da prendere in considerazione è la \underline{u} locale totale, che è la somma vettoriale della \underline{u}_∞ e della velocità indotta localmente da tutti i vortici presenti nel campo: tale velocità indotta è ovviamente nulla nel caso di un solo vortice rettilineo infinito, come, ad esempio, nel caso del cilindro rotante trattato nell'ambito dei flussi potenziali 2D. Dalla (5.4) possiamo intanto ottenere la forza risultante su di un tratto $d\ell$ di apertura alare:

$$d\underline{F} = \int_\sigma \frac{d\underline{f}}{d\sigma} d\sigma = \rho \underline{u} \wedge \underline{\Gamma} d\ell \quad (5.6)$$

Osserviamo che, se scindiamo nella (5.6) la \underline{u} :

$$\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{u}_i \quad (5.7)$$

dove la \underline{u}_i è la velocità locale indotta dall'intero sistema vorticoso, risulta:

$$d\underline{F} = d\underline{L} + \rho \underline{u}_i \wedge \underline{\Gamma} d\ell \quad (5.8)$$

dove, come per l'ala infinita:

$$d\underline{L} = \rho \underline{u}_\infty \wedge \underline{\Gamma} d\ell \quad (5.9)$$

dà il teorema di Kutta-Joukowski per l'ala finita.

La sola, ovvia, differenza che c'è tra la (5.9) e la trattazione del Cap. IV consiste nel fatto che ora la circolazione Γ è, in generale, diversa nelle varie sezioni dell'ala (vedi fig.1):

$$\Gamma = \Gamma(y) \quad (5.10)$$

Lo schema vorticoso dell'ala finita, infatti, non può essere uguale a quello dell'ala infinita, pur essendo nei due casi prodotto sempre dai fenomeni di attrito fluidodinamico sulla superficie alare. Nel caso presente un vortice, prodotto lungo l'apertura alare (vortice aderente) e diretto con buona approssimazione lungo di essa, non può continuare oltre l'apertura alare nella stessa direzione, poiché subirebbe una forza (5.4) non sorretta dalla reazione di una parte solida. D'altra parte il teorema di Kelvin dice che un vortice è infinitamente lungo: al termine dell'ala esso si ripiega dunque a ferro di cavallo in una direzione tale da subire forza nulla (fig.2): abbiamo così un "vortice a staffa", costituito da un "vortice aderente" AB e da due prolungamenti: "vortici liberi" diretti come la \underline{u} .

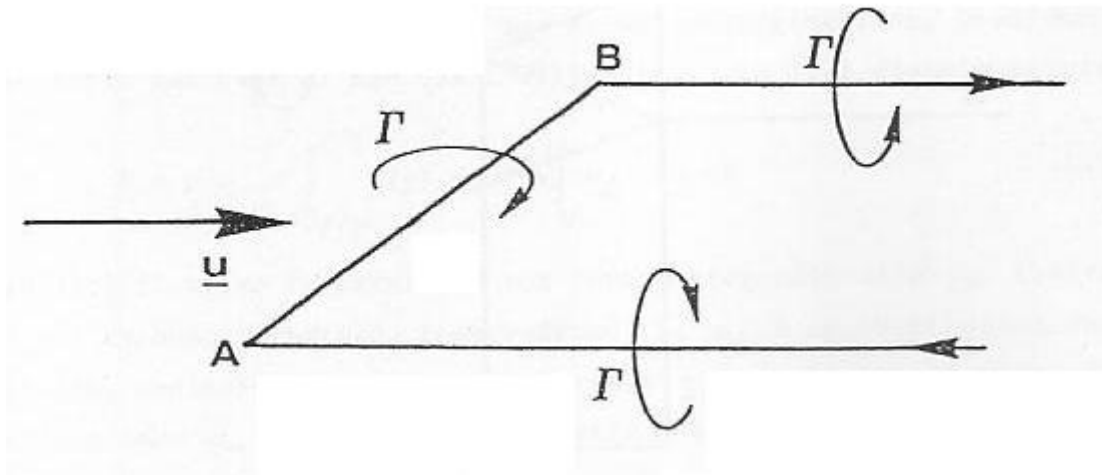


Figura 2

Uno schema più realistico consiste in un fascio di vortici aderenti che si staccano con continuità formando una scia vorticoso (fig.3), e realizzando una Γ che dipende dalla posizione lungo l'apertura alare.

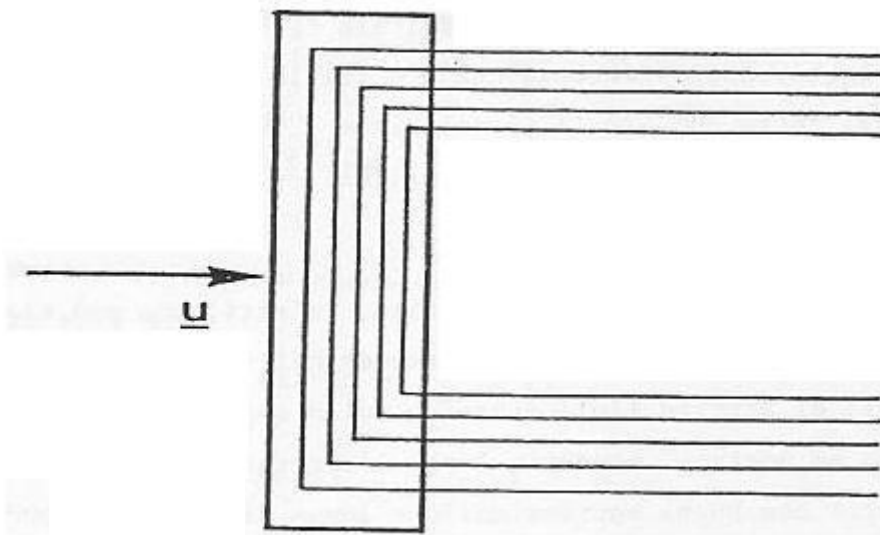


Figura 3

Il motivo fisico di tale comportamento del fluido consiste nel fatto che sotto l'ala si ha un massimo di sovrappressione in mezzeria, cosicché l'aria è ivi spinta verso le estremità dell'ala, mentre al di sopra, per motivi opposti, essa è spinta verso la mezzeria (fig.4).

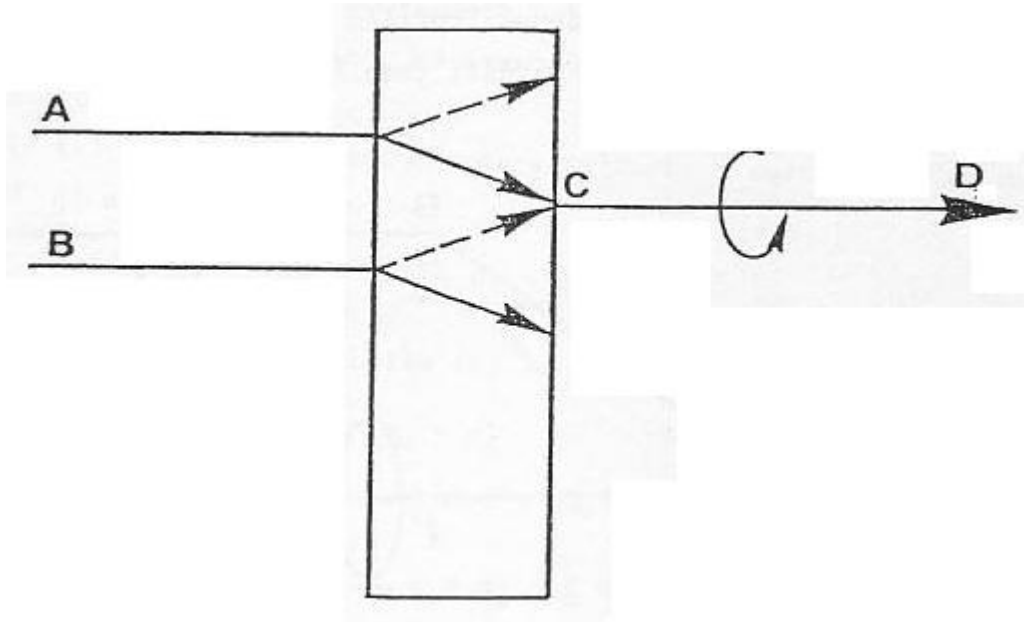


Figura 4

I filetti fluidi ACB e BCD, nel ricongiungersi a valle dell'ala, si trovano con velocità trasversale diversa, generando quindi una rotazione attorno alla direzione media del moto, CD.

5.2 Forze agenti sull'ala

Per valutare tali forze occorre riprendere la (5.3), o la (5.5), ed integrarla su tutta la zona vorticoso che circonda l'ala, avendo cura di scindere la \underline{u} nelle sue componenti:

$$\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{u}_a + \underline{u}_\ell \quad (5.11)$$

dove la \underline{u}_a è la velocità indotta in un dato punto dai vortici aderenti, e la \underline{u}_ℓ è la velocità indotta dai vortici liberi che, secondo lo schema di fig.3, si staccano dall'ala. Avremo quindi:

$$\underline{F} = \rho \underline{u}_\infty \wedge \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} dy \int_\sigma \underline{\omega} d\sigma + \rho \int_V \underline{u}_a \wedge \underline{\omega} dV + \rho \int_V \underline{u}_\ell \wedge \underline{\omega} dV \quad (5.12)$$

Osserviamo che nel primo integrale della (5.12) si ha:

$$\int_\sigma \underline{\omega} d\sigma = \text{flusso di } \underline{\omega} = \underline{\Gamma}(y)$$

e che, come vedremo subito, il secondo integrale è nullo per ala e profilo costante (cilindrica) e, in una prima approssimazione, possiamo trascurarlo nei casi di ala quasi cilindrica. La (5.12) diventa allora:

$$\underline{F} = \rho \underline{u}_\infty \wedge \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \underline{\Gamma}(y) dy + \rho \int_V \underline{u}_\ell \wedge \underline{\omega} dV \quad (5.13)$$

Nella (5.13) il primo integrale dà una forza ortogonale alla \underline{u}_∞ (portanza); nel secondo integrale, come vedremo, la \underline{u}_ℓ è approssimativamente verticale, cosicché il prodotto vettoriale $\underline{u}_\ell \wedge \underline{\omega}$ risulta diretto all'incirca come \underline{u}_∞ : esso dà dunque quella che viene chiamata “resistenza indotta”.

