Richiami di algebra delle matrici

(S. Terzi)

1. SPAZI VETTORIALI

I. ALCUNE DEFINIZIONI

1) Definizione di spazio vettoriale

Sia S un insieme di vettori di ordine n. S è detto *spazio lineare* se e' un insieme chiuso rispetto alle operazioni somma e prodotto per uno scalare, ovvero se, dati $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vettori appartenenti ad S, dato uno scalare h, valgono le seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è unico ed appartiene ad S;
2. h$\mathbf{x}$ è unico ed appartiene ad S;
3. $\mathbf{x + y = x + x;}$
4. esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{x + 0 = x}$;
5. per ogni $\mathbf{x}$ esiste un vettore $\mathbf{-x}$ tale che $\mathbf{x} + (\mathbf{-x}) = \mathbf{0}$
6. $h(\mathbf{x + y}) = h\mathbf{x} + h\mathbf{y}$
7. $1\mathbf{x = x}$

Esempio di spazio vettoriale: l'insieme di tutti i vettori ad n componenti (spazio che chiamiamo R^n).

2) **Insieme generatore di uno spazio vettoriale**.

Dati p vettori di ordine n, $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_p}$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots\ldots + c_p\mathbf{x_p}$$

al variare dei coefficienti c_i è uno spazio vettoriale S. Si dice anche che lo spazio vettoriale S è generato dai vettori $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_p}$, o anche che i vettori $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_p}$, sono un insieme generatore di S.

3) **<u>Sottospazio</u>**

Un sottoinsieme S_o di uno spazio vettoriale S e' detto *sottospazio* di S se risulta chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Il vettore **0** è elemento di ogni sottospazio di S.

II. DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

<u>1) Combinazione lineare</u>

Dati *p* vettori ad n componenti: $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_p}$, si dice combinazione lineare dei vettori con coefficienti c_i la seguente espressione:

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots\ldots + c_p\mathbf{x_p}$$

2) **<u>Dipendenza lineare</u>** (di un vettore da altri)

Sia **y** un vettore ad n componenti. Se è esprimibile come combinazione lineare di p vettori (sempre ad n componenti) $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_p}$, si dice che **y** è linearmente dipendente dai p vettori considerati. Formalmente **y** è linearmente dipendente da $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_p}$ se vale per qualche insieme di coefficienti c_i:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots\ldots + c_p\mathbf{x_p}$$

In particolare il vettore **0** nx1 è sempre linearmente dipendente da p vettori di ordine n in quanto la relazione

$$\mathbf{0} = \mathbf{y} = c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots\ldots + c_p\mathbf{x_p}$$

è sempre soddisfatta da $c_i = 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, p$.

Viceversa, se non esiste un insieme di coefficienti c_i i quali consentano di esprimere il vettore **y** come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_i$, allora **y** si dice linearmente indipendente dall'insieme di vettori considerati.

Inoltre qualsiasi vettore **y** nx1 può sempre venire espresso come combinazione lineare di n vettori elementari $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ con coefficienti $c_i = (y_i)$, dove y_i è la i-esima componente del vettore **y**.

Ciò implica che:

ogni vettore ad n componenti è linearmente dipendente dagli n vettori elementari.

3) Dipendenza lineare (di un insieme di vettori)

Dati *p* vettori di ordine n ($p \leq n$) si dice che sono linearmente dipendenti se è possibile determinare *p* costanti non tutte nulle tali che:

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots + c_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$$

In tal caso almeno uno tra i vettori $\mathbf{x}_i$ è combinazione lineare degli altri. E, viceversa, dati *p* vettori, se uno di essi è combinazione lineare degli altri *p-1*, l'insieme dei vettori si dice linearmente dipendente.

4) **Proprietà:**

1. Se un insieme di *p* vettori è linearmente dipendente, ogni altro insieme contenente gli stessi *p* vettori è linearmente dipendente.

2. Conseguenza : Il vettore nullo **0** è linearmente dipendente, così come lo è qualsiasi insieme che lo contenga.

3. Se *p* vettori $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_p}$ sono linearmente indipendenti, mentre l'insieme dei *p+1* vettori $\mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_p}$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{x}_{p+1}$ è combinazione lineare degli altri.

