

Speciale matricole 2007/08

Spunti di riflessione

Ordini di grandezza

Un'operazione che capita di frequente nello studio e nella pratica dell'ingegneria è la stima dell'ordine di grandezza di una certa quantità. Ciò vuol dire giudicare il valore numerico di una quantità in modo molto approssimato, diciamo entro un fattore 10. Per es., se affermiamo che la popolazione di una città medio-piccola è dell'ordine del centinaio di migliaia di persone, intendiamo dire che gli abitanti potranno essere qualche centinaio di migliaia, trecentomila, quattrocentomila, non importa. Ciò che si vuol dire è che non sono tre o quattro milioni, come potrebbe essere per una città grande e che non sono trentamila o quarantamila, come potrebbe essere per una città piccola. In altri termini, per diversi problemi di stima, ci si può accontentare di una conoscenza molto grossolana, nella quale due valori sono considerati prossimi finché il loro rapporto non supera 10.

Un esempio tipico di uso degli ordini di grandezza si ha nel controllo dell'attendibilità dei risultati di un calcolo. Per es., se al termine del calcolo dell'area della superficie da riservare ai posti macchina di un palazzo con venti abitazioni civili, otteniamo 1 chilometro quadrato, possiamo essere certi che nel calcolo c'è qualcosa di sbagliato. In effetti, per moltissime quantità abbiamo un'idea a priori dell'ordine di grandezza. Conoscete già l'ordine di grandezza per tante quantità. Pensate alle distanze fra le città di uno stato (centinaio di chilometri), alla massa corporea (decine di chilogrammi), ecc. Il consiglio che vi diamo è di cercare di impararne altri. Saranno dei punti di riferimento utili. Internet è un ottimo ausilio. State attenti però, perché a volte vi si trovano scritte solenni sciocchezze. Quindi cercate dei riscontri incrociati.¹

Il calcolo dell'ordine di grandezza di una quantità è spesso abbastanza semplice da sviluppare e serve per una prima stima della quantità in questione. Facciamo un esempio. Immaginiamo che vogliate valutare quale deve essere la potenza erogata da una centrale elettrica che debba provvedere al fabbisogno elettrico per gli usi civili degli abitanti di una città di duecentomila persone. Per prima cosa potete valutare il numero di nuclei familiari presenti. Pensando che il nucleo medio sia composto di tre persone, avete circa settantamila nuclei. La fornitura tipica di potenza elettrica per nucleo è 3 kW (pensate al contatore di casa). Perciò ottenete che la potenza richiesta può giungere a $70\,000 \times 3000 = 210\,000\,000$ W, o, come si dice più comunemente (vedi oltre), 210 megawatt. La conclusione è che l'ordine di grandezza cercato è del centinaio di megawatt. Tale potenza

¹Potreste giustamente osservare che anche questo testo è stato preso da Internet e chiedere se dovete avanzare dubbi sulla sua validità. La risposta è che dovete sempre vagliare le notizie che vi arrivano con spirito critico.

può essere erogata da una centrale elettrica non molto grande. Naturalmente si tratta della potenza di picco, che sarebbe necessaria se in qualche istante tutti gli utenti richiedessero la massima potenza. La potenza media (nel tempo) necessaria sarà molto più bassa, probabilmente tra un decimo e un quinto della massima. Osservate che questo corrisponde a stimare che la singola persona, mediamente, richieda tra 0,1 e 0,2 kW. Se moltiplicate per il numero di ore che ci sono in un anno ($24 \times 365 = 8760$) ottenete una stima del consumo pro-capite dell'ordine di 1000-2000 kWh (chilowattora) annui. Perché vi rendiate conto che non siete lontani dal vero, vi diciamo che, in Italia, il consumo annuo di energia elettrica è sui 300 000 miliardi di kWh, includendo sia gli usi civili che tutti gli altri (agricoli, del terziario, industriali). Dividendo per il numero degli abitanti, otterrete un consumo annuo per abitante che sta fra 5000 e 6000 kWh. Siccome gli usi civili incidono per circa un quinto del totale, la vostra stima è ragionevole. Per fare un'ulteriore verifica, utilizzate le bollette che la vostra famiglia paga per la fornitura di energia elettrica. Ricordatevi, comunque, che state cercando solo un ordine di grandezza.

