Soluzioni dei quesiti di scienze (3)

1) Ricordatevi che se la lunghezza di una molla di costante elastica K viene variata di una quantità x, la molla risponde con una forza elastica $-Kx$, dove il segno meno indica che si tratta di una forza di richiamo, cioè di una forza che tende a riportare la molla alla configurazione di riposo. Perciò la quantità KL ha le dimensioni di una forza. La quantità cui si riferisce il quesito (KLT) ha le dimensioni di una forza per un tempo. Il secondo principio della dinamica ($f = ma$) comporta l'equazione dimensionale $[f] = [mlt^{-2}]$, da cui segue, moltiplicando membro a membro per un tempo $[ft] = [mlt^{-1}]$. Quindi una forza per un tempo è quanto dire una massa per una velocità, cioè una quantità di moto (risposta E).

2) Per prima cosa, non fate confusioni fra il vettore velocità e il suo modulo. Nel moto circolare uniforme, il modulo della velocità è costante, ma la direzione cambia continuamente, mantenendosi tangente alla traiettoria circolare. Ciò significa che l'accelerazione non è zero. Essa è sempre diretta verso il centro (accelerazione centripeta) e si dimostra che il suo modulo è v^2/R. La forza necessaria per produrre questa accelerazione è diretta verso il centro e ha modulo mv^2/R. Si tratta ora di esprimere questa quantità mediante i dati del problema. In particolare, non si suppone dato esplicitamente il raggio. Tuttavia si suppone nota la frequenza, cioè l'inverso del periodo. Ora, il periodo sarà dato dal rapporto fra la lunghezza della circonferenza e la velocità: $T = 2\pi R/v$. Perciò potete scrivere $R = vT/(2\pi) = v/(2\pi\nu)$. Sostituendo questa nell'espressione data prima per la forza otterrete la risposta A.

3) E' un esempio tipico di processo di cambiamento di fase. Via via che si estrae il pistone, altra acqua passa dalla fase liquida a quella di vapore. Pressione e temperatura restano invariate finché tutta l'acqua non è passata alla fase vapore. La risposta corretta è la C.

4) La capacità è inversamente proporzionale alla distanza fra le armature e quindi, quando tale distanza viene dimezzata, la capacità raddoppia. Tenendo conto della relazione che sussiste per un condensatore fra la capacità C, la carica Q e la d.d.p. V, cioè $C = Q/V$, potete dedurre che, raddoppiando la capacità, raddoppia anche la carica (risposta C) (ricordatevi che la d.d.p. ai capi del condensatore è fissata, essendo uguale alla f.e.m. del generatore).

5) Basta che vi ricordiate che, dati due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ che formino fra loro un angolo ϑ, il loro prodotto scalare è $ab\cos\vartheta$. In questo caso i moduli di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono entrambi uguali a v. Siccome il coseno di $\pi/3$ è $1/2$, ottenete il valore dato in D.

6) L'intensità della corrente nei due resistori è la stessa e quindi, secondo la legge di Ohm ($V = Ri$), la d.d.p. agli estremi della serie si ripartisce in modo proporzionale alle

resistenze dei due resistori. Perciò, se le tensioni sui due resistori sono 3 V e 7 V, il rapporto richiesto è 7/3 (risposta E).

7) Il numero atomico (indicato di solito con la lettera Z) rappresenta il numero di protoni presenti nel nucleo di un atomo (risposta B). Al variare del numero atomico abbiamo i vari elementi presenti nella tavola periodica. Se l'atomo è neutro il numero di elettroni è uguale a quello dei protoni e quindi al numero atomico. Tuttavia l'atomo può essere *ionizzato*, cioè può essere stato privato di uno o più dei suoi elettroni o, viceversa, può avere acquisito uno o più elettroni rispetto a quelli richiesti per la neutralità elettrica. Come saprete, si parla allora di *ione*. Per specificare uno ione si usa il simbolo dell'elemento, per es. Ar (argon), con dei segni + o -, che indicano la cessione o l'acquisto di elettroni. Così, il simbolo Ar^{++} indica un atomo di argon ionizzato due volte, che ha perso due elettroni, e che quindi ha una carica complessiva positiva pari a due cariche elettroniche (prese in valore assoluto). Similmente, si dice che il cristallo di cloruro di sodio (sale da cucina) è costituito da ioni Na^+ e Cl^-, legati da forze elettrostatiche.

