Soluzioni dei quesiti di matematica (3)

1) Anche senza usare i criteri di classificazione delle curve del second'ordine, è possibile rendersi conto che l'equazione data individua un'ellisse. Vediamolo in termini elementari.

Come già ricordato in precedenza, l'equazione di una circonferenza di raggio R, centrata sull'origine, è $x^2+y^2=R^2$ (teorema di Pitagora). Osservate che tale equazione può essere scritta come $(x/R)^2+(y/R)^2=1$. Se invece di una circonferenza avete un'ellisse di semiassi a e b allineati agli assi x e y rispettivamente, l'equazione che la descrive è $(x/a)^2+(y/b)^2=1$. L'effetto di uno spostamento del centro della curva dall'origine al punto (x_c, y_c) è, per entrambi i casi, quello di far comparire nell'equazione $x-x_c$ al posto di x e $y-y_c$ al posto di y. Così l'equazione dell'ellisse con centro in (x_c, y_c) e semiassi a e b si scrive $[(x-x_c)/a]^2+[(y-y_c)/b]^2=1$.

Osservate che l'equazione data, portando la costante -16 a primo membro, può scriversi $x^2-2x+(2y-4)^2=0$, ovvero $x^2-2x+4(y-2)^2=0$. Il termine in y ha la struttura $[(y-y_c)/b]^2$, con $y_c=2$ e $b=1/2$. Per quanto riguarda i termini in x usate l'artificio già visto del *completamento del quadrato*, cioè scrivete $x^2-2x=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione assegnata, quest'ultima diventa $(x-1)^2+4(y-2)^2=1$. Questa è l'equazione di un'ellisse di semiassi 1 e 1/2, il cui centro si trova nel punto (1,2) (risposta B).

2) Se x e y sono entrambi positivi, le risposte A, C diventano uguali alla E. Quest'ultima fornisce $[x+y+(x-y)]/2=x$, se $x>y$ e $[x+y+(y-x)]/2=y$ se $x<y$. Tuttavia la A e la C non danno il risultato corretto se x e y non sono entrambi positivi (potete facilmente verificarlo con qualche esempio). Perciò la risposta corretta è la E. Osservate pure che la B e la D coincidono se x e y sono entrambi positivi, e danno il minore fra x e y. La D conserva questa proprietà per qualunque coppia x, y (mentre la B no).

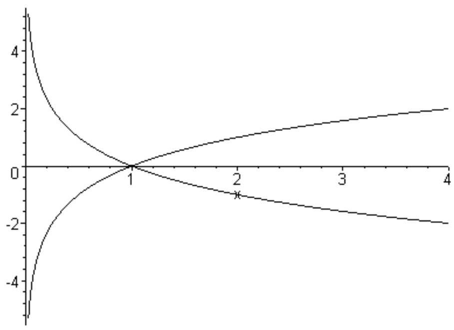
3) Ricordatevi che x^a/x^b è uguale a x^{a-b}. Perciò $3^5/3^2$ significa 3^3, cioè 27 (risposta B).

4) Notate intanto che la risposta A implicherebbe $\log_a 6=0$, mentre, per qualsiasi base, lo zero è il logaritmo di 1. Le risposte B e C implicherebbero che una delle basi (a o b) è negativa, il che è assurdo. La D è da scartare perché la base di un logaritmo non può essere 1. L'unica risposta che può essere corretta è quindi la E.

Potete comunque vedere che è la risposta giusta ricordando la regola per il cambiamento di base nei logaritmi, $\log_b x=\log_a x \log_b a$, dove x è un qualsiasi numero positivo. Applicata al nostro caso, la regola dà $\log_b 6=\log_a 6 \log_b a$. Ora tenete conto che, per ipotesi, è $\log_b 6=-\log_a 6$. Perciò ottenete $\log_b a=-1$ e ciò comporta $a=b^{-1}$.

Vale la pena di ricostruire la regola per il cambiamento di base. Supponiamo che il logaritmo in base a di un generico x sia L: $\log_a x = L$. Questo è quanto dire che $x = a^L$. Allora è $\log_b x = \log_b(a^L) = L \log_b a$ (avendo usato la regola per il logaritmo di una potenza), ovvero $\log_b x = \log_a x \log_b a$.

Il quesito evidenzia che se si considerano le due basi a e $1/a$, si ottengono, per ogni $x > 0$, logaritmi di valore opposto. A titolo d'esempio, la figura che segue riporta il grafico di $\log_2 x$ (curva che parte da valori negativi) e di $\log_{1/2} x$. I due grafici sono tracciati a partire da un valore minimo di x pari a 0.05. Diminuendo ulteriormente la x, si avrebbero valori del logaritmo sempre più grandi in valore assoluto.



5) Si tratta, come si dice, di un'equazione biquadratica. Prendendo x^2 come nuova incognita, diciamo y, l'equazione diventa $y^2 - 3y - 4 = 0$, che è di secondo grado in y. Le soluzioni per y sono -1 e 4. Siccome x^2 non può essere negativo (in campo reale), la soluzione accettabile per y è 4, il che corrisponde alle soluzioni 2 e -2 per x. Dunque la risposta corretta è la C.