Potenze di dieci

Per molte grandezze fisiche, i valori numerici possono variare su intervalli estremamente grandi. Prendete la resistività elettrica ρ di un materiale (vi ricordiamo che la resistenza elettrica R di un filo di lunghezza l e sezione ortogonale di area S dipende dalla resistività attraverso la formula $R = \rho l/S$). Per un buon conduttore, diciamo il rame, a temperatura ambiente, la resistività è un paio di centesimi di milionesimi di ohm \times metro, mentre per il quarzo fuso si avvicina al centinaio di milioni di miliardi di ohm \times metro. Lasciate pure perdere l'unità di misura (sulla quale torneremo), ma osservate che, per passare dalla resistività del primo materiale a quella del secondo, dovete moltiplicare per qualcosa come un milione di miliardi di miliardi. Per dirla in termini di ordini di grandezza, passando dal rame al quarzo fuso, la resistività cresce di 24 ordini di grandezza. Oppure considerate la distanza fra noi e la stella più vicina (Sole escluso), che è Proxima Centauri. E' di circa 40 milioni di miliardi di metri. Poi confrontatela con la dimensione lineare del nucleo dell'idrogeno, che è circa un milionesimo di miliardesimo di metro. Questa volta, per passare dal primo valore al secondo dovete dividere per 40 000 miliardi di miliardi di miliardi.

Ovviamente è molto poco pratico esprimersi usando locuzioni come 'un centesimo di milionesimo' o 'un miliardo di miliardi di miliardi'.² Perciò, quello che si fa è di usare le potenze di dieci e dire, per es., che il raggio del nucleo dell'idrogeno è 10^{-15} (dieci alla meno quindici) metri. Esiste tutta una serie di prefissi, da quelli più familiari, come centi- o chilo-, a quelli più esotici, come zeta- o atto-, che si pongono davanti al nome dell'unità di misura per esprimerne un multiplo o sottomultiplo. Essi sono elencati nella tabella che segue, in cui, per ogni prefisso, è indicata la potenza di dieci che va a moltiplicare l'unità di

²Questo fa venire in mente un celebre racconto di Zavattini che riportiamo in appendice.

misura. Per es., si può esprimere il raggio del nucleo dell'idrogeno come 1 fm (femtometro) e il consumo annuo italiano di energia elettrica come 300 TWh (terawattora) o 0,3 PWh (petawattora).

nome	simbolo	fattore	nome	simbolo	fattore
yota	Y	10^{24}	deci	d	10^{-1}
zeta	Z	10^{21}	centi	c	10^{-2}
exa	E	10^{18}	milli	m	10^{-3}
peta	P	10^{15}	micro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	nano	n	10^{-9}
giga	G	10^9	pico	p	10^{-12}
mega	M	10^6	femto	f	10^{-15}
chilo	k	10^3	atto	a	10^{-18}
etto	h	10^2	zepto	z	10^{-21}
deca	da	10^1	yocto	y	10^{-24}

Questi prefissi hanno un uso leggermente diverso in informatica, in particolare quando si parla di capacità di memoria. In questo caso i numeri utilizzati sono in realtà potenze di 2, per cui si prende la potenza di 2 più vicina alla potenza di 10 rappresentata dal prefisso. Così, 1 kB non è letteralmente 1000 Byte, ma 1024 (2^{10}) e 1 GB (gigabyte) non è un miliardo di Byte, bensì 1073741824 (2^{30}).

Cifre significative

Supponiamo che dobbiate determinare il diametro (esterno) della sezione di una bottiglia e che per farlo abbiate misurato, con un metro a fettuccia (del tipo usato dai sarti), la circonferenza esterna, trovando, diciamo, 24 cm. Ora, ricordando che la lunghezza della circonferenza, chiamiamola l , è π volte il diametro, potete calcolare quest'ultimo come rapporto fra l e π . Qualunque calcolatrice tascabile scientifica (cioè in grado di calcolare funzioni trigonometriche, logaritmi, ecc.) ha il tasto del π . Se fate il rapporto detto, sul visore della calcolatrice apparirà il numero

