

Soluzioni dei quesiti di matematica (1)

1) Ricordiamo che x^{-a} è uguale a $1/x^a$ e che $x^{1/b}$, con b intero positivo e x positivo, significa la radice b -esima di x . Perciò $9^{-1/2}$ significa $1/\sqrt{9}$, cioè $1/3$.

2) Riducendo a denominatore comune e dividendo per 2, la disequazione assume la forma $(x+3)/[(x+2)(x+4)] > 0$.

Questa è verificata se e solo se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. In tal caso anche il prodotto di numeratore e denominatore sarà positivo. Perciò si può fare riferimento alla condizione

$$(x+2)(x+3)(x+4) > 0.$$

Bisogna che i tre fattori siano tutti positivi, oppure che due siano negativi e uno positivo. Il primo caso si verifica se $x+2 > 0$ (e allora anche $x+3$ e $x+4$ saranno positivi) e quindi se $x > -2$. Il secondo caso si ha se $x+3 < 0$ (e allora sarà anche $x+2 < 0$) e se $x+4 > 0$. Ciò accade se $-4 < x < -3$. Dunque la risposta corretta è la D.

3) Ricordatevi che, per qualunque base, vale la regola $\log_a(x^n) = n \log_a x$. Perciò la relazione data nel quesito equivale a quest'altra: $3 \log_a x = 3$, e questo vuol dire che $\log_a x = 1$. Perciò è $a = x$ (risposta D).

4) Un generico polinomio $p(x)$ è esattamente divisibile per il binomio $x - c$, dove c è una costante, se e solo se c è una radice dell'equazione $p(x) = 0$, cioè se $p(c) = 0$ (teorema di Ruffini). I valori di c proposti nel quesito sono 4, 1, -1, 2, -3. Fra questi, solo il valore $c = 1$ rende nullo il polinomio $x^3 + 3x^2 - 4$. Quindi la risposta corretta è la B.

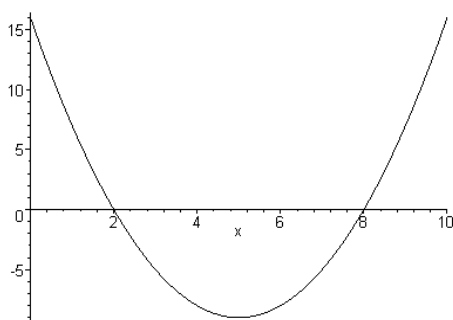
5) L'equazione di una circonferenza di raggio R , centrata sull'origine del piano xy , è $x^2 + y^2 = R^2$, equazione che, per il generico punto della circonferenza, segue dal teorema di Pitagora. Se il centro della circonferenza è nel punto di coordinate (x_c, y_c) , si trova, sempre col teorema di Pitagora, che l'equazione diventa $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$. Si tratta allora di riportare l'equazione data nel quesito a quest'ultima forma. Ciò può farsi usando l'artificio del *completamento del quadrato*. Infatti, l'espressione data contiene un termine quadratico ed uno lineare in x e analogamente per la y . Perciò, aggiungendo e togliendo termini opportuni, si possono far comparire dei quadrati di binomi. Più esplicitamente, potete scrivere $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 - 4y + 4 - 4) + 1 = (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0$, ovvero $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Vedete da qui che le coordinate del centro sono $x_c = 1$ e $y_c = 2$. La formula per la distanza d_{12} fra due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è (ancora una volta per il teorema di Pitagora)

$$d_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Nel nostro caso è $x_1 = x_c$, $y_1 = y_c$ e $x_2 = y_2 = 0$. Troverete allora che la risposta corretta è la D.

6) Nell'intervallo detto, sia il seno che il coseno sono negativi. Usando l'identità fondamentale $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, si ricava che la risposta corretta è la E.

7) La formula risolutiva per un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ è $x_{1,2} = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/(2a)$. In particolare, se il coefficiente del termine di primo grado è pari e viene scritto come $2b$, la formula diventa $x_{1,2} = [-b \pm \sqrt{b^2 - ac}]/a$. Considerata ora l'equazione $x^2 - 10x + 16 = 0$, si trova che le radici sono 2 e 8. Ricordatevi che il trinomio $x^2 - 10x + 16$ ha lo stesso segno del termine di secondo grado, in questo caso positivo, al di fuori dell'intervallo delle radici. La cosa può essere visualizzata con l'aiuto del grafico della funzione $y = x^2 - 10x + 16$.



Si vede bene che la y , che si annulla in corrispondenza alle radici prima dette, è negativa per $2 < x < 8$ e positiva all'esterno di tale intervallo. In conclusione, la risposta corretta è la D.

8) L'espressione a primo membro della disuguaglianza è uguale a $(x + 1)^4$, come potete facilmente controllare, per es., calcolando $(x + 1)^2(x + 1)^2$. Tale espressione non può essere negativa e quindi la risposta corretta è la B.

