

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

Facoltà di Ingegneria

~~~~~

### Esercizi per il corso di recupero - settembre 2009 (terza parte)

#### RAZIONALIZZAZIONE DI FRAZIONI

- $\frac{4}{5\sqrt{2}}$       {R.  $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ }
- $\frac{25}{7\sqrt{5}}$       {R.  $\frac{5\sqrt{5}}{7}$ }
- $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{42}}$       {R.  $\frac{\sqrt{35}}{7}$ }
- $\frac{2\sqrt{80}}{5\sqrt{120}}$       {R.  $\frac{2\sqrt{6}}{15}$ }
- $\frac{4}{7-\sqrt{5}}$       {R.  $\frac{7+\sqrt{5}}{11}$ }
- $\frac{4}{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}$       {R.  $2(\sqrt{10}+2\sqrt{2})$ }
- $\frac{11+13\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$       {R.  $5+4\sqrt{2}$ }
- $\frac{2+\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$       {R.  $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ }
- $\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{7}+\sqrt{5}}$       {R.  $\frac{13\sqrt{5}+9\sqrt{7}+\sqrt{11}-2\sqrt{385}}{139}$ }
- $\frac{1}{6\sqrt[3]{3}}$       {R.  $\frac{\sqrt[3]{9}}{18}$ }
- $\frac{20}{\sqrt[3]{25}}$       {R.  $4\sqrt[3]{5}$ }
- $\frac{7}{\sqrt[3]{63}}$       {R.  $\frac{\sqrt[3]{147}}{3}$ }
- $\frac{11}{5-\sqrt[3]{4}}$       {R.  $\frac{25+2\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}}{11}$ }
- $\frac{15}{\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}}$       {R.  $\frac{2\sqrt[3]{50}-2\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{100}}{2}$ }

#### SCOMPOSIZIONE DI TRINOMI (tramite la risoluzione di un'equazione di secondo grado)

- $2x^2 + 7x + 5$       {R.  $(2x+5)(x+1)$ }
- $10x^2 - 21x - 10$       {R.  $(5x+2)(2x-5)$ }
- $26x^2 + 141x - 11$       {R.  $(2x+11)(13x-1)$ }
- $20x^2 + 76x - 187$       {R.  $(10x-17)(2x+11)$ }
- $x^2 - (a+3b)x + 3ab$       {R.  $(x-a)(x-3b)$ }
- $9x^2 - 9bx - a^2 + ab + 2b^2$       {R.  $(3x+a-2b)(3x-a-b)$ }
- $x^2 - 2x - 5 + 4\sqrt{2}$       {R.  $(x+1-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$ }
- $4x^2 + (16+2\sqrt{7})x + 1 + \sqrt{7}$       {R.  $(2x+3-\sqrt{7})(2x+5+2\sqrt{7})$ }
- $6x^2 + (a+8\sqrt{b})x - a^2 + 2b - a\sqrt{b}$       {R.  $(2x+a+2\sqrt{b})(3x-a+\sqrt{b})$ }

#### ALTRI PROBLEMI DA RISOLVERE CON EQUAZIONI DI SECONDO GRADO (o di grado superiore)

- Quali sono i due numeri reali che hanno somma  $\frac{15}{4}$  e prodotto  $\frac{9}{4}$ ?      {R.  $3$  e  $\frac{3}{4}$ }
- Quali sono i due numeri reali che hanno somma  $\frac{19}{10}$  e prodotto  $\frac{3}{5}$ ?      {R.  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{3}{2}$ }
- Quali sono i due numeri reali che hanno somma 12 e prodotto 34?      {R.  $6-\sqrt{2}$  e  $6+\sqrt{2}$ }

- Quali sono i due numeri reali che hanno somma  $\frac{5-\sqrt{13}}{8}$  e prodotto  $\frac{-5-\sqrt{13}}{16}$ ?  
 {R.  $\frac{3+\sqrt{13}}{8}$  e  $\frac{1-\sqrt{13}}{4}$ }
- Esistono due numeri reali che hanno somma  $-3$  e prodotto  $4$ ? Perché?