7,639437268

Questa sarebbe la misura del diametro espressa in centimetri. C'è un gran numero di decimali. La prima cifra dopo la virgola indica i millimetri, la seconda i decimi di millimetro, la terza i centesimi e così via, fino alla nona cifra che si riferisce ai centesimi di milionesimi di millimetro. Ora, un centesimo di milionesimo di millimetro, cioè 10^{-8} millimetri, ovvero 10 picometri, è circa un decimo della distanza tipica fra due atomi in un solido. Sarebbe bello se un metro a fettuccia permettesse di scendere al di sotto delle distanze interatomiche, ma ovviamente non è così. In realtà, la maggior parte dei

decimali forniti dalla calcolatrice non ha alcun senso fisico. Per capire quanti decimali ha senso conservare, osserviamo che la misura della circonferenza della bottiglia è affetta da un'incertezza. A seconda di quanto il nastro aderisce alla bottiglia, a seconda di quanto lo tirate, invece di 240 mm potreste benissimo leggere un numero che sta, diciamo, fra 238 e 242 mm. Perciò, percentualmente, avete un'incertezza di circa l'uno per cento. La stessa incertezza percentuale si ha, come sarebbe facile mostrare, sul diametro. La misura della lunghezza del diametro, che secondo il risultato precedente sarebbe 76,39437268 mm, è affetta dunque da un'incertezza dell'uno per cento (0.76 mm), che arrotondiamo a 1 mm. In pratica, solo due delle cifre fornite dalla calcolatrice sono, come si dice, *significative*. In maniera convenzionale, si esprime tutto ciò dicendo che la misurazione del diametro ha portato al valore 76 ± 1 mm. Il significato di questa scrittura convenzionale è che l'incertezza sul risultato della misura è di un'unità sulla seconda cifra. L'analisi dovrebbe essere approfondita e raffinata, ma per dare una prima idea del concetto di cifre significative quanto detto può bastare.

Solo un'altra osservazione. Se si cambia l'unità di misura usata, anche il numero che esprime il risultato della misura cambia. Non cambia invece il numero delle cifre significative. Per es., se ci servisse di esprimere il diametro della bottiglia in metri, diremmo che il suo valore è

$$0,076 \pm 0,001 \text{ m,}$$

e se lo volessimo esprimere in chilometri, scriveremmo

$$0,000076 \pm 0,000001 \text{ km.}$$

Anche se dopo la virgola compaiono tre o addirittura sei cifre, quelle significative restano due, in quanto gli zeri sono dovuti soltanto al cambiamento di unità. Il modo più conveniente per esprimere il risultato della misura, quale che sia l'unità scelta, è quello di usare la notazione esponenziale, tramite le potenze di dieci. Così, l'ultima espressione scritta viene sostituita da

$$(76 \pm 1) \times 10^{-6} \text{ km.}$$

Ben diverso sarebbe se, per una qualche altra lunghezza, il risultato della misura fosse espresso da

$$0,100076 \pm 0,000001 \text{ km.}$$

In questo caso le cifre significative sono sei. Si sarebbe cioè misurata una distanza poco superiore a cento metri con l'incertezza di un solo millimetro, vale a dire con un'incertezza percentuale di una parte su centomila (10^{-5}). Si tratterebbe di una misura molto accurata.

Simboli

Nelle formule con cui si lavora nell'ingegneria, le varie grandezze sono indicate con dei simboli. Per es., scriviamo la legge di Ohm come $V = Ri$, dove V è la differenza di potenziale fra gli estremi di un conduttore avente resistenza R , percorso da una corrente elettrica di intensità i . Purtroppo, come avrete modo di verificare, il numero di simboli fornito dall'alfabeto italiano (o da quello inglese) è troppo limitato rispetto alle esigenze.

Ovviamente, si può costruire un insieme illimitato di simboli appendendo dei pedici alle lettere. Questa è una soluzione che va bene se dobbiamo distinguere diverse istanze di una stessa quantità. Per es., se abbiamo tre conduttori percorsi da correnti di diversa intensità, va benissimo usare i simboli i_1 , i_2 e i_3 . Tuttavia, se vogliamo distinguere grandezze non omogenee, questa soluzione non è molto soddisfacente. Pensate al rischio di confusione che sarebbe prodotto da un simbolismo in cui a_{12} fosse un'accelerazione, a_{22} una forza e a_{31} una potenza. Per questo si utilizzano altri simboli, o inventati di sana pianta, come ∇ (nabla) e \hbar (acca tagliato), o, più frequentemente, mutuati da altri alfabeti. A parte qualche lettera presa dall'alfabeto scandinavo, come \AA (A con cerchio) e \O (O tagliato), da quello ebraico, come \aleph (alef), da quello polacco, come \L (L tagliato), il grosso dei simboli usati viene dall'alfabeto greco. A meno che non abbiate fatto il liceo classico, sarà utile che cominciate a imparare le lettere di tale alfabeto. Ve lo riportiamo qui sotto e aggiungiamo qualche parola di commento. La denominazione indicata accanto ai simboli è quella anglosassone.