Vale la pena di aggiungere che, in generale, la potenza di un binomio, $(a + b)^n$, con $n \geq 1$, ha la struttura

$$(a + b)^n = t_0 a^n + t_1 a^{n-1} b + t_2 a^{n-2} b^2 + \dots + t_{n-1} a b^{n-1} + t_n b^n,$$

dove i coefficienti t_0, t_1, \dots sono gli elementi del cosiddetto triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{l} n = 1) \quad 1 \quad 1 \\ n = 2) \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n = 3) \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n = 4) \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ n = 5) \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

Come si vede, il primo e l'ultimo coefficiente valgono sempre 1. Gli altri coefficienti si calcolano in modo ricorrente prendendo la somma di quelli che, nella riga superiore, stanno nella stessa colonna e nella colonna precedente (vedi elementi in grassetto). Applicando questa regola per qualche valore di n , si ha

$$(a + b)^1 = a + b,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

In particolare, l'ultima espressione, con $a = x$ e $b = 1$, è uguale al primo membro della disuguaglianza proposta dal quesito.

9) Ricordiamo che $x^a \times x^b$ è uguale a x^{a+b} . Perciò la risposta giusta è la B.

10) Ragionate prima in termini numerici partendo da un capitale noto. Supponiamo che il capitale sia 100 \$ e il rendimento il 10 %, cioè 0.1. Alla fine dell'anno l'uomo avrà 110 \$, cioè $100 \times (1 + 0.1)$ \$. Reinvestendo i 110 \$, alla fine del secondo anno avrà un interesse di 11 \$, vale a dire un capitale totale di $110 \times (1 + 0.1)$ \$. Sostituendo 110 con $100 \times (1 + 0.1)$ vi rendete conto che il capitale dopo due anni è $100 \times (1 + 0.1)^2$ \$. Più in generale, dopo n anni, sarà $100(1 + 0.1)^n$ \$. Applicando questo ragionamento al quesito posto troverete che la risposta corretta è la C.

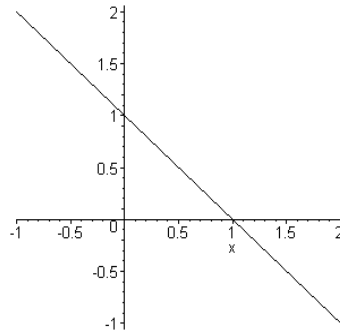
11) Osservate che il secondo membro si può scrivere come 2^{-4} . Quindi l'equazione richiede che sia $x^2 - 4 = -4$, ovvero $x^2 = 0$. Ne segue che la risposta corretta è la E.

12) Chiamate x il numero degli anni del figlio e y quello degli anni della madre. Sappiamo che $x = y/5$. Sappiamo inoltre che l'età del figlio fra due anni, cioè $x + 2$, sarà un quarto di quella che avrà la madre ($y + 2$), ovvero che $x + 2 = (y + 2)/4$. Sostituendo x con $y/5$ a primo membro si ricava che $y = 30$ (risposta D).

13) Ricordatevi l'espressione dell'equazione di una retta (non parallela all'asse delle y): $y = mx + q$. Il parametro m è il cosiddetto coefficiente angolare della retta e rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse x . Il parametro q è il valore di y che si ottiene ponendo $x = 0$, cioè l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse y . Se si vuole l'equazione di una retta con coefficiente angolare m e passante per il punto (x_0, y_0) , basta scrivere $y = m(x - x_0) + y_0$ (che ha sempre la forma $y = mx + q$, con $q = y_0 - mx_0$). Nel nostro caso, m è la tangente di $\pi/6$, cioè $1/\sqrt{3}$, e $x_0 = y_0 = 1$. Applicando le formule viste troverete che la risposta corretta è la A.

14) La regione del piano x, y i cui punti hanno entrambe le coordinate non negative è il primo quadrante. Ora considerate la retta $y = 1 - x$. Essa passa per i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

I punti che hanno $y \leq 1 - x$ individuano il triangolo della risposta D.



15) Prima di procedere per tentativi, confrontate le due equazioni. Noterete che il membro di sinistra della seconda non è altro che quello della prima moltiplicato per 3. Solo che i membri di destra non stanno in rapporto 3 e quindi le due equazioni sono incompatibili (se $x - 2y$ è uguale a 3, allora $3x - 6y$ dovrebbe valere 9). Il sistema non ha soluzioni (risposta D). Si può interpretare la cosa graficamente osservando che, se si ricava la y nella prima e nella seconda equazione, si ottengono le relazioni $y = x/2 - 3/2$ e $y = x/2 - 2/3$, che rappresentano le equazioni di due rette parallele (che quindi non hanno punti comuni).

