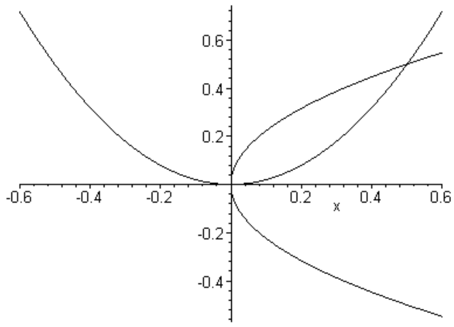
Soluzioni dei quesiti di matematica (5)

1) Osservate che il secondo membro si può scrivere come 2^3. Quindi l'equazione richiede che sia $x^2 - 1 = 3$, ovvero $x^2 = 4$. La risposta corretta è la E.

2) Se nella seconda equazione sostituite y con l'espressione fornita dalla prima ($y = 2x^2$) ottenete $x = 8x^4$. Questa è soddisfatta se $x = 0$. Se è $x \neq 0$, possiamo dividere membro a membro per x e otteniamo l'equazione $1 = 8x^3$, che è soddisfatta se $x = 1/2$. Queste sono le ascisse dei due punti d'incontro. Potete calcolare le ordinate corrispondenti inserendo tali ascisse nella prima equazione ($y = 2x^2$). La coppia di punti che si ottiene è quella della risposta E.

Vale la pena di visualizzare le due curve nel piano xy. Osservate che la seconda curva ($x = 2y^2$) si può esprimere come $y = \pm\sqrt{x/2}$.



Si tratta di due parabole, aventi gli assi y e x (nell'ordine) come assi di simmetria, delle quali la figura evidenzia i punti d'intersezione.

3) Sia $\log_2 x = -b$, con $b > 0$. Allora x è della forma $x = 2^{-b} = 1/2^b$, che è minore di 1. La risposta corretta è quindi la B.

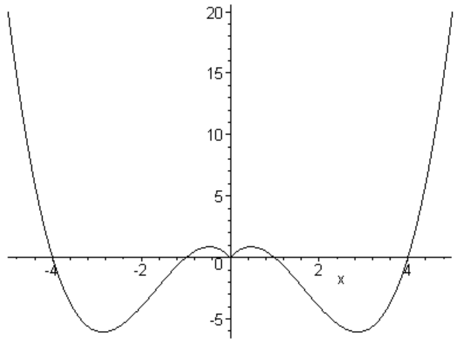
4) Se α e β hanno lo stesso seno ma tangente opposta, vuol dire che hanno coseno opposto (dato che la tangente è uguale al rapporto fra seno e coseno). Ciò succede nel caso A.

5) Dalla regola di sviluppo della potenza di un binomio (che abbiamo già richiamato) segue che il primo membro della disequazione è lo sviluppo di $(x-1)^3$. Questa potenza è positiva se e solo se lo è la base, cioè se $x > 1$ (risposta B).

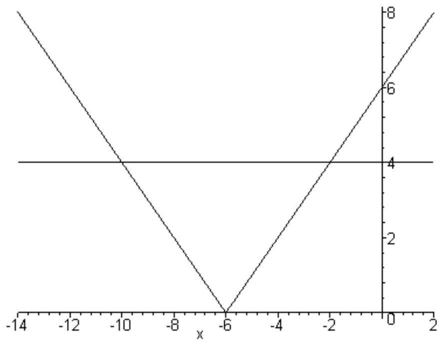
6) E' $(1/2)^3(1/3)^{-2} = (1/8)3^2 = 9/8 = 1 + 1/8$. Perciò è corretta la risposta A.

7) Il primo membro della disequazione, $|x|^3 - 5x^2 + 4|x|$, individua una funzione pari. E' sufficiente allora studiare il comportamento del trinomio $x^3 - 5x^2 + 4x$ sulle x non negative, trovare gli intervalli in cui la disequazione è soddisfatta e poi simmetrizzarli rispetto

all'origine. Sul semiasse $x \geq 0$ il trinomio $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4)$, che si annulla nell'origine, è positivo se entrambi i fattori x e $(x^2 - 5x + 4)$ lo sono. Il secondo di essi, in particolare, è positivo all'esterno dell'intervallo delle radici dell'equazione $x^2 - 5x + 4 = 0$, che, com'è facile trovare, sono in $x = 1$ e $x = 4$. Perciò, sulle x non negative, la disequazione è soddisfatta se $0 < x < 1$ oppure se $x > 4$. Simmetrizzando tali intervalli, si trova che la risposta corretta è la E. La figura qui sotto mostra il grafico della funzione $|x|^3 - 5x^2 + 4|x|$.