4. Ogni insieme di *p+1* vettori $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, y_{p+1}$, ciascuno dei quali sia combinazione lineare di uno stesso insieme di vettori : $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_p}$, è linearmente dipendente.

5. Conseguenza: *n+1* vettori di ordine n costituiscono un insieme linearmente dipendente (in quanto ciascuno di essi e' combinazione lineare di n vettori elementari).

6. Se *p* vettori sono linearmente indipendenti, allora anche una parte di essi e' linearmente indipendente.

7. *n* vettori elementari di ordine n costituiscono un insieme linearmente indipendente.

III. BASI DI SPAZI VETTORIALI

1) Base di uno spazio lineare

Si supponga che ogni vettore **x** di ordine n, appartenente ad S, sia esprimibile in un solo modo (univocamente) come combinazione lineare di p vettori $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_p}$, appartenenti ad S. Si dice allora che i p vettori $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_p}$, costituiscono una *base* di S.

Si puo' dimostrare che un insieme generatore di S e' una base di S se e solo se è costituito da vettori linearmente indipendenti.

Si tenga però presente che uno stesso spazio può avere diverse basi.

2) Dimensione di uno spazio lineare

Si chiama *dimensione* di uno spazio lineare il numero di elementi della base.

Si può dimostrare che tutte le basi di uno stesso spazio lineare hanno lo stesso numero di elementi.

Si puo' dimostrare che se S_0 è un sottospazio di S non coincidente con esso, allora

$$\dim(S_o) < \dim(S)$$

3) **Rango**

Dato un insieme di vettori si definisce il suo *rango* come il numero massimo di vettori linearmente indipendenti ad esso appartenenti. Dato invece uno spazio vettoriale S, si definisce come sua *dimensione* il massimo numero di vettori linearmente indipendenti appartenenti ad S.

4) **Spazio $\Re^n$.**

Intendiamo la totalità dei vettori ad n componenti. E' uno spazio vettoriale di dimensione n. Cio' implica che n+1 vettori in $\Re^n$ sono sempre linearmente dipendenti.

2.MATRICI: NOZIONI ED OPERAZIONI ELEMENTARI

I. ALCUNE DEFINIZIONI

1) Definizione di matrice

Una matrice A e' un insieme di *n*x*p* elementi disposti in *n* righe e *p* colonne. L'elemento situato all'incrocio tra la riga *i* e la colonna *j* viene indicato con a_{ij}. La matrice può essere indicata come:

$$A = A_{n,p} = (a_{ij}) \qquad i= 1,\ldots,n;\ j= 1,\ldots p$$

La matrice A ha *p* colonne. Ciascuna colonna (contenente *n* elementi) può essere vista come un punto nello spazio R^n. Viceversa, ciascuna delle *n* righe (contenente *p* elementi) può essere vista come un punto nello spazio R^p.

Una matrice *n*x*p* e' anche un insieme di *p* vettori colonna (oppure di *n* vettori riga).

2) Scalare

Si chiama scalare un vettore di un solo elemento.

3) Vettore elementare

Si chiama vettore elementare e_i un vettore di n elementi tutti nulli tranne l'*i*-esimo.

4) Matrice quadrata

Una matrice A di dimensione *n*x*p* si dice quadrata se $n = p$.

5) Matrice trasposta

Data una matrice $A_{n,p}$, la sua trasposta A' (di dimensione *p*x*n*) si ottiene da A scambiando tra loro le righe con le colonne. Ovvero, se $A= (a_{i\,j})$, $A' = (a_{j\,i})$, $j= 1,\ldots p;\ i=1,\ldots n.$

Proprietà

$(A')' = A$

Se A'=A (il che può accadere solo per matrici quadrate) allora A e' simmetrica.