Dimostriamo ora che il secondo integrale della (5.12) è nullo se i vortici aderenti all'ala sono paralleli. A tal fine osserviamo che detto integrale è la somma dei contributi di vortici elementari distribuiti sul piano alare, del tipo di quelli riprodotti in fig.5: vogliamo ora sommare le forze che due particelle vorticosi, P e Q, subiscono per effetto delle vorticità indotte su Q dal vortice sito in P e su P dal vortice sito in Q. Applichiamo la (5.4), chiamando semplicemente con $\underline{\Gamma}$, invece che $d\underline{\Gamma}$, le circolazioni:

$$d\underline{F}_Q = \rho \underline{u}_2 \wedge \underline{\Gamma}_2 dy_2 \quad (5.14)$$

e:

$$d\underline{F}_P = \rho \underline{u}_1 \wedge \underline{\Gamma}_1 dy_1 \quad (5.15)$$

Ma dalla legge di induzione:

$$\underline{u}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\Gamma}_1 dy_1 \wedge PQ}{r^3} \quad (5.16)$$

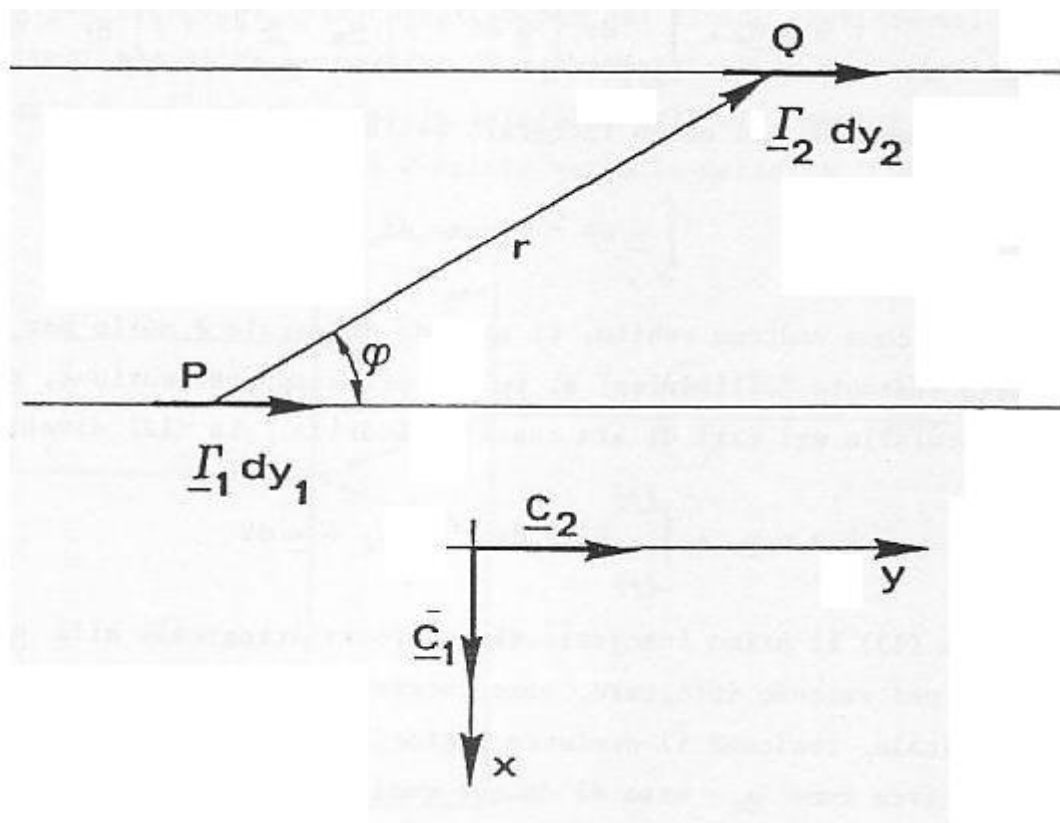


Figura 5

La \underline{u}_2 è dunque diretta secondo l'asse z (fig.5). Allora:

$$\underline{u}_2 = |u_2| \underline{c}_3 = \frac{\Gamma_1 dy_1 \text{sen}\phi}{4\pi r^2} \underline{c}_3 \quad (5.17)$$

La (5.17), posta nella (5.14), dà:

$$dF_Q = \frac{\rho \Gamma_1 \text{sen}\phi}{4\pi r^2} \underline{c}_3 \wedge \underline{\Gamma}_2 dy_1 dy_2 \quad (5.18)$$

Ma:

$$\underline{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \underline{c}_2 \quad (5.19)$$

mentre:

$$\underline{c}_3 \wedge \underline{c}_1 \equiv -\underline{c}_1 \quad (5.20)$$

Sostituendo nella (5.18) risulta:

$$dF_Q = -\frac{\rho \Gamma_1 \Gamma_2 \text{sen}\phi}{4\pi r^2} \underline{c}_1 dy_1 dy_2 \quad (5.21)$$

Per quanto riguarda la (5.15) si procede in modo analogo:

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\Gamma}_2 dy_2 \wedge QP}{r^3} \quad (5.22)$$

salvo il fatto che ora appare il vettore QP invece che PQ, come nella (5.16). Allora:

$$\underline{u}_1 = -|u_1| \underline{c}_3 = -\frac{\Gamma_2 dy \text{sen}\phi}{4\pi r^2} \underline{c}_3$$

Procedendo come per la dF_Q si ha infine:

$$dF_P = -dF_Q \quad (5.23)$$

Dunque, come preannunciato, la forza risultante dovuta alle velocità indotte dai vortici aderenti (2° integrale della (5.12)) è costituita da forze elementari che si elidono a due a due. Come già detto, tale risultato può essere accettato solo per ali di forma approssimativamente cilindrica: avremo altrimenti un ulteriore piccolo contributo alla resistenza indotta (forza risultante secondo la direzione della \underline{u}_∞).

5.3 Considerazioni fisiche sulla portanza e sulla resistenza indotta

Consideriamo un aeroplano come una macchina che, volando a velocità u_∞ , spinge una certa quantità di aria verso il basso, ricevendone per reazione una forza sustentatrice L , diretta verso l'alto. Se m è la massa d'aria interessata ogni secondo di tempo e v' è la velocità finale ad essa impressa all'infinito a valle, avremo:

$$L = m v' \quad (5.24)$$

D'altra parte osserviamo che tale massa d'aria, inizialmente in quiete, resta alla fine con una energia cinetica pari a:

$$T = \frac{1}{2} m v'^2 \quad (5.25)$$

Tale energia cinetica deve coincidere con il lavoro fatto dall'aeroplano sull'aria; ne consegue una resistenza (drag) da vincere mediante il sistema propulsivo; essa è data da:

$$u_\infty D = \frac{1}{2} m v'^2 \quad (5.26)$$

Dalla (5.26) e dalla (5.24) si ottiene:

$$D = L \frac{v'}{2 u_\infty} \quad (5.27)$$

Se v è la velocità media indotta dal sistema vorticoso sul piano alare (fig.6), la risultante R , ortogonale alla direzione della velocità locale totale u . Ha una componente verticale, L , che è la portanza, ed una componente D , la resistenza indotta, avente la direzione della u_∞ .

Allora:

$$\alpha_i = \frac{v}{u_\infty} = \frac{D}{L} \quad (5.28)$$

Confrontando la (5.28) con la (5.27) risulta:

$$v = \frac{1}{2} v' \quad (5.29)$$

La (5.29) mostra che la massa d'aria m , spinta verso il basso dalle azioni aerodinamiche dell'ala sull'aria, giunta in prossimità dell'ala, ha acquistato una velocità verticale v che è la metà esatta di quella, v' , che acquisterà in totale allorquando l'aeroplano si sarà allontanato definitivamente.

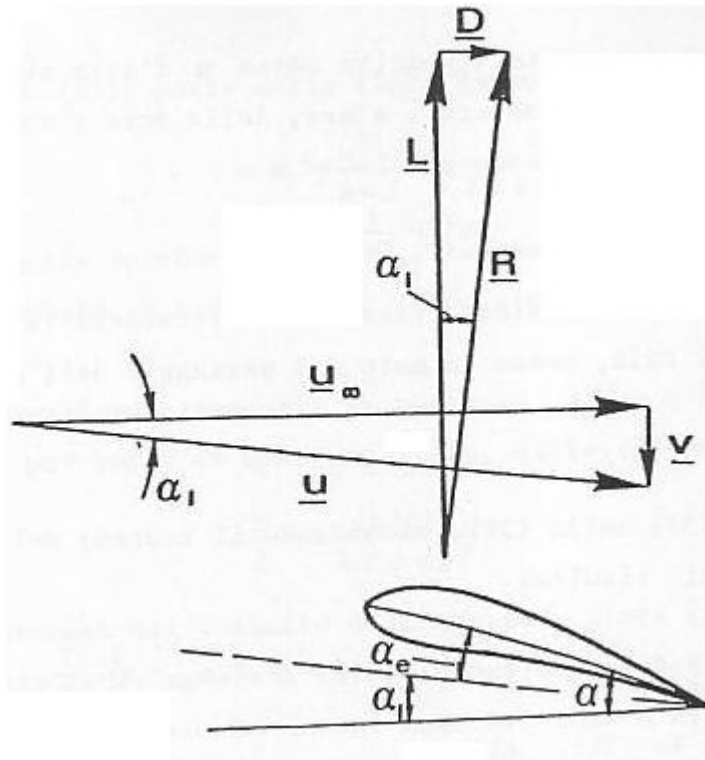


Figura 6

Che così debba essere si vede anche dal fatto che la v' è una velocità indotta dai vortici infinitamente lunghi mentre la v è la velocità indotta dai vortici semi-infiniti. Per completare le nostre osservazioni ricordiamo la formula della velocità indotta da un vortice infinitamente lungo:

$$u = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{r} \quad (5.30)$$

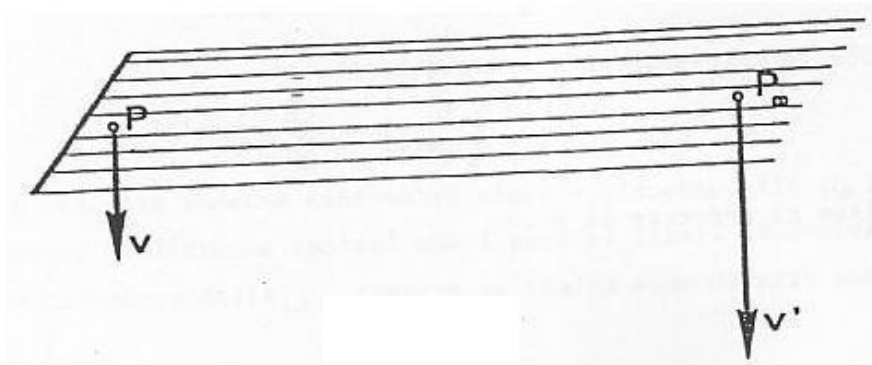


Figura 7

Poiché ora un generico punto P_∞ della massa m d'aria si trova a distanza dell'ordine di ℓ , apertura alare, della scia vorticoso formata dal passaggio dell'ala, avremo per la v' :

$$v' \approx \frac{1}{k} \frac{\Gamma}{\ell} \quad (5.31)$$

Chiamiamo inoltre S la sezione trasversale attraverso la quale passa detta massa m di aria, messa in moto dal passaggio dell'aeroplano. Avremo:

$$m = \rho S u_\infty \quad (5.32)$$

Introduciamo la (5.32) nella (5.24), ricordando il teorema della portanza di Kutta-Joukowski; risulta:

$$L = \rho u_\infty \Gamma \ell = \rho S u_\infty v' \approx \rho S u_\infty \cdot \frac{1}{k} \frac{\Gamma}{\ell} \quad (5.33)$$

avendo utilizzato la (5.31). Allora:

$$S \approx k \ell^2 \quad (5.34)$$

e, dalla (5.32):

$$m = k \rho u_\infty \ell^2 \quad (5.35)$$

Con la conclusione che la massa d'aria interessata dal fenomeno è proporzionale al quadrato dell'apertura alare. Ne consegue che per un dato peso dell'aeroplano e, quindi, per data portanza e, in base alla (5.24), per assegnata quantità di moto finale dell'aria originariamente in quiete, l'energia cinetica impressa all'aria è tanto minore quanto maggiore è la massa d'aria: infatti per:

$$L = m v' = \text{costante}$$

si ha che la corrispondente energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m v')^2}{m} \quad (5.36)$$

diminuisce al crescere di m .

Le (5.36) e (5.35), poste nella (5.26) danno nel nostro caso:

$$D = \frac{L^2}{2 m u_\infty} = \frac{L^2}{2 k \rho u_\infty^2 \ell^2} \quad (5.37)$$

Al crescere dell'apertura alare, ℓ , la resistenza indotta, a parità di portanza totale, è inversamente proporzionale al quadrato dell'apertura alare.