6) La prima circonferenza è centrata sull'origine e ha raggio 2. La seconda ha pure raggio 2, ma il suo centro è traslato lungo l'asse y di una quantità 1. Questo è sufficiente a concludere che le circonferenze s'incontrano in due punti (risposta C). Se volete trovare esplicitamente i punti d'intersezione, sottraete la seconda equazione, $x^2 + (y-1)^2 = 4$, dalla prima, $x^2 + y^2 = 4$. Questo vi dà

$$2y - 1 = 0, \quad \text{da cui segue } y = 1/2.$$

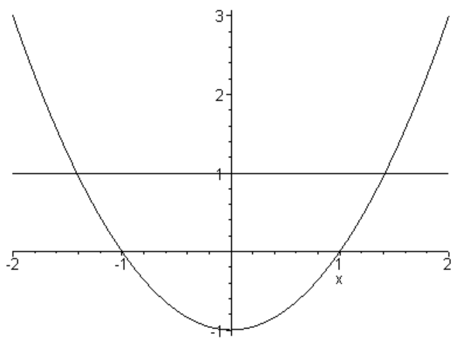
Se inserite questo valore nella prima equazione, trovate $x = \pm\sqrt{15}/2$. In conclusione i punti d'intersezione sono $(\sqrt{15}/2, 1/2)$ e $(-\sqrt{15}/2, 1/2)$.

7) La risposta giusta è la B. Infatti, vale la proprietà generale che il binomio $x - \alpha$ divide il polinomio $P(x)$ se e solo se il polinomio si annulla per $x = \alpha$.

8) La relazione A è assurda perché i polinomi a primo e secondo membro hanno grado diverso. La B è errata perché il primo membro è lo sviluppo di $(x-y)^3$. La C non può essere vera perché, ad es., il coefficiente di x^4 è 1 a primo membro e 2 a secondo membro. La E è errata perché, applicando due volte la regola del prodotto notevole $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, si vede che il primo membro uguaglia x^4-y^4. La risposta corretta è la D, come è facile controllare sviluppando il prodotto a secondo membro.

9) La bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione $y=x$. Qualunque retta parallela ad essa ha equazione del tipo $y=x+$ costante. Dato che la retta richiesta deve passare per (1, 4), la costante vale 3 e l'equazione corretta è quella della risposta B.

10) Basta che sostituiate y con 1 nella seconda equazione. Ciò dà l'equazione $x^2=2$, che ha le due soluzioni $\pm\sqrt{2}$. La risposta corretta è la C. Osservate che, dal punto di vista geometrico, la curva $y=x^2-1$ è una parabola ad asse verticale e concavità verso l'alto il cui vertice è in $(0,-1)$.



E' ovvio che essa sia tagliata in due punti dalla retta, che è la parallela all'asse x passante per $y=1$.

11) Il volume del cono è dato da un terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza. Indicando con R il raggio di base, con h l'altezza e con V_c il volume, abbiamo

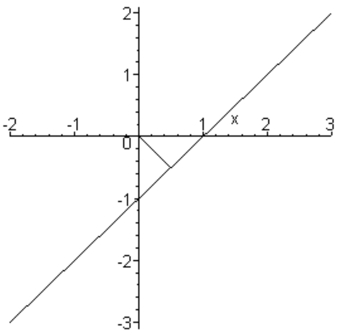
$$V_c=\pi R^2 h/3.$$

D'altronde, il volume, diciamo V_s, di una sfera di raggio R è (*Il volum della sfera qual è? ...*).

$$V_s=4\pi R^3/3.$$

Uguagliando V_c e V_s, si ottiene che $h=4R$ (risposta E).

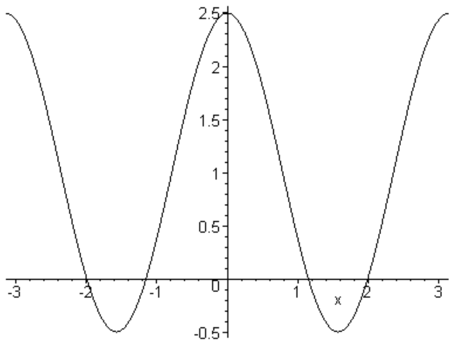
12) Disegnate la retta $y = x - 1$. Essa passa per i punti (0, -1) e (1, 0) che, insieme all'origine, sono i vertici di un triangolo rettangolo isoscele con cateti di lunghezza 1.



La distanza dall'ipotenusa del vertice ad essa opposto sarà $1/\sqrt{2}$ (risposta E).

13) Potete tradurre il problema in una coppia di equazioni. Chiamate G lo stipendio di Gianni e M quello di Mario. Allora la prima asserzione si traduce nell'equazione $G + 2M = 3200$ e la seconda nell'equazione $2G + M = 3400$. Dunque un problema di due equazioni nelle due incognite G e M. Moltiplicate la prima equazione per 2, il che vi dà $2G + 4M = 6400$. Ora sottraete da questa la seconda equazione. Resta $3M = 3000$, da cui deducete che la risposta corretta è la C.

14) Vi ricordate che $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$? Se inserite questa formula nella funzione data otterrete $1/2 + (2\cos^2 x - 1) + \cos^2 x = 3\cos^2 x - 1/2$. Ora, il $\cos^2 x$ assume tutti i valori fra zero e uno. La funzione va perciò da -1/2 a 5/2 (risposta B).



Il grafico della funzione è riportato in figura.

15) Sciogliendo la parentesi, la disequazione si scrive $4x^2 - 4x + 1 < 0$. Il primo membro è il

quadrato perfetto $(2x-1)^2$. Questo non può essere negativo, per cui la risposta corretta è la B. Se volete ragionare sul trinomio nella forma assegnata, considerate l'equazione $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Per essa troverete due radici reali coincidenti, in corrispondenza al valore 1/2. Ricordate ora che il trinomio $4x^2 - 4x + 1$ ha lo stesso segno del termine di secondo grado, in questo caso positivo, al di fuori dell'intervallo delle radici e segno opposto entro tale intervallo. Siccome le due radici coincidono, il trinomio non è mai negativo (vedi figura).