6) Particolari matrici quadrate

6.1 Matrice identica (o identità)
Si chiama *matrice identica* I_n, una matrice quadrata avente per colonne *n* vettori elementari $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
E' possibile definire la matrice identica anche nel seguente modo:
$I_n = (\delta_{ij}) \qquad i=1,\ldots,n; \; j=1,\ldots n$
Con $\delta_{ij} = 1$ se i=j; $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$

6.2 Matrice diagonale
La *matrice* $A_{n,n}$ e' *diagonale* se per i suoi elementi a_{ij} vale:
$a_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j$, ovvero se gli unici elementi non nulli sono gli elementi a_{ii} che si trovano sulla diagonale principale. I_n e' una matrice diagonale.

6.3 Matrice scalare
Una *matrice scalare* e' una particolare matrice diagonale i cui elementi non nulli $a_{ii} = k$, $\forall \; i = 1,\ldots n$, dove k e' una generica costante.

6.4 Matrice triangolare
La *matrice* $A_{n,n}$ si dice *triangolare* (superiore) se gli elementi sotto alla diagonale principale sono tutti nulli. Si dice triangolare inferiore se sono nulli gli elementi sopra alla diagonale principale.

6.5 Matrice simmetrica
Una *matrice* quadrata $A_{n,n}$ si dice *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$.
La matrice I_n e' simmetrica.

II. OPERAZIONI

1) Somma tra matrici

Date due matrici delle stesse dimensioni $A_{n,p}$ e $B_{n,p}$ (ovvero, date due matrici *conformabili* rispetto all'operazione somma), si definisce matrice somma C, una matrice *nxp* di elementi $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$.
<u>Proprietà</u>
Commutativa: A+B = B+A
Associativa: (A+B) + C = A + (B+C)
(A+B)' = A' + B'

2) <u>**Prodotto per uno scalare**</u>:
Data una matrice $A_{n,p}$ ed uno scalare k, il prodotto kA da luogo ad una matrice $B_{n,p}$ di elementi:
$b_{i,j} = ka_{i,j}$.
Si ha quindi che una matrice scalare è sempre esprimibile come kI_n .
<u>Proprietà</u>
Siano h e k due scalari:
(h+k)A = hA+kA
k(A+B) = kA + kB
k(hA) = khA
A + (-1)B = A-B

<u>**3) Prodotto tra vettori**</u>
Dati due vettori **x** e **y** di n componenti, si chiama *prodotto int*erno e si indica con x'y il prodotto:

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = \Sigma_i x_i y_i \quad i= 1,\ldots..n$$

Il prodotto interno e' commutativo, ovvero **x'y** = **y'x**.

<u>**4) Prodotto tra matrici**</u>
Data una matrice **A** di dimensione (*nxm*) di elementi a_{ij} , *i= 1,…,n*; *j = 1,….m* ; data una matrice **B** di dimensione (*mxp*) di elementi b_{jk}, *j = 1,…m*; *k= 1,…p*, la matrice prodotto **C** sara' una matrice di dimensione *nxp* il cui generico elemento c_{ik} :

$$c_{ik} = \Sigma_j\, a_{ij}\, b_{jk} \quad i=1,\ldots..n; \;\; k= 1,\ldots,p.$$

Ovvero l'elemento c_{ik} e' ottenuto come prodotto interno tra la *i*-esima riga della matrice **A** e la *j*-esima colonna della matrice **B**.

Il prodotto tra matrici e' definito solo per matrici conformabili (rispetto al prodotto). Il numero di colonne della matrice **A** dovrà essere uguale al numero di righe della matrice **B**, cioè i vettori riga della matrice **A** dovranno avere lo stesso numero di elementi dei vettori colonna della matrice **B**, di modo che sia eseguibile il prodotto interno.

<u>Proprietà</u>
Siano **A, B, C** matrici conformabili; sia **O** una matrice contenente tutti elementi nulli (la matrice **O** e' una matrice di ordine anche variabile, coerentemente con le operazioni a cui viene sottoposta o da cui deriva), sia **I** la matrice identica:

AO = O
OA=O
AI=IA = A
ABC= (AB)C = A(BC)
(AB)' = B'A'

In generale, posto che siano conformabili rispetto al prodotto sia **A B** che **B A**, (ovvero posto che sia **A** di ordine (*nxm*) e **B** di ordine (*mxn*)) sarà **AB ≠BA.**

Può accadere che sia **AB=O**, pur essendo **A≠O** e **B≠O.**

Se **A** e **B** sono matrici diagonali, anche **C = A**B e' una matrice diagonale. Sara' $c_{ii} = a_{ii}.b_{ii}$, $i = 1,\dots n$. Inoltre sara' anche **AB = BA**.

