

Soluzioni dei quesiti di matematica (2)

1) Indicate con x la durata della vita di Diofanto. Allora l'epitaffio equivale all'equazione $x/6 + x/7 + x/12 + 5 + x/2 + 4 = x$, ovvero, portando i termini con x a secondo membro, $9 = x(1 - 1/6 - 1/7 - 1/12 - 1/2) = 9x/84$, la cui soluzione è $x = 84$ (risposta D).

2) Indichiamo con R il raggio interno della corona. Il raggio esterno è $3R$ e l'area A della corona (differenza fra l'area del cerchio di raggio $3R$ e quella del cerchio di raggio R) vale $A = \pi(9R^2 - R^2) = 8\pi R^2$. Se r è il nuovo raggio interno, la condizione da imporre è $\pi(9R^2 - r^2) = A/2 = 4\pi R^2$, da cui segue $r^2 = 5R^2$. In conclusione, il raggio interno va aumentato per un fattore $\sqrt{5}$ (risposta E).

3) Supponete che sia $x > a$. Allora $|x-a| = x-a$ e quindi $|x+a| - |x-a| = x+a - (x-a) = 2a$. Già questo (siccome solo una delle risposte è giusta) indica che la risposta corretta è la D. Comunque, se ora supponete $x < -a$, avrete $|x+a| = -(x+a)$ e $|x-a| = -(x-a)$. Perciò risulta $|x+a| - |x-a| = -x-a + (x-a) = -2a$. Il modulo di questa espressione è $2a$, come indicato nella risposta D. State attenti al fatto che la relazione $|-2a| = 2a$ vale perché, nelle ipotesi del quesito, è $a > 0$. Se fosse $a < 0$ la relazione sarebbe $|-2a| = 2|a|$.

Per completare l'analisi, esaminate anche il caso $-a \leq x \leq a$. Dovreste trovare $|x+a| - |x-a| = 2x$ e quindi $||x+a| - |x-a|| = 2|x|$. Questa coincide con la risposta A, solo che non vale per gli intervalli di x richiesti dal problema.

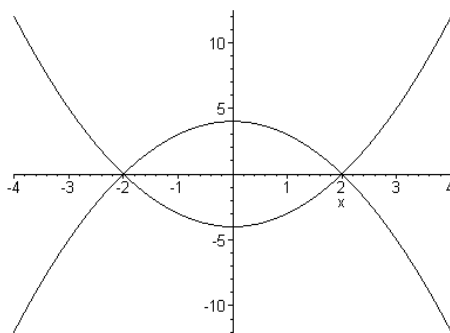
4) Dato che $(-2)^3$ è un numero negativo, il logaritmo richiesto non esiste (risposta A).

5) Ovviamente potete procedere per tentativi e scoprirete che l'equazione richiesta è la B. Un po' più istruttivo è ricollegarsi al fatto che un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, avente soluzioni x_1 e x_2 , può scriversi come $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Se applicate questa formula al caso del quesito, sviluppando $3(x-1)(x-4) = 0$, trovate l'equazione B. Potete sfruttare anche un'altra proprietà delle radici di un'equazione di secondo grado, sempre della forma $ax^2 + bx + c = 0$. Si tratta della proprietà secondo la quale la somma delle radici uguaglia $-b/a$ mentre il loro prodotto uguaglia c/a . Applicata al nostro caso (in cui è $a = 3$), essa fornisce $5 = -b/3$ e $4 = c/3$. Da qui segue l'equazione B.

6) Dalla $\log_{(a^2)}(x) = y$ segue $x = (a^2)^y$. Ricordando la regola per le potenze secondo la quale $(a^b)^c = a^{bc}$, troviamo $x = a^{2y}$. Dunque la risposta corretta è la C.

7) Uguagliando i secondi membri si ottiene $x^2 - 4 = 4 - x^2$, cioè $x^2 = 4$. Le y corrispondenti alle due ascisse possibili $x = 2$ e $x = -2$ sono nulle. Dunque la risposta corretta è la B.

Vale la pena di visualizzare, nel piano x, y , le due curve $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$ (vedi figura sotto). La prima è una parabola ad asse verticale e concavità verso l'alto, traslata verso il basso di una quantità 4 rispetto all'origine. La seconda è la simmetrica della prima rispetto all'asse x , cioè una parabola ad asse verticale e concavità verso il basso, traslata verso l'alto di una quantità 4 rispetto all'origine. E' ovvio che esse s'incontrano in due punti dell'asse x .