Alfabeto greco

α, A	alpha
β, B	beta
γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ϵ, ε, E	epsilon
ζ, Z	zeta
η, H	eta
$\theta, \vartheta, \Theta$	theta
ι, I	iota
κ, K	kappa
λ, Λ	lambda
μ, M	mu
ν, N	nu
ξ, Ξ	xi
π, ϖ, Π	pi
ρ, ϱ, R	rho
$\sigma, \varsigma, \Sigma$	sigma
τ, T	tau
υ, Υ	upsilon
ϕ, φ, Φ	phi
χ, X	chi
ψ, Ψ	psi
ω, Ω	eta

Noterete che in corrispondenza ad alcune lettere ci sono due simboli diversi. Per es., la epsilon viene scritta sia come ϵ che come ε . La differenza grafica fra i due simboli è così modesta che, in genere, per non creare confusioni, si evita di usarli per indicare due grandezze distinte. La scelta fra i due diventa allora essenzialmente di carattere tipografico. Lo stesso vale per θ e ϑ , per ρ e ϱ e per ϕ e φ . Molte maiuscole sono uguali a quelle di lettere italiane e sono inutilizzabili. Anche fra le minuscole ce ne sono alcune molto simili a lettere dell'alfabeto italiano o inglese. La iota minuscola, ι , differisce dalla i essenzialmente per la mancanza del puntino, la upsilon minuscola, υ , è quasi uguale alla v . In realtà, anche il kappa minuscolo, κ , si distingue poco dal k . Tuttavia, in forma stampata (cioà non alla lavagna) esso viene talvolta usato. Ci sono poi simboli come ς , ϖ e Υ che troverete usati solo raramente. Insomma, se vi limitate ai simboli più usati, avete una lista del tipo

α	alpha
β	beta
γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ϵ, ε	epsilon
ζ	zeta
η	eta
$\theta, \vartheta, \Theta$	theta
κ	kappa
λ, Λ	lambda
μ	mu
ν	nu
ξ, Ξ	xi
π, Π	pi
ρ, ϱ	rho
σ, Σ	sigma
τ	tau
ϕ, φ, Φ	phi
χ	chi
ψ, Ψ	psi
ω, Ω	eta

Dimensioni fisiche

Uno studente deve trovare la formula che esprime l'area A della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo, avente spigoli di lunghezze a , b e c . Poi deve calcolare il

valore numerico di tale area, ponendo $a = 1$ cm, $b = 2$ cm e $c = 3$ cm. In base ai propri calcoli, lo studente trova la formula

$$A = 6abc$$

Riguardando la formula, lo studente si rende conto che deve aver commesso un errore. Infatti, mentre il primo membro deve rappresentare un'area, il secondo membro è omogeneo a un volume. In effetti, sostituendo i simboli a secondo membro con i loro valori numerici e tenendo conto delle unità di misura corrispondenti, si troverebbe $A = 36$ centimetri cubi, il che è assurdo.

Si dice che due grandezze omogenee (dello stesso tipo), come due masse o due resistenze elettriche, hanno le stesse *dimensioni fisiche*. Scelte alcune grandezze come fondamentali, per es., per la meccanica, lunghezza, massa e tempo, si determinano le dimensioni di una generica altra grandezza, riportandole a quelle delle grandezze fondamentali, utilizzando formule geometriche, definizioni o leggi fisiche. Così, ad es., si dice che un volume ha le dimensioni di una lunghezza al cubo, che una velocità ha le dimensioni di una lunghezza per un tempo alla meno uno, che una forza ha le dimensioni di una massa per una lunghezza per un tempo alla meno due ($f = ma$). Una volta trovate le dimensioni di una grandezza, rimane automaticamente fissata l'unità di misura corrispondente a partire da quelle delle grandezze fondamentali.