<u>5) Traccia</u>
Data una matrice quadrata $\mathbf{A}_{n,n}$ si chiama *traccia*, e si indica con tr(**A**) la somma dei suoi elementi diagonali. Ovvero:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \Sigma_i a_{ii}$$

<u>Proprietà</u>
- Date due matrici **A** e **B** quadrate dello stesso ordine e dati due scalari h e k:

$$\mathrm{tr}(h\mathbf{A}+k\mathrm{B}) = h\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + k\mathrm{tr}(\mathbf{B})$$

- tr(**A**) = tr(**A**')
- Data una matrice **A** *(n x m)* e data una matrice **B** (*m x n*):

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA})$$
$$\mathrm{tr}(\,\mathbf{AA'}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A'A})$$

6) Potenza di una matrice

Definizione :

$$\mathbf{A}^{\mathbf{r}} = \mathbf{AA......A} \quad \text{(r volte)}$$

Proprietà

$\mathbf{A}^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$

$\mathbf{A}^{\mathbf{r+s}} = \mathbf{A}^{\mathbf{r}}\,\mathbf{A}^{\mathbf{s}}$

$(\mathbf{A}^{\mathbf{r}})^{\mathbf{s}} = \mathbf{A}^{\mathbf{rs}}$

III. ALTRE DEFINIZIONI

1) Idempotenza:

Se $\mathbf{A}^{\mathbf{r}} = \mathbf{A}$ la matrice **A** si dice *idempotente di ordine r*

Se $\mathbf{A}^{2} = \mathbf{A}$ la matrice **A** si dice idempotente

2) Vettori ortogonali

Dati due *vettori* **x** e **y** (con lo stesso numero di elementi) si dicono *ortogonali* se il loro prodotto interno e' nullo, ovvero se:

$$\mathbf{x'y} = 0$$

Sono a due a due ortogonali i vettori elementari $\mathbf{e}_i$ ed $\mathbf{e}_j$, $\forall\ i \neq j$.

3) Matrice ortogonale

Una *matrice* **A** si dice *ortogonale* se:

$\mathbf{AA'} = \mathbf{I}$

La matrice **I** e' una matrice ortogonale.

Per le matrici simmetriche ed ortogonali si verifica anche che:

$$\mathbf{A}^{2} = \mathbf{I}.$$

4) Matrice permutabile

Date due matrici quadrate **A** e **H**, si dice che **A** e' *permutabile* con **H** se si verifica:

$$\mathbf{AH} = \mathbf{HA}$$

Ciò accade se e solo se **H** e' una matrice scalare.

3. RANGO E NOZIONE DI INVERSA

I. DETERMINANTE E INVERSA

1) **Definizione di determinante**:
Ad ogni matrice quadrata **A** (*n x n*) di generico elemento a_{ij} corrisponde uno scalare chiamato *determinante*, indicato con det(**A**) oppure $|\mathbf{A}|$. Tale numero si ottiene svolgendo i seguenti calcoli:

$$\det(\mathbf{A}) = \Sigma_j a_{ij}C_{ij} = \Sigma_i a_{ij}C_{ij} \quad i,j=1,\ldots n$$

dove C_{ij} e' il "cofattore" dell'elemento a_{ij}, ed e' il determinante della sottomatrice che si ottiene dalla matrice A eliminando la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna. Il cofattore C_{ij} viene preso con segno + o segno - a seconda che la somma degli indici *i+j* sia, rispettivamente, pari o dispari. Più propriamente bisognerebbe scrivere:

$$\det(A) = \Sigma_j a_{ij}C_{ij}\,(-1)^{i+j}$$

Proprietà

- det(**A**) = det(**A**')
- Se una matrice ha una colonna o una riga di elementi tutti nulli, il determinante sarà nullo.
- Moltiplicando per una costante k ogni elemento di una riga (o colonna) di **A**, il determinante della matrice che ne risulta sarà pari a kdet(**A**).
- det(k**A**) = k^n det(**A**).
- Se una matrice ha due righe o due colonne uguali (o proporzionali) il determinante e' nullo.
- det(**A+B**) ≠ det(**A**) + det(**B**)
- det(AB) = det(**A**) det(**B**)