8) I numeri $1, 2, \dots, N$ formano una progressione aritmetica, cioè una progressione in cui la *ragione*, che (a partire dal secondo termine) è la differenza fra il generico termine della progressione e il precedente, è costante. Se avete presenti queste progressioni, ricorderete che per la somma dei primi N termini vale la regola: $a_1 + a_2 + \dots + a_N = N(a_1 + a_N)/2$. Applicando questa formula generale al caso del quesito ($a_1 = 1, a_N = N$) trovate che la risposta corretta è la B. Vale la pena di rivedere il ragionamento che porta alla formula per la somma delle progressioni aritmetiche. Prendete i numeri da sommare a coppie, nel seguente modo: il primo e l'ultimo, il secondo e il penultimo, il terzo e il terz'ultimo, ecc. Vi rendete conto facilmente che tutte queste coppie hanno la stessa somma (costruitevi un esempio: 1 e 100, 2 e 99, 3 e 98,..) e precisamente $a_1 + a_N$. Supponendo che N sia pari, di queste coppie ce ne sono $N/2$ e da qui segue subito la formula per la somma totale. La formula funziona anche per N dispari (avete $(N - 1)/2$ coppie con somma $a_1 + a_N$, più il termine centrale che vale la metà di $a_1 + a_N$). Un aneddoto che riguarda Gauss e la serie aritmetica è riportato in appendice 1.

9) La retta per due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , come si ricava con semplici proporzioni geometriche, ha equazione

$$(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1),$$

purché escludiamo le rette parallele all'asse y (cioè il caso $x_1 = x_2$). Applicandola al caso del problema, troverete che la risposta giusta è la B.

10) Scrivete la disequazione nella forma $x(5x^2 - 3x + 5) > 0$. Essa sarà soddisfatta se i fattori, x e $5x^2 - 3x + 5$, hanno lo stesso segno. Considerata l'equazione $5x^2 - 3x + 5 = 0$ si trova che essa non ha radici reali. Di conseguenza, il trinomio $5x^2 - 3x + 5$ ha sempre il segno del termine di secondo grado, cioè è positivo. Per soddisfare la disequazione occorre allora che anche l'altro fattore, x , sia positivo. Dunque la risposta corretta è la B.

11) Il volume del cilindro (area di base πR^2 per altezza $2R$) è $2\pi R^3$, mentre quello della sfera è $4\pi R^3/3$. (Ricorderete la regoletta: *Il volum della sfera qual è? Quattro terzi pi greco erre tre*). La loro differenza, divisa per il volume della sfera dà $1/2$ (risposta C).

12) Un triangolo inscritto in una circonferenza, che abbia un lato coincidente con un diametro è rettangolo. I lati AB e AC costituiscono rispettivamente, l'ipotenusa e un cateto. La lunghezza del lato BC , che costituisce l'altro cateto, si calcola allora col teorema di Pitagora. Infatti deve essere $(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2$, per cui risulta

$$\overline{BC} = \sqrt{(\overline{AB})^2 - (\overline{AC})^2}.$$

Numericamente, si trova il valore D.

13) Considerate il triangolo formato da due lati adiacenti del rettangolo e dalla diagonale che unisce i loro estremi. Si tratta di un triangolo rettangolo che ha la diagonale come ipotenusa. Ricordatevi che in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'altro moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo. L'angolo richiesto dal problema è opposto al cateto minore. Il rapporto fra cateto minore e cateto maggiore sarà $1/\sqrt{3}$ e questo è anche il valore della tangente dell'angolo cercato. Ne segue che l'angolo è quello dato dalla risposta C.

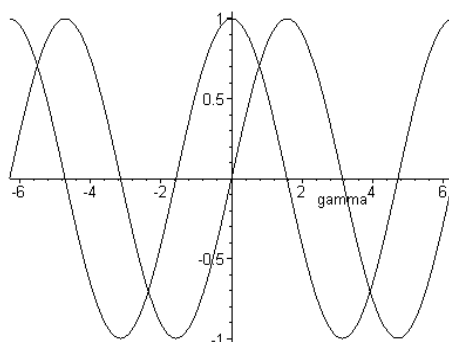
14) Un numero razionale è un numero che si può esprimere come rapporto di due interi. Perciò possiamo scrivere $a = m/n$ e $b = p/q$, con m, n, p e q interi. E' facile vedere che le prime quattro espressioni (da A a D) sono pure esprimibili come rapporto di due interi (riducete, quando necessario, a denominatore comune). L'espressione che non può sempre essere riportata al rapporto di due interi è la E. Basta che prendiate $a = b = 1$. E' ben noto che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale (vedi appendice 2).

15) Sviluppate il secondo membro dell'equazione data usando la formula di addizione per il seno. Ciò porta all'equazione

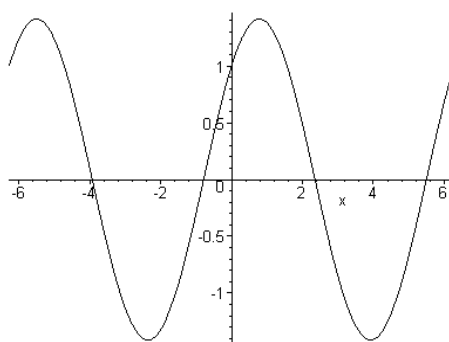
$$\sin x + \cos x = (G \cos \gamma) \sin x + (G \sin \gamma) \cos x.$$

Siccome l'uguaglianza deve valere per qualunque x (il che esclude che essa abbia la forma $0 = 0$), tanto $G \cos \gamma$ quanto $G \sin \gamma$ devono valere 1. Questo intanto richiede che sia $\cos \gamma = \sin \gamma$.