- In una frazione (data dal rapporto tra due numeri interi positivi), si sa che sommando  $7$  al numeratore ed al denominatore si ottiene una frazione di valore  $\frac{6}{5}$ . Determinare la frazione, sapendo che sommandola con la sua reciproca si ottiene  $\frac{185}{88}$ . {R.  $\frac{11}{8}$ }
- Trovare tre numeri naturali consecutivi tali che la somma dei loro quadrati dia  $194$ . {R.  $7, 8$  e  $9$ }
- Trovare tre numeri naturali dispari consecutivi tali che la somma dei quadrati dei due più piccoli e del doppio del quadrato del più grande dia  $1532$ . {R.  $17, 19$  e  $21$ }
- Trovare tre numeri interi consecutivi tali che il loro prodotto sia uguale a  $990$ . {R.  $9, 10$  e  $11$ }
- Esistono tre numeri interi consecutivi tali che il loro prodotto è uguale a  $-5814$ ? {R.  $-19, -18$  e  $-17$ }
- Quali sono i due numeri naturali dispari consecutivi tali che la differenza delle loro quarte potenze è uguale a  $32896$ ? {R.  $15$  e  $17$ }
- Sono dati quattro numeri interi  $a, b, c, d$  tali che  $b$  è consecutivo ad  $a$ ,  $c$  è uguale al doppio di  $a$  e  $d$  è il triplo di  $b$ . Determinare i quattro numeri sapendo che il loro prodotto è uguale a  $5400$ .  
 {Suggerimento: con un piccolo "trucco" (sostituzione di una certa espressione polinomiale con una nuova variabile) è possibile evitare di risolvere un'equazione di quarto grado.}  
 {R. Ci sono due soluzioni:  $5, 6, 10, 18$  e  $-6, -5, -12, -15$ .}

## EQUAZIONI IRRAZIONALI

3  $\sqrt{6x-14}-2=0$ . [3]  
 4  $\sqrt{3x+4}=\sqrt{7}$ . [1]  
 5  $\sqrt{x+3}=x+1$ . [1]  
 6  $\sqrt{5+2x}=3x-3$ . [2]  
 7  $\sqrt{3x-8}+2=x$ . [3; 4]  
 8  $\sqrt{x-3}=3x-11$ . [4]  
 9  $\sqrt{x-3}=11-3x$ . [31/9]  
 10  $\sqrt{4x-3}=\sqrt{6x-1}$ . [impossibile]  
 11  $\sqrt{2x+1}=\sqrt{4-x}$ . [1]  
 12  $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{14-x^2}$ . [-3; 3]  
 13  $\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+6}=0$ . [-2; 2]

- 14  $\sqrt{4-x-x^2} = \sqrt{x^2+x}$ . [ -2; 1 ]
- 15  $\sqrt{x+1} - x + 1 = 0$ . [ 3 ]
- 16  $3\sqrt{x+3} - 4x = -15$ . [ 6 ]
- 17  $\sqrt{x^2-1} = x-2$ . [ impossibile ]
- 18  $\sqrt{6x+1} + 3 = 2x$ . [ 4 ]
- 19  $\sqrt{4(x-1)+x} = 8-x$ . [ 4 ]
- 20  $\sqrt{2x+9} + 13 = x$ . [ 20 ]
- 21  $\sqrt{10-x} - 8 = 2x$ . [ -\frac{9}{4} ]
- 22  $8+x = -\sqrt{19-2x}$ . [ -15 ]
- 23  $\sqrt{16-x} - x + 4 = 0$ . [ 7 ]
- 24  $x + \sqrt{x} - 20 = 0$ . [ 16 ]  
 (l'equazione si può anche risolvere ponendo  $\sqrt{x} = t$ ...)