Se poi vogliamo paragonare la portanza, L/ℓ , e la resistenza indotta, D/ℓ , per unità di apertura alare, dalla (5.37) si ha:

$$\frac{D}{\ell} = \frac{(L/\ell)^2}{2k\rho u_\infty^2 \ell} \quad (5.38)$$

Dunque al crescere all'infinito dell'apertura alare (profilo) la resistenza indotta tende ancora a zero: la ragione fisica risiede proprio nel fatto già osservato che in tal caso la massa d'aria interessata tende all'infinito.

5.4 La teoria del filetto portante: caso della distribuzione ellittica della portanza

Se l'ala non ha allungamento troppo piccolo potremo concentrare i vortici aderenti sulla linea dei fuochi dei singoli profili: ne ricaviamo uno schema del tipo illustrato in fig. 7 o, al limite, uno schema a "ferro di cavallo" (fig.2). La (5.13) fornisce allora:

$$\underline{L} = \rho \underline{u}_\infty \wedge \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underline{\Gamma}(y) dy \quad (5.39)$$

$$\underline{D}_i = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underline{u}_\ell \wedge \underline{\Gamma}(y) dy \quad (5.40)$$

Poiché le velocità indotte sono molto piccole rispetto alla u_∞ , possiamo introdurre l'ulteriore ipotesi che i vortici liberi si evolvano nella stessa direzione della \underline{u}_∞ (mentre in realtà sono diretti secondo le \underline{u} locali nella scia). Tale ipotesi semplificatrice, dovuta a Prandtl, permette di dire che la \underline{D}_i , data dalla (5.40), ha il verso della \underline{u}_∞ , poiché le \underline{u}_ℓ risultano in tal caso tutte dirette ortogonalmente al piano xy. Avremo allora, in termini scalari:

$$L = \rho u_\infty \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Gamma(y) dy \quad (5.41)$$

$$D_i = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} u_\ell(y) \Gamma(y) dy \quad (5.42)$$

Nello schema del vortice a staffa (distribuzione uniforme della circolazione) la $u_\ell(y)$ è data dalla somma dei contributi di due vortici semi-infiniti:

$$u_\ell(y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma}{\frac{\ell}{2} - y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma}{\frac{\ell}{2} + y} \quad (5.43)$$

ossia:

$$u_\ell(y) = \frac{\Gamma \ell}{\pi(\ell^2 - 4y^2)} \quad (5.44)$$

Tale risultato (fig.8) è troppo grossolano per lo studio degli effetti sull'ala (se introdotto nella (5.42) darebbe un integrale divergente); lo schema "vortice a staffa" può tuttavia essere utile in altre

circostanze, come lo studio degli effetti sugli impennaggi di coda, dell'effetto suolo, dell'effetto sulla seconda ala di un biplano.

Supponiamo, invece, di aver realizzato un'ala in modo da ottenere la "distribuzione ellittica della circolazione". In tal caso la $\Gamma(y)$ si riduce a zero alle estremità alari, in coerenza con il fatto che ivi deve ridursi a zero la differenza Δp delle pressioni ventrale e dorsale. Avremo (fig.9):

$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{\eta^2}{(\ell/2)^2} = 1 \quad (5.45)$$

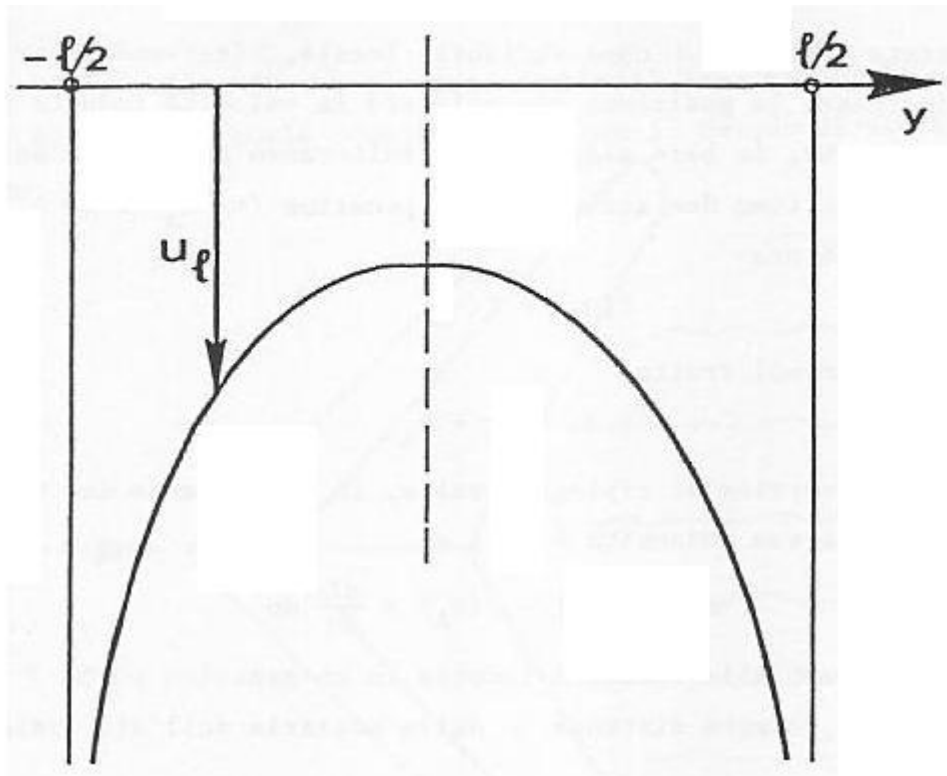


Figura 8

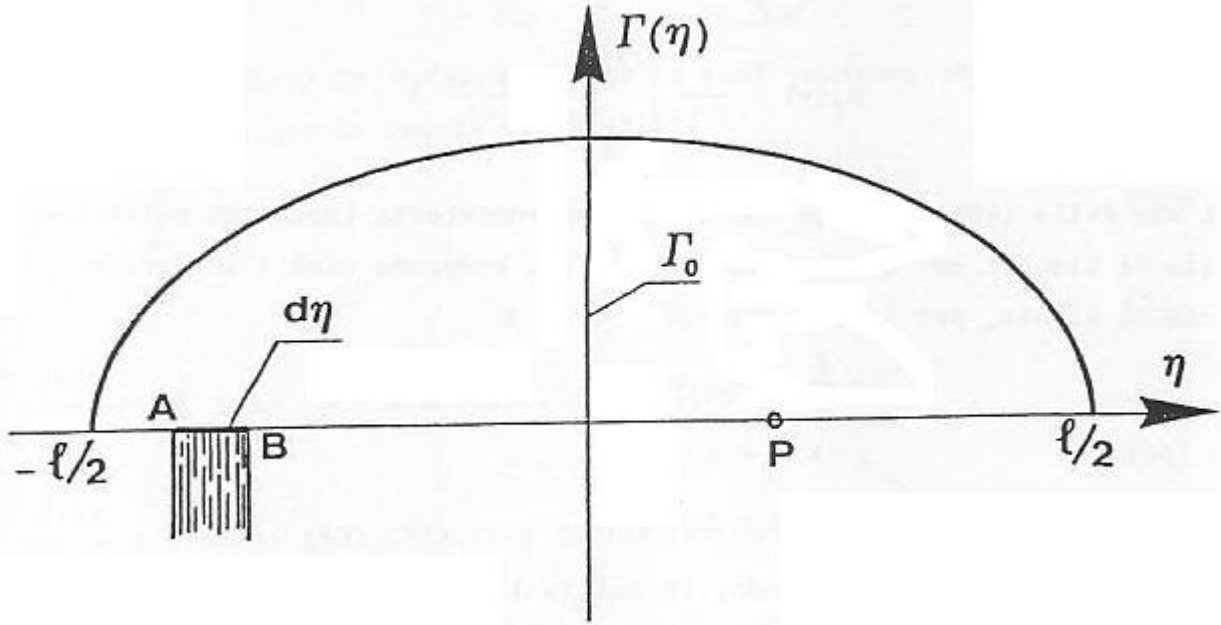


Figura 9

dove è stata usata la η come variabile locale, riservando la variabile y per designare la posizione ove valutare la velocità indotta dai vortici liberi, che, in base alla (5.45), risulteranno nella scia dell'ala.

Se consideriamo due sezioni alari prossime ($\eta = \eta_A$ ed $\eta = \eta_B$ in figura 9), poiché ora:

$$\Gamma(\eta_B) \neq \Gamma(\eta_A)$$

concludiamo che nel tratto:

$$d\eta = \eta_B - \eta_A$$

una parte del vortice si ripiega a valle, in conseguenza del teorema di Helomotz; la sua intensità è pari a:

$$d\Gamma = \Gamma(\eta_B) - \Gamma(\eta_A) = \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta \quad (5.46)$$

Il suo contributo alla velocità indotta in un generico punto P della apertura alare, avente distanza y dalla mezzeria dell'ala, vale:

$$du_\ell = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{y - \eta} \quad (5.47)$$

Dalla (5.46) e dalla (5.47) si trae, per la velocità indotta dalla scia nel punto P:

$$u_\epsilon(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \quad (5.48)$$

L'uso della (5.48) va fatto con la stessa accortezza impiegata nella teoria di Glauert per il profilo: spezzare cioè l'integrale che vi figura, per i tre intervalli:

$$-\frac{\ell}{2} \leq \eta \leq y - \epsilon \quad (5.49)$$

$$y - \epsilon \leq \eta \leq y + \epsilon \quad (5.50)$$

$$y + \epsilon \leq \eta \leq \frac{\ell}{2} \quad (5.51)$$

Nel caso, che stiamo trattando, in cui la linea dei fuochi sei singoli profili è rettilinea ed ortogonale alla \underline{u}_∞ , si può vedere, con lo stesso metodo usato per i profili, che l'intervallo (5.50) non dà che un contributo dell'ordine di ϵ ; diverso sarebbe il caso di un'ala a freccia (fig.10), per la quale occorre modificare in metodo di studio, come vedremo.

