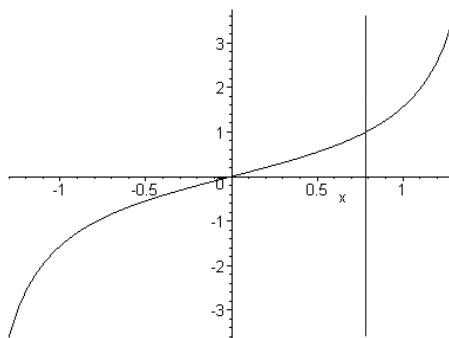


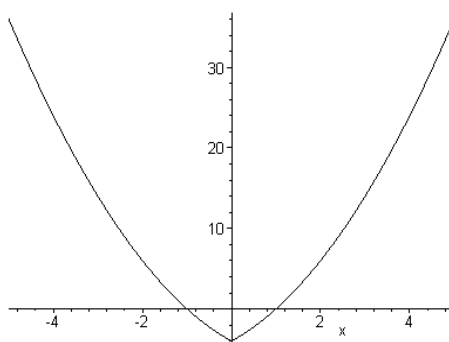
Soluzioni dei quesiti di matematica (4)

1) Facendo riferimento all'impostazione del quesito, tracciamo nel piano xy la retta $x = \pi/4$ (che è parallela all'asse delle y) e una parte del grafico di $\text{tg } x$. C'è un unico punto d'intersezione, le cui coordinate sono $x = \pi/4$ e $y = \text{tg}(\pi/4)$. Quest'ultima vale 1, sicché la risposta corretta è la A.



Benché sia istruttivo vedere il problema in termini grafici, dovrete osservare che, in pratica, il quesito vi sta solo chiedendo quanto vale la tangente di $\pi/4$.

2) Considerate dapprima l'equazione $x^2 + 3x - 4 = 0$. Essa ha le soluzioni $x = -4$ e $x = 1$. Il trinomio $x^2 + 3x - 4$ è negativo all'interno dell'intervallo $-4 < x < 1$. Quindi, se nella disequazione assegnata non ci fosse il simbolo di valore assoluto, la risposta corretta sarebbe la E. In particolare, sul semiasse $x \geq 0$, il trinomio è negativo per $0 \leq x < 1$. A causa della presenza del valore assoluto il trinomio cui si riferisce il quesito, $x^2 + 3|x| - 4$, è funzione pari e quindi, sulle $x \leq 0$, sarà negativo nell'intervallo $-1 < x \leq 0$ (e solo in esso). In conclusione, la risposta corretta è la A. Questo risultato è reso evidente dal grafico della funzione $x^2 + 3|x| - 4$, riportato qui sotto.



3) Perché il radicale interno abbia senso nel campo reale, occorre che sia $x \geq 2$. Inoltre, perché abbia senso il radicale esterno e sia soddisfatta la disequazione, deve essere

$2 - \sqrt{x-2} > 0$, ovvero $4 > x - 2$. Dunque la risposta giusta è la A.

4) Se sottraete le due equazioni una dall'altra otterrete $0 = 2 - 2x$ e quindi $x = 1$. Questo valore, sostituito, per es., nella prima equazione, fornisce $y = 0$. Dunque il punto d'incontro delle due rette è $(1, 0)$ (risposta B).

5) La funzione, dispari, $\sin x$ è non negativa in $0 \leq x \leq \pi$. Siccome la sostituzione di x con $|x|$ trasforma la funzione in una pari, la funzione $\sin(|x|)$ è non negativa in tutto l'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, nel quale vale l'uguaglianza richiesta (risposta C). Fate attenzione al fatto che mentre $|\sin x|$ è, ovviamente, non negativa per qualunque x , la funzione $\sin(|x|)$ assume anche valori negativi (per es., nell'intervallo $\pi < x < 2\pi$).

6) Tutte le rette proposte in A-E passano per il punto $(-2, 6)$. Solo una però ha il giusto coefficiente angolare. Infatti, la bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione $y = -x$ e qualunque retta parallela ad essa ha equazione del tipo $y = -x + \text{costante}$. Dato che la retta richiesta deve passare per $(-2, 6)$, la costante vale 4 e l'equazione corretta è quella della risposta D.

7) Basta considerare l'uguaglianza $V = 4\pi R^3/3$ (dove R è il raggio) come un'equazione in R . L'espressione che si ricava è la A.

8) Il prodotto $(a+b)^3(a-b)^3$ può scriversi $[(a+b)(a-b)]^3$ e siccome è $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, la risposta corretta è la A.

9) Dato che $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, l'uguaglianza detta richiede che sia $\sin x = 0$ oppure $\cos x = 1/2$. Fra quelli proposti, solo l'angolo C ha questa proprietà.

10) Potete usare la formula di sottrazione per i coseni, cioè $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Questo vi darà $\cos(\alpha - \beta) = 1/2$ (risposta D). Una via alternativa è quella di osservare che, sulla base dei valori dati per i coseni e i seni, risulta $\alpha = \pi/6$ e $\beta = -\pi/6$. Pertanto $\alpha - \beta = \pi/3$, il cui coseno è $1/2$.