Nello sviluppare questa *analisi dimensionale*, si utilizza un simbolismo in cui le dimensioni di una generica grandezza vengono indicate racchiudendone il simbolo fra parentesi quadrate.

Così per le dimensioni della velocità, si scrive

$$[v] = [l/t] = [l t^{-1}],$$

e se le unità per lunghezza e tempo sono metro (m) e secondo (s), ne segue che l'unità per la velocità è m/s (o suoi multipli o sottomultipli). Se vogliamo determinare dimensioni e unità per la resistività, possiamo servirci del legame (già ricordato) fra resistività ρ , lunghezza l , area della sezione S e resistenza R di un filo conduttore, cioè del legame $R = \rho l/S$. Da esso deriva

$$[\rho] = [RS/l] = [Rl^2/l] = [Rl],$$

che mostra che la resistività ha le dimensioni di una resistenza elettrica moltiplicata per una lunghezza. Nel cosiddetto Sistema Internazionale per le unità di misura, l'unità per la resistività è allora ohm \times metro (citata nella sezione sulle potenze di dieci).

Quando, nel risolvere un problema, ricavate una formula che esprime una grandezza in funzione di altre, accertatevi sempre che primo e secondo membro abbiano le stesse dimensioni fisiche.

Tenete anche presente che l'argomento di molte funzioni deve essere adimensionale. Considerate, per es., le funzioni trigonometriche. Esse devono avere per argomento un angolo, quantità che nel sistema internazionale si misura in radianti, cioè come rapporto di due lunghezze. Perciò non avrebbe senso calcolare il seno di una lunghezza o di una temperatura (incidentalmente, il risultato dipenderebbe dall'unità di misura scelta).

Esistono moltissimi casi in cui si ha a che fare con funzioni sinusoidali il cui argomento dipende dal tempo. Basta che consideriate la tensione alternata fornita dalla rete elettrica. Essa cambia sinusoidalmente nel tempo. Questo però non significa che l'argomento della funzione sinusoidale sia direttamente il tempo. Scriverete invece una tensione alternata con una formula del tipo $V(t) = V_M \sin(\omega t)$, dove V_M è il valore massimo raggiunto periodicamente dalla tensione al passare del tempo t e ω è una grandezza, detta pulsazione, che ha le dimensioni di un angolo diviso un tempo e che quindi si misura in radianti al secondo (rad/s).

Grafici

L'uso dei grafici è fondamentale nell'ingegneria. Nei corsi di matematica imparerete tecniche raffinate per studiare l'andamento del grafico di una funzione. Già a livello elementare però potete capire alcuni aspetti di tale comportamento. Ne troverete degli esempi nelle soluzioni dei quesiti pubblicati sul sito.

Appendice

La gara di matematica

E' un ricordo della mia infanzia. Abitavo a Gottinga nel dicembre del milleottocentosettanta. Mio padre ed io giungemmo all'Accademia quando il presidente Maust stava cominciando l'appello dei partecipanti alla Gara Mondiale di Matematica. Subito babbo andò a mettersi fra gli iscritti dopo avermi affidato alla signora Katten, amica di famiglia. Seppi da lei che il colpo del cannone di Pombo, il bidello, avrebbe segnato l'inizio della storica contesa. La signora Katten mi raccontò un episodio, ignoto ai più, intorno all'attività di Pombo. Costui sparava da trent'anni un colpo di cannone per annunciare il mezzogiorno preciso. Una volta se n'era dimenticato. Il dì appresso, allora, aveva sparato il colpo del giorno prima, e così di seguito fino a quel venerdì del milleottocentosettanta, Nessuno a Gottinga si era mai accorto che Pombo sparava il colpo del giorno avanti. Esauriti i preliminari, la gara ebbe inizio alla presenza del principe Ottone e di un ragguardevole gruppo di intellettuali.

Uno, due, tre, quattro, cinque...

Nella sala si udivano soltanto le voci dei gareggianti. Alle diciassette circa, avevano superato il ventesimo migliaio. Il pubblico si appassionava alla nobile contesa e i commenti si intrecciavano. Alle diciannove, Alain, della Sorbona, si accasciò sfinito.

Alle venti, i superstiti erano sette.

'36767, 36768, 36769, 36770 ...'

Alle ventuno Pombo accese i lampioni. Gli spettatori ne approfittarono per mangiare le provviste portate da casa.