8) Quando entrambi gli animali vanno alla massima velocità, il ghepardo va a 30 km/h (= 30000/3600 m/s) rispetto alla gazzella e in 15 s fa $15 \times 30/3.6 = 125$ m. La risposta giusta è la E. Il quesito può far venire in mente il paradosso di Zenone[1] su Achille e la tartaruga (vedi appendice).

9) Quando il grave inizia a salire, la sua energia cinetica si trasforma progressivamente in energia potenziale, fino a annullarsi nel punto di massima quota. Da tale posizione il grave ricade e in tale fase ha luogo il processo inverso (l'energia potenziale si ritrasforma in energia cinetica). Le due fasi (salita e discesa) sono simmetriche. La risposta giusta è la C.

Per completezza, possiamo esaminare il moto più in dettaglio. Durante la salita il grave, ostacolato dalla forza peso, compie un moto uniformemente decelerato. Usando un asse di riferimento orientato verso l'alto, possiamo dire che, se il grave viene lanciato con velocità iniziale v_0, la sua velocità istantanea segue la legge $v(t) = v_0 - gt$, dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità. Il grave giunge alla quota massima quando v si annulla, cioè per $t = v_0/g$, che è la quantità indicata con Δt_s dal problema. Notate che, dopo tale istante la velocità diventa negativa, che è quanto dire che il moto è diretto verso il basso. Scrivete ora la legge di variazione di y (quota), cioè $y(t) = v_0 t - gt^2/2$ e imponete la condizione $y = 0$. Le soluzioni dell'equazione $v_0 t - gt^2/2 = 0$ sono: $t = 0$ e $t = 2v_0/g$. La seconda specifica l'istante in cui il grave torna a terra e quindi la durata complessiva del processo di salita e discesa. Come vedete, esso è il doppio del tempo di salita. In conclusione è: $\Delta t_s = \Delta t_c$ (risposta C).

10) Il passaggio di calore da un corpo a temperatura più bassa ad uno a temperatura più alta non può avvenire spontaneamente, ma non è vietato (né dal primo, né dal secondo

[1] Zenone di Elea, V sec. a. C.

principio). Altrimenti, addio frigoriferi. Il processo però richiede una macchina (frigorifera appunto) a cui dovete fornire energia (risposta C).

Appendice

Achille pieveloce[2] deve raggiungere la tartaruga, che sta a una distanza da lui che indichiamo con D_1. Il paradosso vuole dimostrare che Achille ha bisogno di un tempo infinito per raggiungere la tartaruga ed è formulato come segue. Per raggiungere la tartaruga, Achille deve, per prima cosa, percorrere la distanza D_1. Nel tempo che gli occorre, la tartaruga si sarà spostata di un altro tratto, diciamo D_2. Quindi Achille dovrà anche percorrere la distanza D_2 e, nel tempo che Achille impiega per fare ciò, la tartaruga si sarà spostata di un ulteriore tratto D_3. Avrete capito la conclusione: Achille deve percorrere infiniti tratti (anche se sempre più piccoli, ma non nulli) e per far questo gli servirà un tempo infinito.

Che questa conclusione non sia lecita può essere visto con un esempio numerico. Supponiamo che sia $D_1 = 50$ m e che la velocità di Achille sia 10 m/s. Supponiamo inoltre, per semplificare i calcoli, che la tartaruga sia pure molto veloce e che vada a 5 m/s. Il tempo che Achille impiega per compiere il tratto D_1 è $50/10 = 5$ s. In questi 5 secondi la tartaruga compie un tratto $D_2 = 5{\times}5 = 25$ m. Allora Achille, per percorrere la distanza D_2, ha bisogno di altri $25/10 = 2{,}5$ s, durante i quali la tartaruga farà un tratto $D_3 = 5{\times}2{,}5 = 12{,}5$ m. Achille impiega un tempo $12{,}5/10 = 1{,}25$ s per fare il tratto D_3 e così via.