8) Considerate prima il caso in cui la quantità $x + 6$ è positiva. Allora l'operazione di valore assoluto la lascia invariata e la disequazione ha la forma $x + 6 > 4$. Questa è soddisfatta se $x > -2$. Supponete ora che $x + 6$ sia negativo. Allora $|x + 6| = -(x + 6)$ e la disequazione diventa $-x - 6 > 4$, che è soddisfatta per $x < -10$. Le due condizioni trovate sono compatibili e quindi la risposta giusta è la D.



Riflettete sulla struttura del grafico di $y = |x + 6|$. Tracciate prima la retta $y = x + 6$. Essa è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante (di equazione $y = x$) e taglia l'asse x in $x = -6$. Ora dovete prendere la parte di retta che sta al di sotto dell'asse x e ribaltarla verso l'alto (per effetto dell'operazione di valore assoluto). Se adesso tracciate la retta $y = 4$ (parallela all'asse x), la figura complessiva che ottenete è quella riportata sopra. E' evidente che $|x + 6|$ sta al di sopra di 4 per $x < -10$ e per $x > -2$.

9) Prendete $a = 2$ e $b = 1$. La relazione data implicherebbe l'uguaglianza $3/5 = 1/3$, che non è vera. Questo è sufficiente a escludere le risposte A, B e C. Meno immediata è la

scelta fra D e E. Se tenete presente il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ e inserite questa espressione a primo membro della relazione, potete dividere membro a membro per $a - b$ (che per ipotesi è diverso da zero). Con ciò la relazione diventa

$$(a+b)/(a^2+b^2) = 1/(a+b),$$

ovvero, moltiplicando membro a membro per $a + b$,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2.$$

Siccome il primo membro si sviluppa come $a^2 + b^2 + 2ab$, l'uguaglianza richiederebbe $ab = 0$, cosa esclusa dalle ipotesi del quesito. Dunque è corretta la risposta D.

10) La formula per la distanza d fra due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è

$$d = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}.$$

Conoscendo le ascisse (-3/2 e 3/2) e sapendo che i punti si trovano sulla retta $y = 4x/3 - 3$, possiamo calcolare le ordinate (-5 e -1, rispettivamente). Usando la formula detta, troviamo $d = 5$ (risposta E).

11) L'area di un settore circolare di raggio R e angolo al centro α è $\alpha R^2/2$. Nel caso specifico, il valore numerico è π. Il triangolo citato dal problema è rettangolo, con cateti di lunghezza 2 e quindi la sua area è 2. La risposta corretta è la A.

12) Sviluppando il quadrato otteniamo che la quantità data è $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$. Ricordando poi che vale l'identità fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (quale che sia l'argomento α) e che $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, si vede che la risposta corretta è la C.

13) Scrivete l'equazione dell'ellisse

$$(x/1)^2 + (y/2)^2 = 1,$$

ovvero

$$x^2 + y^2/4 = 1.$$

Ora imponete $y = 1$ (punti della retta) e avrete

$$x^2 = 3/4,$$

da cui segue che la risposta corretta è la E.

14) Indicate con N_u e N_d il numero degli uomini e delle donne, rispettivamente. La somma delle altezze di tutti i componenti del gruppo è allora $N_u h_u + N_d h_d$. Questo deve essere uguale al numero totale di persone, $N_u + N_d$, moltiplicato per l'altezza media h_m (differente da h_u e h_d). In formule: $N_u h_u + N_d h_d = (N_u + N_d)h_m$. Ne segue $N_u(h_u - h_m) = N_d(h_m - h_d)$. Perciò è $N_u/N_d = (h_m - h_d)/(h_u - h_m) = 1/3$ (risposta C).

15) Ricordando la regola secondo la quale in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente, possiamo dire che la lunghezza dell'ipotenusa sarà $5/\cos(\pi/3)$. La risposta giusta è la C.