2) Definizione di inversa
Data una matrice quadrata **A** si chiama *inversa,* e si indica con $\mathbf{A}^{-1}$ una matrice tale che:

$$\mathbf{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Come si ottiene?
Da **A** si ricava una nuova matrice **C**= (C_{ij}); gli elementi C_{ij} i,j = 1,….n sono i cofattori di **A**.

La matrice (**C**)' si chiama "aggiunta" di **A**.

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{C})'/\det(\mathbf{A})$$

La matrice inversa esiste solo se det(**A**)≠0. Qualora sia det(**A**) = 0 la matrice **A** si dice "singolare" (ovvero non invertibile).

<u>Proprietà</u>

- $\mathbf{A}^{-1}$ e' unica
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$
- Se **A** è una matrice ortogonale (ovvero $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$), allora $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$
- Se **A** è una matrice diagonale, $\mathbf{A}^{-1}$ e' una matrice diagonale di elementi a_{ii}^{-1}, i= 1,…,n.
- Se **A** e' una matrice simmetrica, lo e' anche la sua inversa.

3) Determinanti particolari

Sia A una matrice triangolare, $\det(\mathbf{A}) = \Pi_i a_{ii}$.
Sia A una matrice diagonale, $\det(\mathbf{A}) = \Pi_i a_{ii}$.

II. DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

1) Combinazione lineare

Dati *p* vettori ad n componenti: $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_p}$, si dice *combinazione lineare* dei vettori con coefficienti c_i la seguente espressione:

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots + c_p\mathbf{x_p}$$

Alternativamente, definendo un vettore **c** contenente i *p* coefficienti c_i, definendo una matrice **X** (n x p) avente come colonne i vettori $\mathbf{x}_i$, i=1,…p, una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_i$, e' definita tramite il prodotto :

$$\mathbf{Xc}$$

2) Dipendenza lineare

Sia **y** un vettore ad n componenti. Se è esprimibile come combinazione lineare di p vettori (sempre ad n componenti) $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …., $\mathbf{x_p}$, si dice che **y** è *linearmente dipendente* dai p vettori considerati. Formalmente **y** è linearmente dipendente da $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …., $\mathbf{x_p}$ se vale per qualche insieme di coefficienti c_i:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots.. + c_p\mathbf{x}_p = \mathbf{Xc}$$

In particolare il vettore **0** nx1 è sempre linearmente dipendente da p vettori di ordine n in quanto la relazione

$$\mathbf{0} = \mathbf{y} = c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots.. + c_p\mathbf{x}_p$$

è sempre soddisfatta da $c_i = 0 \ \forall \ i = 1, \ldots., p$.

Viceversa, se non esiste un insieme di coefficienti c_i i quali consentano di esprimere il vettore **y** come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_i$, allora **y** si dice *linearmente indipendente* dall'insieme di vettori considerati.

Inoltre qualsiasi vettore **y,** *nx1* può sempre venire espresso come combinazione lineare di n vettori elementari $e_\mathbf{1}$, $\mathbf{e_2}$, …., $e_\mathbf{n}$ con coefficienti $c_i = (y_i)$, dove y_i è la i-esima componente del vettore **y**. In tal caso infatti si avrebbe $\mathbf{X} \equiv \mathbf{I}_n$, e si vede chiaramente che l'espressione:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ic}$$

ha come soluzione **y** = **c**. Ciò implica che:

ogni vettore ad n componenti è linearmente dipendente dagli n vettori elementari.