Il tempo complessivo, diciamo t_{tot}, che serve ad Achille si esprime allora come la somma di infiniti termini ognuno dei quali (a partire dal secondo) è la metà del precedente:

$$t_{tot} = (5 + 2,5 + 1,25 + \cdots)\ \mathrm{s} \quad (1)$$

Il punto è che questa somma non dà un risultato infinitamente grande (come sembrerebbe dal ragionamento di Zenone), bensì semplicemente 10 secondi. A tempo debito vedrete come si ricava questo risultato sfruttando la cosiddetta *serie geometrica*. Per ora ci possiamo accontentare di una giustificazione intuitiva a carattere geometrico. Supponete di prendere un segmento lungo 10 cm e di dividerlo in due parti uguali. Mettete via una delle due parti (da 5 cm) e dividete l'altra in due parti da 2,5 cm. Mettetene via una e dividete l'altra in due segmenti da 1,25 cm. Proseguite così senza fine[3]. Se riunite tutti i segmenti che avete messo via durante questo processo, che cosa otterrete? Ovviamente il segmento originale. E' quanto dire che la somma delle lunghezze degli infiniti segmenti $(5 + 2,5 + 1,25 + \cdots\ \mathrm{cm})$ dà come risultato 10 cm. Sostituite i segmenti con gli intervalli di tempo e otterrete che la somma di tutti i tempi che compaiono nella (1) dà 10 s (la matematica è la stessa nei due casi).

Naturalmente, di fronte al problema di calcolare il tempo necessario ad Achille per raggiungere la tartaruga, nessuno si sogna di adoperare un approccio così elaborato. In modo molto più semplice, si divide la distanza D_1 per la velocità relativa di Achille rispetto

[2]L'uso di simili appellativi nella denominazione di personaggi era usuale nella letteratura greca antica: Atena dagli occhi di civetta, Elena dalle bianche braccia, il molto accorto Ulisse,...

[3]Non fatevi fuorviare dal fatto che, materialmente, questa operazione vi richiederebbe un tempo infinito. Qui dovete pensare a un'operazione fatta solo mentalmente.

alla tartaruga (che nel nostro esempio sarebbe di 5 m/s). E' il procedimento che abbiamo seguito nel risolvere il quesito 8.

Ancora qualche commento. Avrete notato che un ruolo essenziale per arrivare a trovare che la somma degli infiniti intervalli di tempo dà risultato finito è giocato dal fatto che i successivi termini che si sommano diventano sempre più piccoli[4]. In realtà, in problemi di questo genere, non basta che i successivi termini diventino sempre più piccoli: devono farlo con un tasso di decrescita sufficientemente alto. Per es., se considerate una somma di n termini del tipo

$$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots + 1/n,$$

benché i termini che si aggiungono al crescere di n siano sempre più piccoli, il valore di S_n si può rendere più grande di qualsiasi numero prefissato (non importa quanto grande) pur di dare a n un valore sufficientemente alto[5]. Anche di questo vi renderete conto quando, nei corsi di matematica, studierete la *serie armonica*.

Va detto comunque che i problemi che coinvolgono il concetto di infinito sono estremamente delicati e hanno dato luogo a raffinate speculazioni filosofiche nel corso dei secoli. E' solo in casi relativamente semplici, come risulta, al giorno d'oggi, quello del paradosso di Achille e la tartaruga, che si giunge a risultati corretti anche senza entrare nelle sottigliezze connesse al concetto di infinito.

[4]Bertrand Russell annotava al riguardo: *...se Achille raggiungerà mai la tartaruga, questo dovrà accadere dopo che sia trascorso un numero infinito di istanti dal momento della sua partenza. E questo, di fatto, è vero, ma non è vero che un numero infinito di istanti dia luogo a un tempo infinitamente lungo, e quindi non si può affatto concludere che Achille non raggiungerà mai la tartaruga.* B. Russell, *Principia Mathematica* - Cambridge University Press - 1910-1913, Vol II.

[5]La prima dimostrazione di ciò è dovuta a un pensatore del 1300, Nicola Oresme (1323-1382).