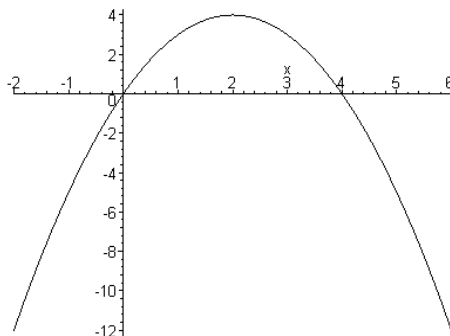
11) Se dagli estremi di uno dei lati del quadrato tracciate le congiungenti col centro, otterrete un triangolo rettangolo i cui cateti hanno la lunghezza del raggio, diciamo R , del cerchio. Perciò il lato del quadrato vale (teorema di Pitagora) $R\sqrt{2}$. Facendo il rapporto fra l'area πR^2 del cerchio e quella del quadrato, $2R^2$, vediamo che la risposta giusta è la B.

12) Il grafico della funzione $y = 4x - x^2$ appare come nella figura che segue. Si tratta di una parabola ad asse verticale con la concavità verso il basso. Essa è traslata verso destra e verso l'alto rispetto ad una parabola della forma $y = -x^2$. Potete rendervene

conto se applicate a secondo membro l'artificio (che avete già usato) del *completamento del quadrato*, cioè se scrivete

$$y = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = -(x - 2)^2 + 4.$$

Il massimo valore di y si ottiene quando la quantità non negativa $(x - 2)^2$, che viene sottratta a 4, è nulla.



Dunque il massimo è 4 (risposta A). Il vertice della parabola è nel punto (2, 4).

13) Vi serve una delle cosiddette formule di bisezione

$$\sin(\alpha/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}.$$

Applicando questa e tenendo conto che a $\pi/12$ il seno è positivo, troverete che la risposta corretta è la A.

14) Anche senza risolvere alcuna equazione, si intuisce che le due soluzioni sono 2 e 3. L'unica fra le equazioni A - E che sia soddisfatta da questi valori è la E. Però potrebbe venirvi il dubbio che esistano altre coppie di soluzioni che hanno la stessa somma e lo stesso prodotto. Allora chiamate x_1 e x_2 le due soluzioni e imponete le condizioni $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1 x_2 = 6$. Siccome x_1 e x_2 sono certamente diverse da zero (altrimenti il loro prodotto non farebbe 6), dividete la seconda relazione per x_1 e ricavate $x_2 = 6/x_1$. Poi sostituite questa nella prima relazione e avrete $x_1 + 6/x_1 = 5$, cioè l'equazione di secondo grado

$$x_1^2 - 5x_1 + 6 = 0,$$

che coincide con la E. Le soluzioni per x_1 , com'è facile calcolare, sono 2 e 3 e, corrispondentemente, quelle per x_2 sono 3 e 2.¹

Il problema si può risolvere nel modo più veloce se vi ricordate una proprietà delle soluzioni di un'equazione di secondo grado, che abbiamo già usato in precedenza e che ora rivediamo. Scriviamo l'equazione nella forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$). Le sue soluzioni

$$x_{1,2} = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/(2a),$$

¹Vale la pena di osservare che le equazioni $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1 x_2 = 6$ sono invarianti rispetto allo scambio di x_1 e x_2 . Perciò da esse si può solo derivare che una delle incognite vale 2 e l'altra 3, ma non quanto vale x_1 e quanto x_2 . Non sarebbe così se, invece del prodotto, fosse noto il rapporto x_1/x_2 . Per es., se fosse $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1/x_2 = 6$, trovereste facilmente $x_1 = 30/7$ e $x_2 = 5/7$.

godono delle proprietà che, sommate fra loro danno $-b/a$ e moltiplicate [tenete presente il prodotto notevole $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$] danno c/a . Perciò, dividendo termine a termine l'equazione per a e indicando con s la somma delle soluzioni e con p il prodotto, l'equazione diventa

$$x^2 - sx + p = 0,$$

e questa nel nostro caso produce l'equazione E.

15) E' la somma di una progressione geometrica, in cui il rapporto fra ogni termine (a partire dal secondo) e il precedente è una costante q , la cosiddetta ragione. Il suo valore è espresso dalla formula E. C'è un modo semplice per ricavare tale formula. Prendete $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1}$ e moltipicatelolo per $1 - q$. Ora pensate di sviluppare il prodotto $(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1})(1 - q)$. Otterrete uno sviluppo del tipo $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1} - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^N)$. Sciogliendo la parentesi si elidono tutti i termini meno il primo e l'ultimo. Perciò si ottiene $(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1})(1 - q) = 1 - q^N$. Da qui, dividendo membro a membro per $(1 - q)$ si ricava la formula voluta.