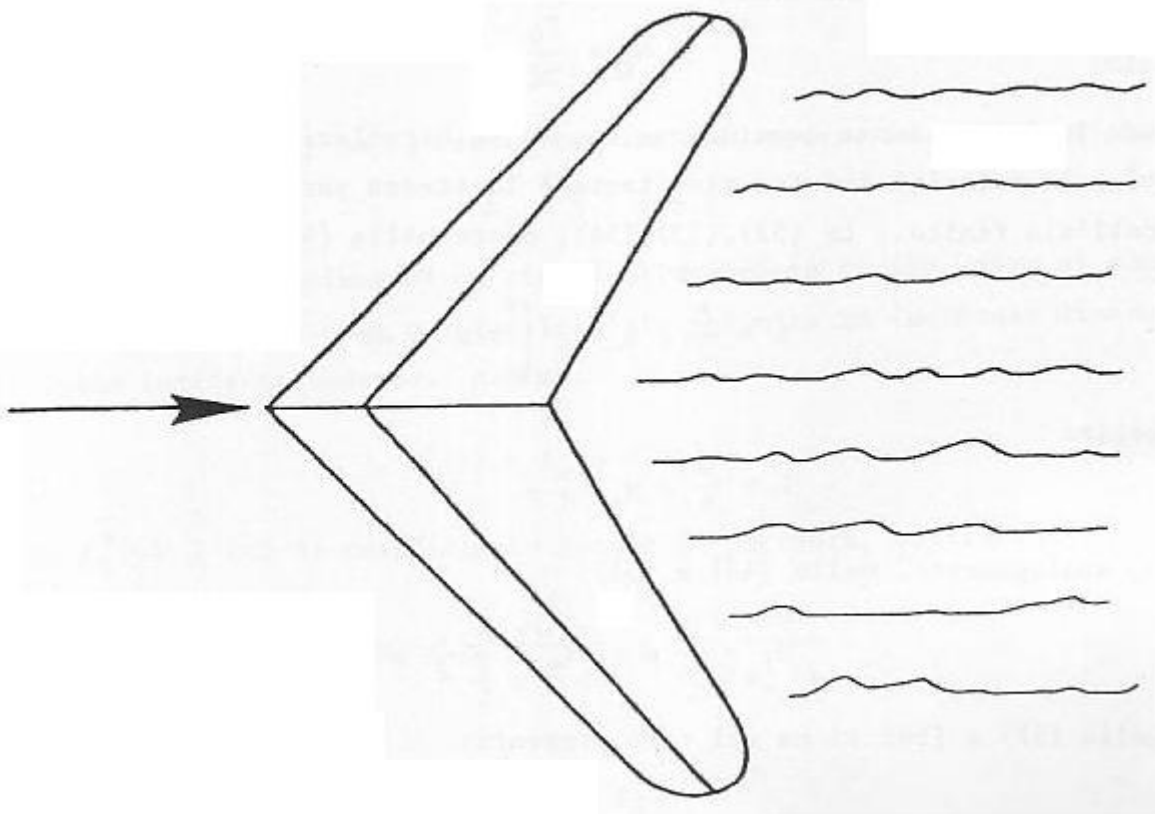


Figura 10

Per calcolare la $u_\epsilon(y)$ mediante la (5.48) poniamo, analogamente a quanto facemmo per la teoria del profilo:

$$\eta = -\frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (5.52)$$

$$y = -\frac{\ell}{2} \cos \phi \quad (5.53)$$

dove ora ℓ è la apertura alare. Dalla (5.45), allora:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sin \theta \quad (5.54)$$

Con le posizioni (5.52), (5.53), (5.54) la (5.48) diventa:

$$u_\ell = \frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} \int_0^\pi \cos \theta \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \phi} \quad (5.55)$$

L'integrale della (5.55) è stato già studiato nell'ambito della teoria di Glauert, ove è stato chiamato I_1 ; risultò $I_1 = \pi$. Allora dalla (5.55):

$$u_\ell = \frac{\Gamma_0}{2\ell} \quad (5.56)$$

con la interessante conclusione che se la circolazione $\Gamma(\eta)$ è ellittica la velocità indotta risultante è la stessa per tutte le sezioni dell'ala finita. Le (5.52), (5.53), (5.54), poste nella (5.41), danno infine:

$$L = \frac{\ell}{2} \rho u_\infty \Gamma_0 \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi$$

ossia:

$$L = \frac{\pi}{4} \rho u_\infty \Gamma_0 \ell \quad (5.57)$$

e, analogamente, dalle (5.42) e (5.56):

$$D_i = \frac{\pi}{4} \rho u_\ell \Gamma_0 \ell = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 \quad (5.58)$$

Dalle (5.57) e (5.58) si ha nel caso presente:

$$D_i = \frac{2L^2}{\pi \rho u_\infty^2 \ell^2} \quad (5.59)$$

Da confrontare con la formula approssimata (5.37).

È interessante notare che dalla (5.59) risulta che la resistenza indotta è legata alla portanza per unità di apertura (L/ℓ) e non, come ci potrebbe attendere, dal carico alare (L/S). Ovviamente risulta dalla (5.56):

$$D_i = \alpha_i L = \frac{u_\ell}{u_\infty} L = \frac{\Gamma_0}{2\ell u_\infty} L \quad (5.60)$$

in coerenza con le (5.57) e (5.58).

Vogliamo ora fare alcune interessanti considerazioni. Sia:

$$\alpha = \alpha(y) \quad (5.61)$$

il calettamento di una generica sezione dell'ala, valutato a partire dalla incidenza di portata nulla. Se il profilo ottenuto appartiene ad un'ala infinita abbiamo già visto che per il coefficiente di portanza si ha:

$$C_L^* = A_\infty \alpha \quad (5.62)$$

dove la costante A_∞ ha il valore teorico 2π , mentre in pratica si ha:

$$A_\infty \approx 5,7 \div 5,8$$

Se il profilo appartiene ad un'ala di allungamento finito, esso si comporta (vedi fig.6) come un profilo d'ala infinita ad incidenza diminuita della incidenza indotta. Avremo:

$$C_L^*(y) = A_\infty \{ \alpha - \alpha_i \} \quad (5.63)$$

dove $C_L^*(y)$ è ora il coefficiente locale di portanza, ossia:

$$C_L^*(y) = \frac{dL}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 dS} = \frac{\rho u_\infty \Gamma dy}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 dS}$$

dove:

$$dS = c dy$$

è la superficie in pianta del tratto d'ala compreso tra due sezioni operate a distanza dy , mentre:

$$c = c(y)$$

è la corda locale del profilo. Allora:

$$C_L^*(y) = \frac{2\Gamma(y)}{u_\infty c(y)} \quad (5.64)$$

Se la circolazione è ellittica vale la (5.54): se ne conclude che se:

$$c(y) = c_0 \operatorname{sen} \theta = c_0 \left[1 - \left(\frac{y}{\ell/2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.65)$$

ossia se la pianta dell'ala è costituita da due semi-ellissi (fig.11), dalla (5.64) si ha:

$$C_L^*(y) = \frac{2\Gamma}{u_\infty c_0} = \text{cost.} \quad (5.66)$$

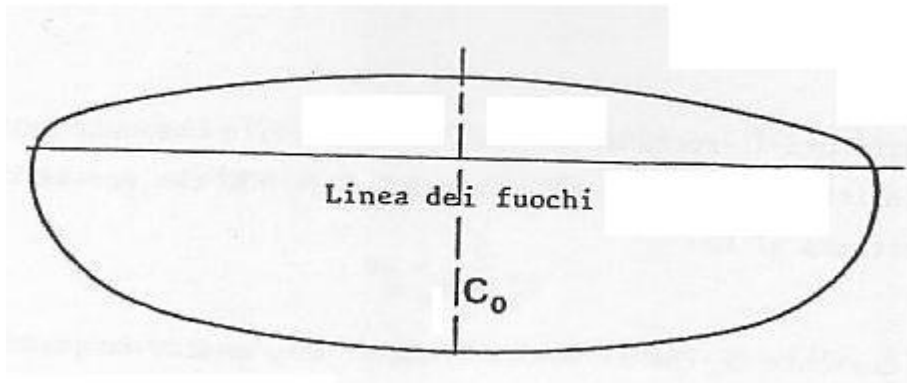


Figura 11

mentre dalla (5.63) risulta che anche:

$$\alpha = \alpha(y) = \text{cost.} \quad (5.67)$$

Un'ala del tipo di fig.11, a calettamento fisso lungo l'apertura, realizza quindi una circolazione ellittica, a qualsiasi incidenza. Ovviamente anche un'ala rettangolare può realizzare, sotto opportune condizioni, una circolazione ellittica, ossia una distribuzione ellittica della portanza, ma solo ad una data incidenza in mezzeria; variando la incidenza avremo una diversa distribuzione. Comunque, la (5.64) e la (5.63) permettono di valutare lo svergolamento, generalmente occorrente, per ottenere un'assegnata circolazione ellittica. Per l'ala rettangolare di corda data si ha ad esempio, dalle (5.64) e (5.63):

$$\alpha(y) = \alpha_i + \frac{2\Gamma_0 \text{sen}\theta}{A_\infty u_\infty c} \quad (5.68)$$

dove, dalla (5.56):

$$\alpha_i = \frac{u_i}{u_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2\ell u_\infty} \quad (5.69)$$

Per lo svergolamento dunque:

$$\delta(y) = \alpha(0) - \alpha(y) = \frac{2\Gamma_0}{A_\infty u_\infty c} (1 - \text{sen}\theta) \quad (5.70)$$

È subito visto che per diversa Γ_0 , cioè per diverso carico alare, occorre fornire all'ala uno svergolamento differente, se si desidera mantenere una distribuzione ellittica della portanza.

Valutiamo ora la portanza totale di un'ala a forma ellittica in pianta (fig.11) in funzione dell'angolo di incidenza. Le formule da usare sono la (5.57), la (5.66) e la (5.63) oltre alla (5.69). Dalla (5.57) si ha intanto:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 S} = \frac{\pi \Gamma_0 \ell}{2 u_\infty S} \quad (5.71)$$

dove ora:

$$S = \frac{\pi}{4} \ell c_0$$

Ma, essendo $dS = c(y) dy$:

$$dL = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 C_L^*(y) c(y) dy$$

e:

$$L = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} C_L^*(y) c(y) dy \quad (5.72)$$

poiché dalla (5.66) risulta che:

$$C_L^*(y) = \text{cost.} = C_L^*$$

la (5.72) porge:

$$L = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 C_L^* \int_{-\ell/2}^{\ell/2} c(y) dy \quad (5.73)$$

Dal confronto della (5.73) con la (5.71) si ottiene, in base alla (5.63):

$$C_L = C_L^* = A_\infty (\alpha - \alpha_i) \quad (5.74)$$

come del resto risulta dal confronto diretto della (5.71) con la (5.66). Per un'ala a forma ellittica, come in fig.11), a calettamento fisso, il coefficiente di portanza relativo alla intera ala coincide con quello relativo ai profili delle singole sezioni. Infine dalle (5.69) e (5.71) risulta:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi \lambda} \quad (5.75)$$

Avendo definito con:

$$\lambda = \frac{\ell^2}{S} \quad (5.76)$$

l'allungamento alare: per un'ala rettangolare esso coincide con il rapporto tra apertura alare e corda dei profili.

Dalle (5.75) e (5.74) si ottiene infine:

$$C_L = \frac{A_\infty}{1 + \frac{A_\infty}{\pi \lambda}} \alpha \quad (5.77)$$

ossia posto:

$$A_\lambda = \frac{A_\infty}{1 + \frac{A_\infty}{\pi \lambda}} \quad (5.78)$$

$$C_L = A_\lambda \alpha \quad (5.79)$$

La (5.79) dice che l'ala ha un coefficiente di portanza (teorico) proporzionale anche ora all'angolo di incidenza, con un coefficiente A_λ inferiore a quello dell'ala infinita, tanto più quanto è inferiore l'allungamento. Per esempio se assumiamo il valore teorico:

$$A_\infty \approx 2 \pi$$

per allungamento $\lambda = 6$ si ha:

$$A_\lambda = 1,5 \pi = \frac{3}{4} A_\infty$$

Quanto alla resistenza indotta, dalla (5.75) si ha:

$$C_{Di} = \alpha_i C_L = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} \quad (5.80)$$

Per due ali di uguali superfici portanti ma diverso allungamento avremo, a parità di coefficiente di portanza C_L , le seguenti formule, dovute a Betz:

$$C_{Di2} - C_{Di1} = \frac{C_L^2}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (5.81)$$

mentre dalla (5.74) e dalla (5.75):

$$\alpha_2 - \alpha_1 \equiv \alpha_{i2} - \alpha_{i1} = \frac{C_L}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (5.82)$$

Date la incidenza e la resistenza di un'ala di dato allungamento, esse permettono di ottenere la incidenza e la resistenza di un'altra ala, di diverso allungamento. La (5.81) vale anche per i coefficienti di resistenza totale:

$$C_D = C_{Dp} + C_{Di}$$

se, come generalmente accade, i coefficienti di resistenza di profilo sono funzioni di C_L o, al limite, costanti.