- 25  $2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$ . [ 4; \frac{1}{4} ]
- 26  $x - 2\sqrt{x} = 15$ . [ 25 ]
- 27  $2\sqrt{x^2+x+2} - 3 = x$ . [ -\frac{1}{3}; 1 ]

- 28  $\sqrt{x^2-2}+1=x$ . [3]
- 29  $x+\sqrt{10x+6}=9$ . [3]
- 30  $\frac{3}{4}\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}+3}{2}=\frac{27}{4}$ . [9]
- 31  $1+\sqrt{(2x-1)^2+x-3}=2x$ . [3]
- 32  $\sqrt{x+\sqrt{x+3}}=3$ . [6]
- 33  $\sqrt{2x-\sqrt{x+1}}=\sqrt{13}$ . [8]
- 34  $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$ . [1]
- 35  $\sqrt{x+8}+\sqrt{x}=2$ . [impossibile]
- 36  $\sqrt{x+24}-4=\sqrt{x}$ . [1]
- 37  $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}=2$ . [6]
- 38  $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=1$ . [impossibile]
- 39  $\sqrt{x^2+8}-x=2\sqrt{2-x}$ . [0; 1]
- 40  $\sqrt{2x-27}=9-2\sqrt{\frac{x}{2}}$ . [18]
- 41  $\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{9-4x}-2x=0$ . [0; 2]
- 42  $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$ . [3]
- 43  $\sqrt{3(x+4)+1}-\sqrt{x}-\sqrt{2x+1}=0$ . [4]
- 44  $\sqrt{4-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{6-2x}$ . [2]
- 45  $\sqrt{1-x}=\sqrt{4-2x}-\sqrt{3-x}$ . [1]
- 46  $\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x}-\sqrt{x-1}=0$ . [2]
- 47  $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}=\sqrt{3x-5}$ . [2]
- 48  $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}$ . [impossibile]
- 49  $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x}+\sqrt{3x-3}$ . [4]
- 50  $\sqrt{3x+16}-\sqrt{3x+7}=\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}$ . [3]

## PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA

- In un trapezio rettangolo  $T$  la base minore è uguale all'altezza, e la base maggiore supera la minore di 8 cm. Se il perimetro di  $T$  è 70 cm, quanto vale l'area?    {R.  $285 \text{ cm}^2$ }
- Si consideri un semicerchio  $S$  inscritto in un rettangolo  $R$  (perciò il diametro del semicerchio coincide con uno dei lati del rettangolo, e il lato opposto è tangente alla semicirconferenza). Quanto vale il rapporto tra le aree di  $R$  e di  $S$ ?    {R.  $\frac{4}{\pi}$ }
- Data una semicirconferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$ , si determinino sulla semiretta  $OA$  un punto  $P$  e sulla semiretta  $OB$  un punto  $Q$  tali che  $P$  e  $Q$  siano esterni ad  $AB$  ed inoltre  $PA = BQ$ . Si traccino quindi, nello stesso semipiano rispetto a  $PQ$ , le semirette uscenti da  $P$  e da  $Q$  tangenti alla semicirconferenza, e sia  $V$  il loro punto di incontro. Quale deve essere la misura dei segmenti  $PA$  e  $BQ$  affinché l'area del triangolo  $PQV$  sia uguale a  $\frac{25}{12}r^2$ ?    {R.  $\frac{r}{4}$ }

## PROBLEMI DI GEOMETRIA SOLIDA

- In una sfera di raggio  $r$  è inscritto un cilindro rotondo equilatero (cioè avente l'altezza uguale al diametro di base). Detto  $V$  il volume della sfera e  $C$  il volume del cilindro, quanto vale il rapporto  $\frac{V}{C}$ ?    {R.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ }
- È data una piramide, la cui base è un poligono qualsiasi giacente sul piano  $\alpha$ . Sia  $V$  il vertice della piramide, e sia  $\beta$  il piano parallelo ad  $\alpha$  passante per  $V$ . Se si sposta il vertice della piramide in un altro punto del piano  $\beta$ , il volume della piramide si modifica o rimane uguale?    {R. rimane uguale}
- In una sfera di raggio  $r$  è inscritto un cono rotondo  $C$ . Determinare l'altezza  $h$  di  $C$ , sapendo che il suo volume è uguale a  $\frac{64}{125}$  del volume della sfera.    {R.  $h = \frac{8}{5}r$  oppure  $h = \frac{1+\sqrt{17}}{5}r$ }