3) Dipendenza lineare (di un insieme di vettori)

Dati *p* vettori di ordine n ($p \leq n$) si dice che sono linearmente dipendenti se è possibile determinare *p* costanti non tutte nulle tali che:

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \ldots.. + c_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$$

In tal caso almeno uno tra i vettori $\mathbf{x}_i$ è combinazione lineare degli altri. E, viceversa, dati *p* vettori, se uno di essi è combinazione lineare degli altri *p-1*, l'insieme dei vettori si dice linearmente dipendente.

4) Indipendenza lineare

Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme di vettori $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots,$ $\mathbf{x_p}$, sia linearmente indipendente è che il sistema di equazioni :

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \dots + c_p\mathbf{x_p} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0}$$

abbia come unica soluzione la soluzione (banale) $c_i = 0 \forall i$.

III.RANGO DI UNA MATRICE

1) **Definizione 1**.

Data una matrice $\mathbf{A}_{n,p}$, si definisce *rango di colonna* il numero massimo di vettori colonna linearmente indipendenti contenuti dalla matrice.

Analogamente si definisce *rango di riga* il numero massimo di vettori riga linearmente indipendenti.

Si dimostra che il rango di riga ed il rango di colonna coincidono.

Si ha quindi:

$$0 \leq \text{rango}(\mathbf{A}) \leq \min(n,p)$$

Se rango($\mathbf{A}$) = n si dice che $\mathbf{A}$ ha rango pieno di riga. Se rango($\mathbf{A}$) = p si dice che $\mathbf{A}$ ha rango pieno di colonna.

2) **Definizione 2**.

Data una matrice $\mathbf{A}_{n,p}$, si chiama *rango* della matrice l'ordine massimo delle sottomatrici in essa contenute a determinante non nullo.

Proprietà

- rango($\mathbf{A}$) = rango($\mathbf{A}'$)
- rango($\mathbf{AA}'$) = rango($\mathbf{A}$)

- Se **A** e' una matrice quadrata e non singolare, rango(**A**) = rango($\mathbf{A}^{-1}$)
- rango(**AB**) ≤ rango(**A**). rango(**B**)
- rango(**AB**) ≤ min(rango(**A**);rango(**B**))
- se **A** ha rango pieno di colonna e **B** ha rango pieno di riga:
  - rango(**AB**) = min(rango(**A**), rango(**B**))
- rango(**A+B**) ≤ rango(**A**) + rango(**B**)
- Sia **B** una matrice non singolare. Allora rango(**AB**) = rango(**A**)
- Se una matrice <u>quadrata</u> $\mathbf{A}_{n,n}$ è idempotente:
  - rango (**I-A**) = n - rango(**A**)

<u>3) Considerazioni su alcune proprietà del determinante (matrici quadrate)</u>

- Se una matrice ha una riga o una colonna di elementi nulli il determinante e' nullo. Questo e' dovuto al fatto che un insieme di vettori di cui faccia parte il vettore **0**, costituisce un insieme di vettori linearmente dipendenti.
- Se una matrice ha due righe o due colonne uguali(o proporzionali) il determinante è nullo. Questo e' dovuto al fatto che nell'insieme dei vettori riga o colonna della matrice, si ha un vettore linearmente dipendente da un altro.

IV SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Un sistema di equazioni lineari può essere scritto nella forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Dove la matrice **A** e' detta *matrice del sistema*, il vettore **x** e' il *vettore delle incognite* e **b** e' il *vettore dei termini noti*.

Trovare le soluzioni del sistema significa determinare i coefficienti della combinazione lineare delle colonne di **A** che da luogo al vettore noto **b**.

- Se la matrice **A** e' quadrata, di ordine *n* e di rango pieno, si avrà:

- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Il sistema quindi ammette una ed una sola soluzione (per l'unicità della matrice inversa).

- Sia **A** di ordine (*n*,*m*). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che il sistema **Ax=b** ammette soluzione (o soluzioni) se e solo se il rango della matrice "allargata" (**A:b**) coincide con il rango della matrice A, ovvero:

$$\text{rango}(\mathbf{A:b}) = \text{rango}(\mathbf{A})$$

Solo in tal caso infatti il vettore b è una combinazione lineare delle colonne di A, e solo in tal caso il sistema ha soluzione data dai coefficienti della combinazione.