Osserviamo infine che la (5.80) permette di tracciare la cosiddetta "polare" dell'ala" (fig.12):

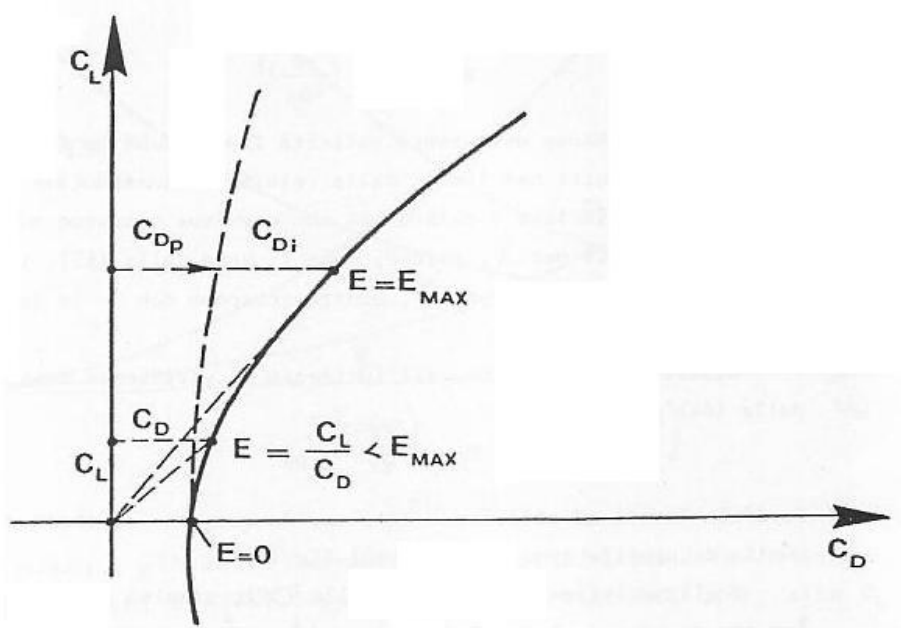


Figura 12

Quanto al coefficiente di momento rispetto al bordo d'attacco:

$$C_{MO} = C_{MF} + \frac{C_L}{4}$$

esso è indipendente dall'allungamento λ , se espresso in funzione di C_L , mentre, come anche C_L , varia se espresso in funzione di α , come risulta dalla (5.77).

Terminiamo con alcune considerazioni sulla efficienza, definita come rapporto tra portanza e resistenza:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

Avremo:

$$\frac{1}{E} = \frac{C_{Dp} + C_{Di}}{C_L} = \frac{C_{Dp}}{C_L} + \frac{C_L}{\pi \lambda} \quad (5.83)$$

Annullando la derivata rispetto a C_L (supposta la $C_{Dp} \approx$ costante) risulta che la massima efficienza si ha per:

$$C_L = \sqrt{\pi \lambda C_{Dp}} \quad (5.84)$$

e vale:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \lambda}{C_{Dp}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.85)$$

Le (5.84) e (5.85) hanno ovviamente validità fintantoché la (5.84) dia un risultato che rientri nei limiti della relazione lineare (5.77) per il coefficiente C_L . Inoltre è chiaro che non conviene comunque adottare valori molto grandi per λ , poiché, come si vede dalla (5.85), l'efficienza massima cresce solo con $\sqrt{\lambda}$, mentre crescono con λ le difficoltà costruttive dell'ala.

Osserviamo infine che, all'incidenza di efficienza massima si ha, dalle (5.84) e (5.80):

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} = C_{Dp}$$

Se l'ala lavora ad efficienza massima, dunque, la resistenza indotta e quella di profilo sono uguali (vedi fig.12).

Vogliamo infine notare che, dalla (5.59), risulta per la resistenza indotta di un aeroplano di dato peso (e , quindi, per assegnata portanza L) un diagramma inversamente proporzionale al quadrato della velocità u_∞ (figura 13: diagramma I). In quota, $h > 0$, avremo un andamento analogo ma, data la minor densità ρ dell'aria, la resistenza indotta sarà più elevata (diagramma II).

Per la resistenza di profilo:

$$D_p = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 S C_{Dp}$$

avranno andamenti parabolici (diagrammi III e IV di fig.13).

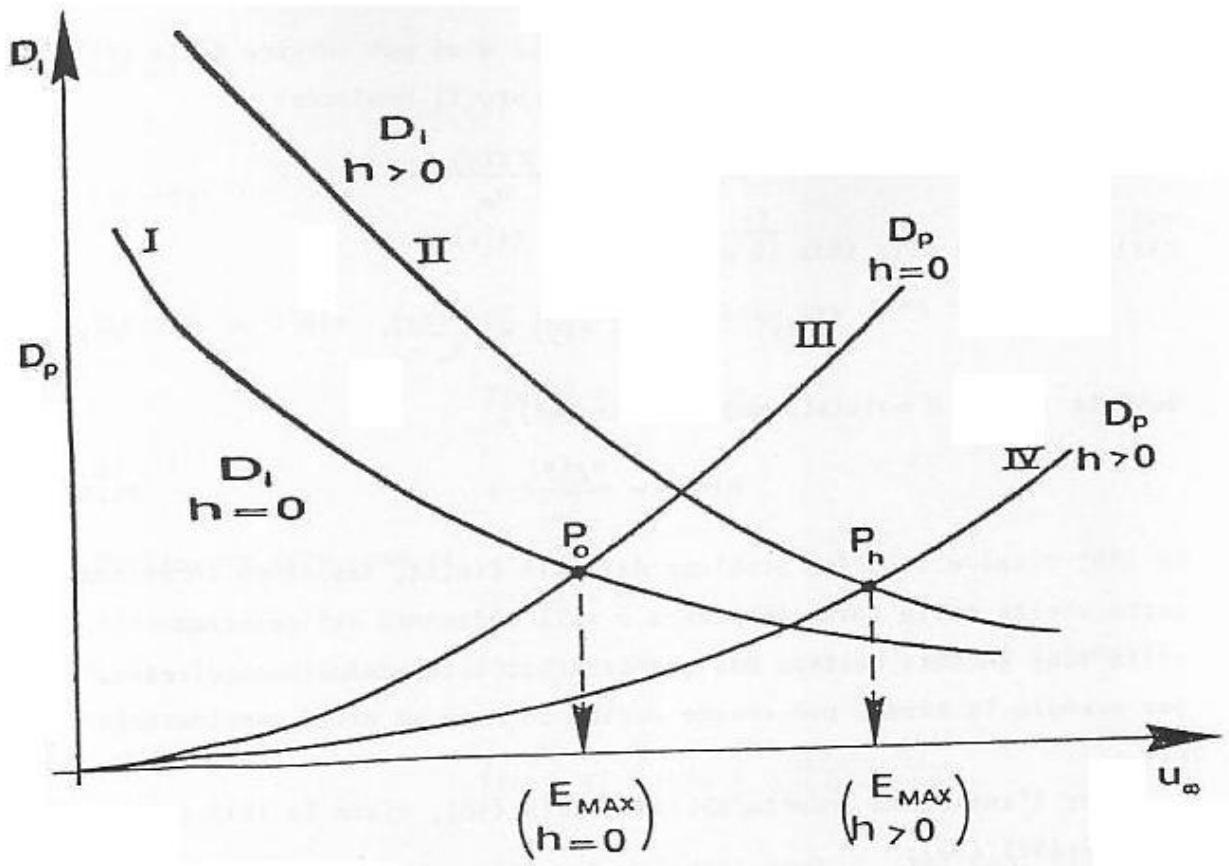


Figura 15

Per quanto già detto avremo la massima efficienza dove i diagrammi corrispondenti I e III, oppure II e IV, si tagliano, in P_0 e in P_h . Dunque in quota la massima efficienza si ha per velocità più alte.

5.5 Il problema dell'ala finita e la teoria del filetto portante

Esistono, in realtà, due problemi dell'ala finita:

- 1) costruire un'ala che realizzi un assegnato diagramma della circolazione $\Gamma(y)$;
- 2) data la forma geometrica dell'ala trovare la $\Gamma(y)$ e, con essa, la portanza, l'incidenza indotta $\alpha_i(y)$, e tutto il suo comportamento aerodinamico.

Il primo problema è alquanto semplice e si può servire della (5.64), che, per data $\Gamma(y)$, assegna punto per punto il prodotto:

$$c(y)C_L^*(y) = \frac{2\Gamma(y)}{u_\infty}$$

ossia, in base alla (5.63) il prodotto:

$$\{\alpha(y) - \alpha_i(y)\} c(y) = \frac{2\Gamma(y)}{A_\infty u_\infty} \quad (5.86)$$

dove la $\alpha_i(y)$ è valutata mediante la (5.48):

$$\alpha_i(y) = \frac{u_i(y)}{u_\infty} \quad (5.87)$$

La (5.86) risolve il primo problema dell'ala finita; lasciando anche una certa scelta sulla forma in pianta o sull'andamento dei calettamenti: nella (5.86) infatti restano due grandezze da determinare, una di esse, per esempio la corda, può essere scelta in base ad altre considerazioni.

Per l'incidenza indotta abbiamo dalla (5.48), vista la (5.87) e le posizioni (5.52), (5.53):

$$\alpha_i(\phi) = \frac{1}{2\pi u_\infty \ell} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \quad (5.88)$$

Data quindi una certa $\Gamma(y)$ oppure, in termini della variabile ausiliaria θ , $\Gamma(\theta)$, la (5.88) porge la corrispondente $\alpha_i(\phi)$, da utilizzare nella (5.86), come già detto. Ad evitare le complicazioni che derivano dall'integrando della (5.88), singolare per $\theta \rightarrow \phi$, adottiamo, con Glauert, uno sviluppo in serie di Fourier per la $\Gamma(\theta)$:

$$\Gamma(\theta) = u_\infty \ell \sum_1^\infty a_n \sin n\theta \quad (5.89)$$

fermo restando che, se si vuole, è lecito sostituire la (5.88) con:

$$\alpha_i(\phi) = \frac{1}{2\pi u_\infty \ell} \int_0^\pi \frac{\Gamma'(\theta) - \Gamma'(\phi)}{\cos\theta - \cos\phi} d\theta \quad (5.90)$$

ossia:

$$\alpha_i(\phi) = \frac{1}{2\pi u_\infty \ell} \int_0^\pi f(\theta; \phi) d\theta \quad (5.91)$$

essendo:

$$f(\theta; \phi) = \frac{\Gamma'(\theta) - \Gamma'(\phi)}{\cos\theta - \cos\phi} \quad (5.92)$$

Infatti la $f(\theta; \phi)$ cessa di essere singolare per $\theta \rightarrow \phi$:

$$f(\phi; \phi) = -\frac{\Gamma''(\phi)}{\sin\phi}$$

e:

$$f(0;0) = -\Gamma''(0)$$

Ovviamente deve essere:

$$\Gamma''(0) = 0$$

Lo sviluppo di Glauert (5.89) è tuttavia più pratico, poiché dà per la (5.88):

$$\alpha_i(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} n a_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \quad (5.93)$$

Ma gli integrali della (5.93), già definiti come I_n nell'ambito della teoria di Glauert, valgono:

$$I_n = \pi \frac{\text{sen } n\phi}{\text{sen } \phi}$$

Abbiamo allora:

$$\alpha_i(\phi) = \frac{\sum_1^{\infty} n a_n \text{sen } n\phi}{2 \text{sen } \phi} \quad (5.94)$$