Come si intuisce dai grafici sovrapposti di $\sin \gamma$ e $\cos \gamma$,



ciò accade per infiniti valori di γ (le ascisse dei punti in cui i due grafici si intersecano). Si tratta dei valori $\gamma = \pi/4 + 2n\pi$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, oppure $\gamma = -3\pi/4 + 2n\pi$. In corrispondenza alla prima serie di valori risulta $\sin \gamma = \cos \gamma = 1/\sqrt{2}$, mentre in corrispondenza alla seconda risulta $\sin \gamma = \cos \gamma = -1/\sqrt{2}$. Il valore da dare a G nei due casi è $G = \sqrt{2}$ e $G = -\sqrt{2}$, rispettivamente. Fra le risposte suggerite nel quesito, solo la E va bene. Il grafico corrispondente è riportato in figura.



Vale la pena di osservare che la relazione data dal problema può essere generalizzata a una della forma

$$A \sin x + B \cos x = G \sin(x + \gamma),$$

con A e B non entrambi nulli. Sviluppando il secondo membro come prima e imponendo che i coefficienti di $\sin x$ a primo e secondo membro siano uguali e lo stesso accada per quelli di $\cos x$, si ottengono le condizioni

$$A = G \cos \gamma; \quad B = G \sin \gamma,$$

dalle quali, quadrando e sommando, otteniamo

$$A^2 + B^2 = G^2,$$

relazione che individua G a meno del segno. Ora, si può sempre assumere che G sia positivo. Infatti, passare da G a $-G$ equivale a cambiare γ in $\gamma \pm \pi$. Perciò si pone

$$G = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Inoltre, dalle due relazioni scritte sopra si ricava

$$\cos \gamma = A/\sqrt{A^2 + B^2}; \quad \sin \gamma = B/\sqrt{A^2 + B^2},$$

e da queste resta individuato l'angolo γ (a meno di multipli interi di 2π).

Appendice 1.

Quando Gauss (1777 - 1855) stava alle elementari, un giorno il maestro assegnò come compito ai ragazzi quello di sommare tutti gli interi da uno a cento. Probabilmente pensava che questo avrebbe richiesto molto tempo ai suoi studenti. Dopo qualche minuto però, Gauss si presentò dal maestro e gli dette la risposta: 5050. Gauss aveva seguito proprio il procedimento richiamato nella soluzione (ci sono 50 coppie che hanno per somma 101) per trovare il risultato (e, non a caso, la formula per la somma di una progressione aritmetica è spesso citata come formula di Gauss). Il povero maestro non poteva immaginare che il ragazzino che gli stava di fronte sarebbe diventato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

Appendice 2.

Pitagora (VI secolo a. C.) e la sua scuola erano convinti che i numeri interi governassero l'universo. In particolare pensavano che i numeri non interi fossero semplicemente e sempre il rapporto di due interi (come $2/3$ o $5/4$), cioè fossero numeri razionali. Su questa base avevano sviluppato la loro visione del mondo. Tuttavia uno di loro, Ippaso da Metaponto, scoprì una cosa tremenda. Scoprì che la radice quadrata di 2 non poteva essere scritta come rapporto di due interi (vedi dimostrazione sotto), o, equivalentemente, che la diagonale e il lato di un quadrato hanno lunghezze incommensurabili. Fu l'atto di nascita, per la mente umana, dei numeri *irrazionali*. La cosa era così sconvolgente che i pitagorici si vincolarono, con sacro giuramento, al segreto sull'esistenza degli irrazionali. Per stare più tranquilli, portarono Ippaso in alto mare e lo affogarono. Questo almeno è ciò che narra la leggenda.

La dimostrazione di Euclide

Euclide (III sec. a. C.) dette la seguente dimostrazione del fatto che $\sqrt{2}$ non è razionale. Supponiamo, ragionando per assurdo, che $\sqrt{2}$ si possa esprimere come un numero razionale m/n . E' sempre possibile ridurre la frazione ai minimi termini. Immaginando di averlo fatto, m e n devono essere primi fra loro. Quindi almeno uno di essi deve essere dispari (se fossero entrambi pari, avrebbero un fattore 2 in comune). Elevando al quadrato l'uguaglianza $m/n = \sqrt{2}$, otteniamo

$$m^2/n^2 = 2, \quad \text{ovvero } m^2 = 2n^2. \quad (1)$$

Perciò m^2 è pari e, siccome il quadrato di un numero dispari è dispari, (come lo dimostrereste?)¹ anche m deve essere pari. Quindi n dovrebbe essere dispari. Tuttavia, siccome m è pari, possiamo porre $m = 2q$, dove q è un opportuno intero. Sostituendo nella (1) abbiamo

¹Un generico numero dispari ha la forma $2s + 1$ con s intero. Se ne fate il quadrato, ottenete $4s^2 + 4s + 1 = 2(2s^2 + 2s) + 1$, che è ancora dispari.

$$4q^2 = 2n^2, \quad \text{ovvero } n^2 = 2q^2.$$

Ma allora anche n è pari! In conclusione, partendo dall'ipotesi che $\sqrt{2}$ sia esprimibile come rapporto fra due interi siamo giunti a una contraddizione. Perciò l'ipotesi è falsa.