Per la portanza totale, L , si ha:

$$L = \rho u_{\infty} \frac{\ell}{2} \int_0^{\pi} \Gamma(\phi) \text{sen } \phi d\phi$$

avendo introdotto la (5.53). Allora dalla (5.89):

$$L = \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 \ell^2 \sum_1^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \text{sen } n\phi \text{sen } \phi d\phi$$

dove tutti gli integrali sono nulli tranne quello relativo a $n = 1$; quindi, ricordando la definizione (5.76) dell'allungamento λ :

$$C_L = \frac{\pi}{2} \lambda a_1 \quad (5.95)$$

Per la resistenza indotta si ha dalla (5.42):

$$D_i = \rho u_{\infty} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \alpha_i(y) \Gamma(y) dy$$

Se introduciamo lo sviluppo di Glauert (5.89), oltre alla (5.94) e la (5.53), la resistenza indotta si valuta con:

$$D_i = \frac{\rho u_{\infty}^2 \ell^2}{4} \int_0^{\pi} \left(\sum_1^{\infty} n a_n \text{sen } n\phi \right) \cdot \left(\sum_1^{\infty} a_k \text{sen } k\phi \right) d\phi \quad (5.96)$$

ossia, tenuto conto del fatto che nella sommatoria doppia solo i termini per i quali $n = k$ danno contributo all'integrale:

$$D_i = \frac{\pi}{8} \rho u_\infty^2 \ell^2 \sum_1^\infty n a_n^2 \quad (5.97)$$

Il coefficiente della resistenza indotta vale quindi:

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 S} = \frac{\pi}{4} \lambda \sum_1^\infty n a_n^2 \quad (5.98)$$

Nel caso di circolazione ellittica la (5.89) diventa:

$$\Gamma(\theta) = u_\infty \ell a_1 \sin \theta$$

e la (5.98):

$$C_{Di} = \frac{\pi}{4} \lambda a_1^2 \quad (5.99)$$

oppure, combinandosi con la (5.95):

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} \quad (5.100)$$

che, ovviamente, coincide con la già vista (5.80).

È estremamente interessante osservare che dalle (5.98), (5.99), tenuto conto della (5.95), risulta che, per dato coefficiente di portanza, ossia per dato a_1 , la distribuzione ellittica della circolazione ($a_n = 0$ per $n > 1$) realizza la minima resistenza indotta.

5.6 Il secondo problema dell'ala finita

Il secondo problema dell'ala finita è ovviamente importante, poiché, anche se il primo problema ci ha permesso di progettare un'ala con assegnata distribuzione della circolazione, è poi necessario trovare il comportamento di detta ala alle varie incidenze.

Per risolvere questo problema possiamo usare un metodo iterativo, servendoci della (5.90) e della (5.86), che possiamo porre in termini delle variabili ausiliarie θ e ϕ , definite dalle (5.52) e (5.53):

$$A_\infty(\phi) c(\phi) \{\alpha(\phi) - \alpha_i(\phi)\} = \frac{2}{u_\infty} \Gamma(\phi) \quad (5.101)$$

Allora, partendo da una ragionevole ipotesi per la $\Gamma(\phi)$, la (5.90) dà una $\alpha_i(\phi)$ che, introdotta nella (5.101), fornisce una seconda approssimazione per la $\Gamma(\phi)$: il procedimento viene ripetuto fino a convergenza. È da notare che, se introduciamo la (5.88) o la (5.90), nella (5.101) abbiamo una unica

relazione per la $\Gamma(\phi)$, equazione detta “integro-differenziale” poiché la funzione incognita vi appare sia direttamente, sia sotto segno di integrale in forma di derivata rispetto alla variabile indipendente. Tale equazione può essere ricondotta alla soluzione di un sistema di N equazioni algebriche lineari in N incognite mediante il sunnominato metodo di Glauert. Consideriamo infatti la (5.89) nella quale prendiamo una approssimazione con N termini:

$$\Gamma(\theta) = u_\infty \ell \sum_1^N a_n \text{sen } n\theta \quad (5.102)$$

Poiché così anche la (5.94) dà una $\alpha_i(\phi)$ espressa con N termini, sostituendo nella (5.101), scritta per i punti aventi:

$$\phi = \phi_k = k \frac{\pi}{N+1} \quad (1 \leq k \leq N) \quad (5.103)$$

Ne risulta un sistema di N equazioni lineari per le N incognite a_1, a_2, \dots, a_N . Osserviamo ora che, se vogliamo studiare il comportamento di una ala simmetrica in volo orizzontale, ossia se:

$$\begin{cases} c(y) = c(-y) \\ A_\infty(y) = A_\infty(-y) \end{cases} \quad (5.104)$$

oltreché:

$$\alpha(y) = \alpha(-y) \quad (5.105)$$

Tale simmetria comporta ovviamente che anche la $\Gamma(y)$ e la $\alpha_i(y)$ risulteranno simmetriche. Perciò, se prendiamo N dispari, avremo soltanto $(N+1)/2$ incognite, che sono:

$$a_1 ; a_3 ; a_5 ; \dots ; a_N$$

infatti nella (5.102) devono mancare i termini del tipo $\text{sen}2\theta, \text{sen}4\theta$ eccetera, che sono antisimmetrici; avremo quindi nella (5.102):

$$a_2 = 0 = a_4 = \dots = a_{N-1} \quad (5.106)$$

La (5.101) dovrà essere scritta soltanto per punti aventi:

$$\phi = \phi_k = k \frac{\pi}{N+1} \quad \left(1 \leq k \leq \frac{N+1}{2} \right) \quad (5.107)$$

Le condizioni date dalla (5.101) vengono quindi verificate su una semiala soltanto, dato che le condizioni di simmetria ci assicurano la validità di dette condizioni sulla restante semiala.

Se poi un’ala simmetrica vola in rollio (in caso di manovra), cosicché valgano le (5.104) ma non la (5.105), è tuttavia possibile scindere il problema in due:

- 1) problema simmetrico;
- 2) problema antisimmetrico.

A tal fine poniamo, in luogo della (5.102):

$$\Gamma_1(\theta) = u_\infty \ell \sum_1^N a_n \operatorname{sen} n\theta = u_\infty \ell \{a_1 \operatorname{sen} \theta + a_3 \operatorname{sen} 3\theta + \dots\} \quad (5.108)$$

oppure:

$$\Gamma_2(\theta) = u_\infty \ell \sum_1^N a_n \operatorname{sen} n\theta = u_\infty \ell \{a_2 \operatorname{sen} 2\theta + a_4 \operatorname{sen} 4\theta + \dots\} \quad (5.109)$$

Se N è dispari, nella (5.108) compaiono $(N + 1)/2$ termini, mentre nella (5.109) compaiono $(N - 1)/2$ termini.

Possiamo allora, nella (5.101), scindere la $\alpha(y)$ nella sua parte simmetrica, $\alpha'(y)$, ed antisimmetrica, $\alpha''(y)$:

$$\alpha'(y) = \frac{\alpha(y) + \alpha(-y)}{2} \quad (5.110)$$

$$\alpha''(y) = \frac{\alpha(y) - \alpha(-y)}{2} \quad (5.111)$$

Corrispondentemente la (5.94) si scinde nelle:

$$\alpha'_i(\phi) = \sum_1^N \frac{n a_n \operatorname{sen} n\phi}{2 \operatorname{sen} \phi} \quad (5.112)$$

e:

$$\alpha''_i(\phi) = \sum_1^N \frac{n a_n \operatorname{sen} n\phi}{2 \operatorname{sen} \phi} \quad (5.113)$$

dove la (5.112) contiene gli $(N + 1)/2$ termini con n dispari, come la (5.108) dalla quale proviene, mentre la (5.113) contiene $(N - 1)/2$ termini con n pari, come la (5.109).

Per la parte simmetrica del problema scriveremo la (5.101):

$$A_\infty(\phi) c(\phi) \{\alpha'(\phi) - \alpha'_i(\phi)\} = \frac{2}{u_\infty} \Gamma_1(\phi) \quad (5.114)$$

per gli $(N + 1)/2$ punti dati dalla (5.107), compresi tra:

$$\frac{\pi}{N+1} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

l'ultimo dei quali corrisponde alla mezzzeria dell'ala; per la parte antisimmetrica, infine, risolveremo la:

$$A_\infty(\phi) c(\phi) \{\alpha''(\phi) - \alpha''_i(\phi)\} = \frac{2}{u_\infty} \Gamma_2(\phi) \quad (5.115)$$

scrivendola per i punti dati dalla:

$$\phi = \phi_k = k \frac{\pi}{N+1} \quad \left(1 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \right) \quad (5.116)$$

restando esclusa la sezione di mezzeria, ove $\phi = \pi/2$; $y = 0$; $\alpha'' = 0$, come si vede dalla (5.111); mentre dalle (5.109) e (5.113) risulta ivi anche:

$$\Gamma_2 = 0 \quad ; \quad \alpha_i'' = 0$$

Cosicché la (5.115) è identicamente soddisfatta in mezzeria.

5.7 Momenti di rollio e di imbardata

Nel caso di portanza a distribuzione non simmetrica ci proponiamo di valutare i conseguenti momenti di rollio (attorno all'asse x) e di imbardata (attorno all'asse z).

La conoscenza di tali momenti è ovviamente utile per lo studio del comportamento di un velivolo durante le manovre.

Se dL è la portanza elementare che agisce su un tratto d'ala di lunghezza dy (fig.14) e dD_i è la corrispondente resistenza indotta elementare, dalla:

$$dL = \rho u_\infty \Gamma dy \quad (5.117)$$

ponendo:

$$\Gamma = u_\infty \ell \gamma(y) \quad (5.118)$$

risulta:

$$M_x = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dL}{dy} y dy = \rho u_\infty^2 \ell \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \gamma(y) y dy \quad (5.119)$$

e:

$$M_{zi} = - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dD_i}{dy} y dy = - \rho u_\infty^2 \ell \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \gamma(y) \alpha_i(y) y dy \quad (5.120)$$

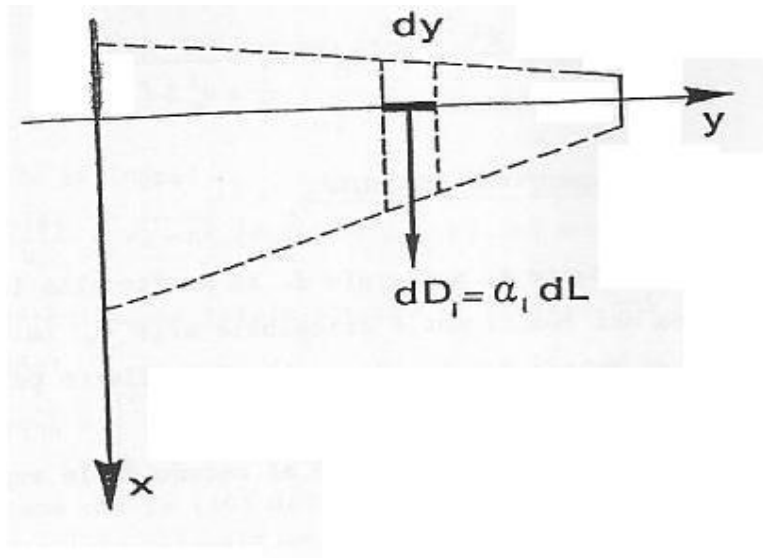


Figura 14

Introducendo la posizione:

$$y = -\frac{\ell}{2} \cos \phi$$

le (5.119) e (5.120) diventano:

$$M_x = -\frac{1}{4} \rho u_\infty^2 \ell^3 \int_0^\pi \gamma(\phi) \cos \phi \sin \phi d\phi$$

ossia:

$$M_x = -\frac{1}{8} \rho u_\infty^2 \ell^3 \int_0^\pi \gamma(\phi) \sin 2\phi d\phi \quad (5.121)$$

e, per la M_z :

$$M_x = \frac{1}{8} \rho u_\infty^2 \ell^3 \int_0^\pi (2\alpha_i \sin \phi) \gamma(\phi) \cos \phi d\phi \quad (5.122)$$

Per i coefficienti di momento si ha infine:

$$C_{M_x} = -\frac{1}{4} \lambda \int_0^\pi \gamma(\phi) \sin 2\phi d\phi \quad (5.123)$$

e:

$$C_{M_z} = \frac{1}{4} \lambda \int_0^\pi (2\alpha_i \sin \phi) \gamma(\phi) \cos \phi d\phi \quad (5.124)$$

dove:

$$\lambda = \frac{\ell^2}{S} \quad ; \quad C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 S \ell}$$

5.8 Il metodo della superficie portante (*leggere*)

Per quanto si è detto in merito alla (5.50), nel caso in cui la linea dei fuochi non è ortogonale alla \underline{u}_∞ (ala a freccia) occorre adottare un metodo diverso da quello del filetto portante di Glauert.

In questo paragrafo daremo un cenno al metodo della superficie portante.

Questo si ispira al metodo di Glauert per il profilo. Se ξ è la distanza generica di un punto P dell'ala dal bordo d'attacco della sezione cui il punto appartiene (fig.15), la vorticità $\gamma(\xi)$ per unità di lunghezza nel senso della corda viene definita in modo analogo al caso del profilo ma con coefficienti che dovranno essere funzioni della η , poiché si tratta di un'ala finita. Se poniamo:

$$\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \phi) \tag{5.125}$$

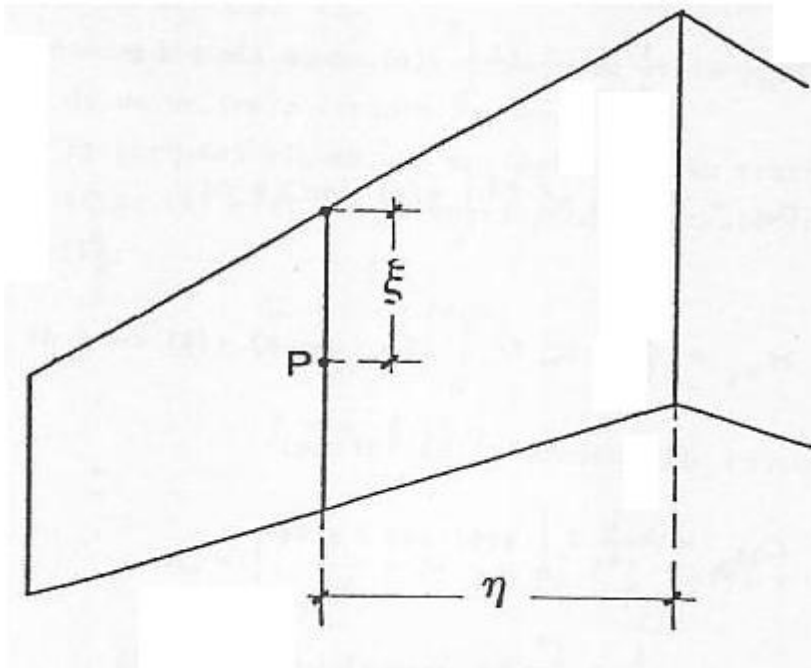


Figura 15

Falkner dà lo sviluppo:

$$\frac{\gamma(\phi)}{u_\infty} = \sqrt{1 - \eta^2} \left\{ f_0(\eta) \cotg \frac{\phi}{2} + f_1(\eta) \text{sen} \phi + f_2(\eta) \text{sen} 2\phi \right\} \tag{5.126}$$

talché la circolazione totale attorno al profilo cui P appartiene (figura 15) vale:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^c \gamma d\xi = \frac{\pi}{2} c u_\infty \sqrt{1-\eta^2} \left\{ f_0(\eta) + \frac{1}{2} f_1(\eta) \right\} \quad (5.127)$$

Da cui si ricava per il coefficiente locale di portanza per unità di apertura:

$$C_L^*(\eta) = \pi \sqrt{1-\eta^2} \left\{ f_0(\eta) + \frac{1}{2} f_1(\eta) \right\}$$

Le funzioni $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$ e $f_2(\eta)$, che compaiono nella (5.126) sono tra polinomi della variabile η . I coefficienti di tali polinomi vanno valutati in base alle condizioni di contorno.

Alla distribuzione continua (5.126) Falkner sostituisce un gruppo di 84 vortici a staffa divisi in 4 sottogruppi di 21 vortici, come lo schema di fig.16; i centri di tali vortici si trovano lungo le:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{8} c(\eta) & \xi_2 &= \frac{3}{8} c(\eta) \\ \xi_3 &= \frac{5}{8} c(\eta) & \xi_4 &= \frac{7}{8} c(\eta) \end{aligned} \quad (5.128)$$

Le loro intensità sono correlate alle tre funzioni polinomiali $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$ e $f_2(\eta)$, ossia alla distribuzione continua (5.126) che essi sostituiscono. Per esempio le intensità dei vortici di un dato sottogruppo (5.128) sono proporzionali a quelle della distribuzione continua (5.126) nel centro del vortice.

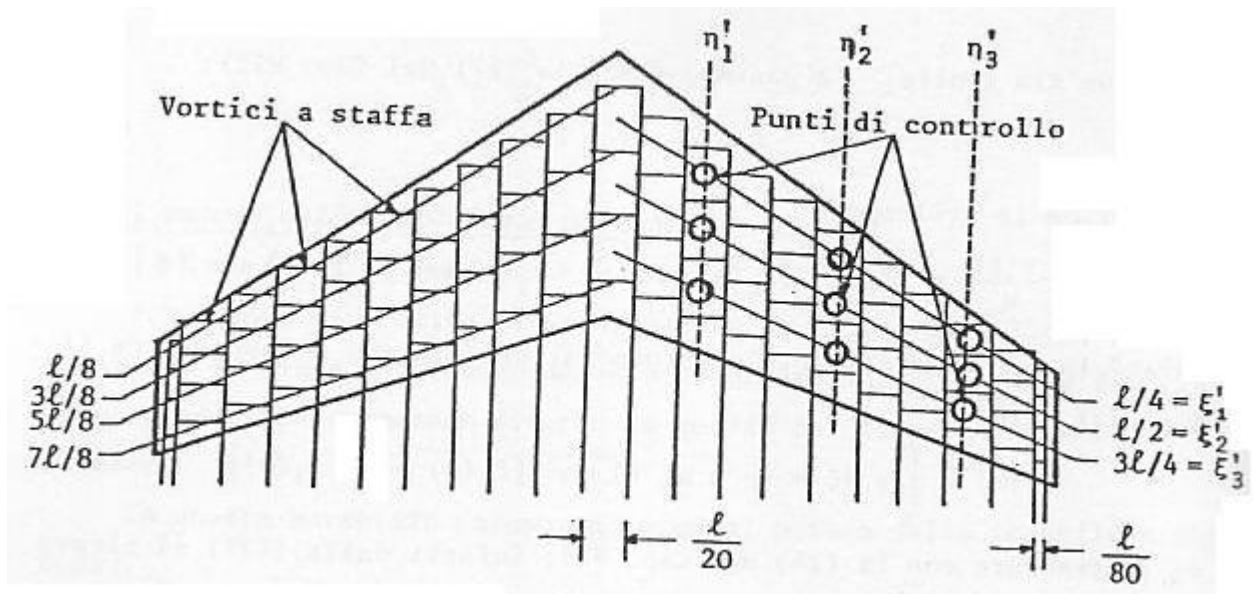


Figura 16

Avremo cioè (vedi fig.17):

$$\Gamma_{ij} = u_\infty \frac{c}{2} \sqrt{1-\eta_j^2} \left\{ f_0(\eta_j) \cotg \frac{\phi_i}{2} + f_1(\eta_j) \sen \phi_i + f_2(\eta_j) \sen 2\phi_i \right\} \quad (5.129)$$

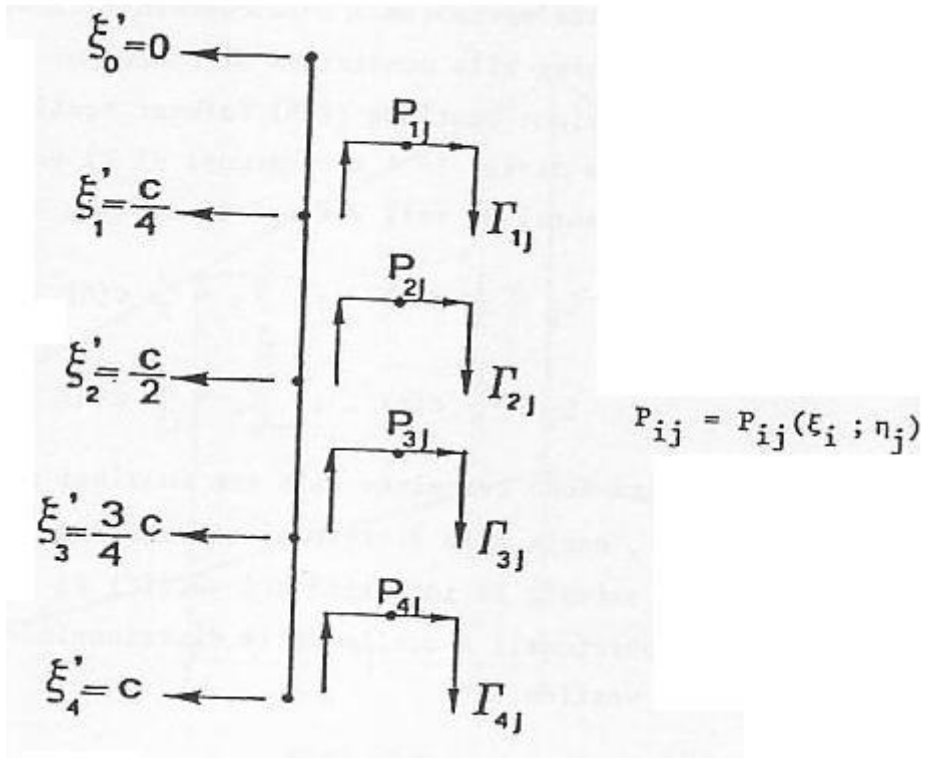


Figura 17

dove, in base alla (5.125), si ha:

$$\cotg \frac{\phi_i}{2} = \left(\frac{c - \xi_i}{\xi_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.130)$$

ossia, dalle (5.128):

$$\begin{cases} \cotg \frac{\phi_1}{2} = \sqrt{7} \\ \cotg \frac{\phi_2}{2} = \sqrt{5/3} \\ \cotg \frac{\phi_3}{2} = \sqrt{3/5} \\ \cotg \frac{\phi_4}{2} = \sqrt{1/7} \end{cases} \quad (5.131)$$

mentre in modo analogo la (5.125) dà i valori numerici delle quantità $\sin \phi_i$ e $\sin 2\phi_i$, ossia:

$$\begin{cases} \sin \phi_1 = \sqrt{7}/4 = \sin \phi_4 \\ \sin \phi_2 = \sqrt{15}/4 = \sin \phi_3 \end{cases} \quad (5.132)$$

$$\begin{cases} \text{sen } 2\phi_1 = 3\sqrt{7}/8 = -\text{sen } 2\phi_4 \\ \text{sen } 2\phi_2 = \sqrt{15}/8 = -\text{sen } 2\phi_3 \end{cases} \quad (5.133)$$

Altra possibilità, del resto equivalente a quella su esposta, è definire l'intensità Γ_{ij} mediante l'integrale parziale della distribuzione continua:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1j} &= \int_0^{c/4} \gamma(\xi; \eta_j) d\xi \\ \Gamma_{2j} &= \int_{c/4}^{c/2} \gamma(\xi; \eta_j) d\xi \end{aligned}$$

Eccetera (vedi fig.17). Avremo allora, ad esempio:

$$\Gamma_{ij} = u_\infty \frac{c}{2} \sqrt{1-\eta_j^2} \int_0^{\pi/3} \left\{ f_0(\eta_j) \cot g \frac{\phi}{2} + f_1(\eta_j) \text{sen } \phi + f_2(\eta_j) \text{sen } 2\phi \right\} \text{sen } \phi d\phi \quad (5.134)$$

avendo utilizzato la (5.126) e, per la sostituzione $d\xi \rightarrow d\phi$, la (5.125). Ne risulta, dopo eseguita la integrazione (5.134):

$$\Gamma_{ij} = u_\infty \frac{c}{2} \sqrt{1-\eta_j^2} \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) f_0(\eta_j) + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) f_1(\eta_j) + \frac{\sqrt{3}}{4} f_2(\eta_j) \right\} \quad (5.135)$$

Senza insistere sulle altre, analoghe, Γ_{ij} , si vede che l'intensità di ogni vortice a staffa è legata ai coefficienti $a_{k\ell}$ delle tre funzioni della η che compaiono nella (5.126):

$$f_k(\eta) = a_{k0} + a_{k1} \eta + a_{k2} \eta^2 \quad (k=1;2;3) \quad (5.136)$$

Sommando quindi i contributi degli 84 vortici a staffa si valuta nei punti di controllo (ξ_i' ; η_j') la vorticità da essi prodotta, v_{ij} , in funzione dei coefficienti $a_{k\ell}$ e si risolvono quindi, mediante le condizioni al contorno, i 9 coefficienti che definiscono le $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$ e $f_2(\eta)$. Detti punti di controllo P_{ij} vengono situati al centro dei vortici a staffa (vedi fig.16), lungo le linee:

$$\begin{cases} \xi_1' = \frac{1}{4} c \\ \xi_2' = \frac{1}{2} c \\ \xi_3' = \frac{3}{4} c \end{cases} \quad (5.137)$$

(vedi anche la fig.17) in numero pari al numero complessivo dei coefficienti $a_{k\ell}$ che definiscono le funzioni incognite $f_k(\eta)$ della (5.126). Se allora chiamiamo con:

$$v_{ij}(a_{k\ell})$$

le velocità indotte, dal sistema vorticoso, nei punti di coordinate $(\xi_i'; \eta_j')$ ossia nei punti di controllo, deve essere:

$$\alpha_{ij} = \frac{v_{ij}(a_{kl})}{u_\infty} \quad (5.138)$$

Dove le $\alpha_{ij} \equiv \alpha(\xi_i'; \eta_j')$ sono le inclinazioni locali della superficie media alare, note per profilo (fig.18).

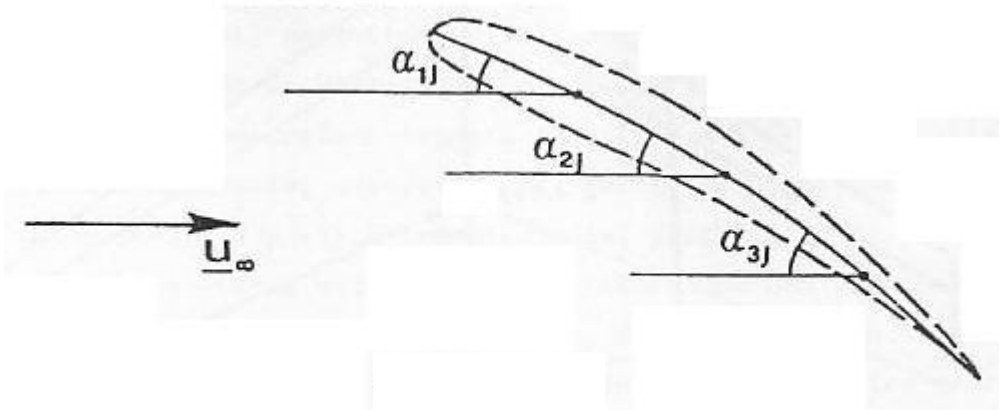


Figura 18

Scritte le (5.138) per ogni profilo $\eta = \eta_j'$ e per ciascuno dei punti (5.137), ne risulta un sistema lineare nelle a_{kl} , che, risolto, fornisce la soluzione del problema dell'ala.

5.9 Il metodo di Weissinger (*leggere*)

I risultati del metodo della superficie portante, descritto nel paragrafo precedente, sono molto soddisfacenti, ma vengono conseguiti con calcoli molto lunghi.

Weissinger suggerisce un metodo intermedio tra quello del filetto portante e quello della superficie portante. Egli adotta un filetto portante situato sulla linea dei fuochi, che non è più necessario sia rettilineo, né ortogonale alla u_∞ , come nel metodo di Glauert, poiché i punti di controllo sono scelti sulla linea dei "punti neutri posteriori". Tale linea scorre a $\frac{3}{4}$ dei profili (fig.19). Se $P(x,y)$ è uno dei tanti punti di controllo, la velocità dv_ℓ indotta da un elemento $d\Gamma$ di vortice libero può essere determinata dalla seguente:

$$dv_\ell = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{y-\eta} (1 - \cos \delta) \quad (5.139)$$

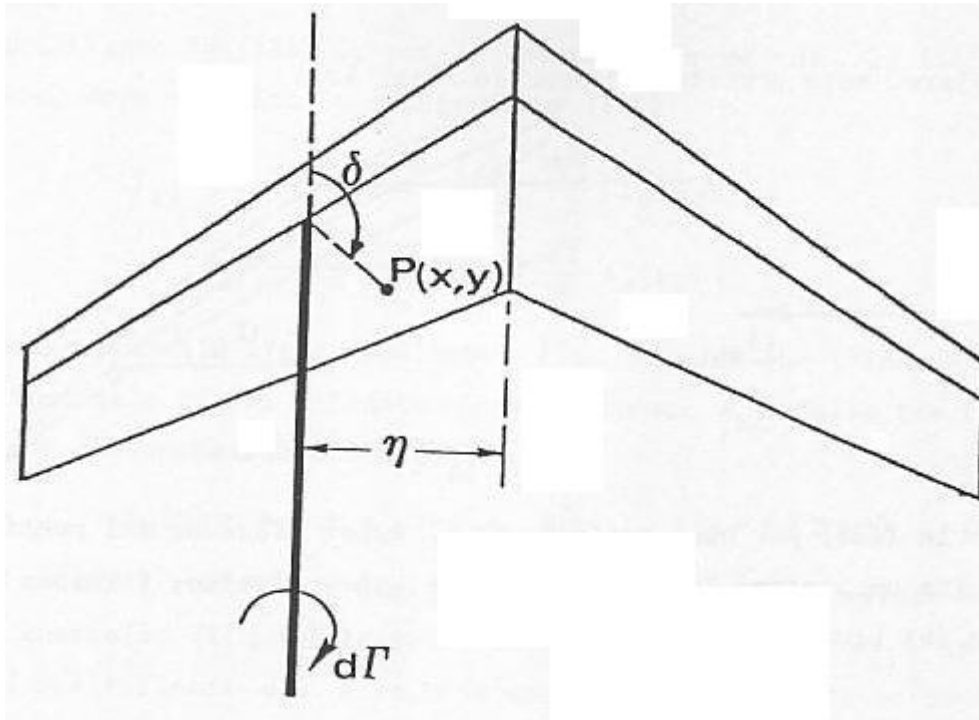


Figura 19

La (5.139) viene poi integrata tra $\eta = -\frac{\ell}{2}$ ed $\eta = +\frac{\ell}{2}$, sostituendo eventualmente:

$$\eta = -\frac{\ell}{2} \cos \theta$$

e:

$$y = -\frac{\ell}{2} \cos \phi$$

Il vortice aderente dà poi una velocità \underline{v} pari a:

$$\underline{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Gamma(\eta) \frac{d\ell \wedge \underline{r}}{r^3} \quad (5.140)$$

Per ogni punto P avremo allora:

$$\frac{v_t(y) + v(y)}{u_\infty} = \beta_p(y) \quad (5.141)$$

Adottando per la $\Gamma(\eta)$ una espressione alla Fourier, tipo (5.102), le (5.139), (5.140) e (5.141) permettono di risolvere il problema.

Per il metodo di Weissinger, ora esposto, è basilare il concetto di punto neutro posteriore. Riprendendo qui tale argomento, osserviamo ora che la concentrazione vorticoso nel punto focale è particolarmente utile, poiché dà, nel punto neutro posteriore, la stessa velocità che è prodotta da una vorticosità distribuita lungo il profilo. Infatti, (fig.20), se il fuoco F è in $c/4$ ed il punto N è in $\frac{3}{4}c$, la velocità indotta dal vortice concentrato Γ è:

$$v'_N = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{c/2} = \frac{\Gamma}{\pi c} \quad (5.142)$$

Inoltre, si ottenne per la distribuzione continua:

$$C_L \equiv 2\pi(\alpha + \alpha_0) = 2\pi\beta_N \quad (5.143)$$

D'altra parte:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 c} = \frac{\rho u_\infty \Gamma}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 c}$$

ossia:

$$C_L = \frac{2\Gamma}{u_\infty c} \quad (5.144)$$

e, dalle (5.143) e (5.144):

$$\beta_N = \frac{\Gamma}{\pi u_\infty c} \quad ; \quad v_N = \beta_N u_\infty = \frac{\Gamma}{\pi c}$$

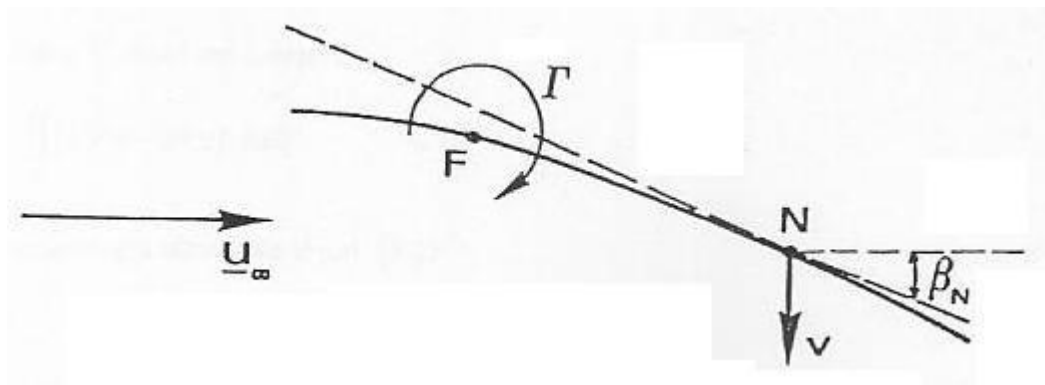


Figura 20

Confrontando con la (5.142):

$$v'_N = v_N \quad (5.145)$$

La (5.145) giustifica la concentrazione vorticoso a $c/4$ con punto di controllo a $\frac{3}{4}c$, almeno per un'ala infinita; per il caso dell'ala finita che qui ci interessa, basta ricordare che una sezione di ala

finita si comporta come quella di un'ala infinita all'incidenza $(\alpha - \alpha_i)$, ossia ad un'incidenza geometrica diminuita della locale incidenza indotta.