- Sia **b=0**. In tal caso il sistema **Ax=b** è detto *omogeneo*. Un sistema omogeneo

$$\mathbf{Ax=0}$$

ammette sempre la soluzione *banale* **x=0**.

Se la matrice A è quadrata e non singolare, il sistema avrà un'unica soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0}$, ovvero la soluzione banale. Affinché esistano anche soluzioni non banali dovrà essere det(**A**)=0.

4.AUTOVALORI , AUTOVETTORI E FORME QUADRATICHE

I. AUTOVALORI

1) Definizione

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Vogliamo trovare uno scalare λ ed un vettore $\mathbf{x}$, soluzioni del sistema:

$$\mathbf{Ax}= \lambda\mathbf{x}$$

Il quale può riscriversi:

$$(A-\lambda I)x = 0$$

Essendo un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione banale $\mathbf{x=0}$.

Affinchè esistano anche soluzioni non banali dovrà essere:

$$\det(A-\lambda I)= 0$$

Tale condizione (detta *equazione caratteristica* della matrice A) definisce un'equazione algebrica di grado n. Pertanto ammette n soluzioni (λ_i i= 1,….n) che potranno essere reali o complesse. Tali soluzioni si chiamano *autovalori* della matrice A.

Ad ogni autovalore λ_i corrisponderà un vettore x_i (chiamato *autovettore*), soluzione del sistema:

$$\mathbf{Ax}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$$

Tuttavia, se $\mathbf{x}_i$ è soluzione di $\mathbf{Ax}_i - \lambda_i\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo è anche $\mathbf{y}_i = c\mathbf{x}_i$, dove c e' una costante qualsiasi. Per eliminare tale moltiplicità, ad ogni autovalore si associa un autovettore $\mathbf{x}_i$ di norma unitaria (*normalizzato)* tale che:

$$\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i = 1$$

2) Proprietà

Data una matrice quadrata **A** di ordine n, siano λ_i, $i= 1,….,n$ i suoi autovalori; sia k uno scalare:

- tr(**A**) = $\Sigma_i \lambda_i$
- det (**A**) = $\Pi_i \lambda_i$
- Gli autovalori di k**A** sono dati da $k\lambda_i$.
- Gli autovalori di $(\mathbf{A})^k$ sono dati da $(\lambda_i)^k$.
- Se esiste $\mathbf{A}^{-1}$, i suoi autovalori sono dati da $(\lambda_i)^{-1}$.
- Siano **A** e **B** matrici di ordine, rispettivamente, (n,p) e ($p.n$), ($n < p$). Gli autovalori di **AB** sono un sottoinsieme degli autovalori di **BA**.

3) Matrici simmetriche

- Gli autovalori di una matrice simmetrica sono reali
- Gli autovettori di una matrice simmetrica sono a due a due ortogonali.
- Il rango di una matrice simmetrica risulta uguale al numero dei suoi autovalori non nulli.

II FORME QUADRATICHE

1) Definizione

Data una matrice **A** simmetrica di ordine n, dato un vettore **x** si definisce *forma quadratica* l'espressione:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$$

La matrice A puo' essere :

- *definita positiva* se $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- *semidefinita positiva* se $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e se $\exists$ qualche $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ per cui risulta $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$
- *definita negativa* se $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

- *semidefinita negativa* se $\mathbf{x'Ax} < 0 \; \forall \; \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e se $\exists$ qualche $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ per cui risulta $\mathbf{x'Ax} = 0$.

2) Alcune proprietà

Data una matrice **A** simmetrica di ordine *n*, valgono le seguenti proprieta':

- E' definita positiva se e solo se i suoi autovalori risultano tutti positivi.
- E' definita positiva se e solo se esiste una matrice **P** non singolare tale che risulti **A** = **P'P**.
- E' definita positiva se e solo se i suoi n minori principali sono tutti positivi.

3) Altre proprietà

- Una matrice simmetrica e definita positiva e' non singolare. Inoltre il suo determinante e' positivo.
- Sia **A** simmetrica e definita positiva, di ordine *n*. Sia **B** una matrice nxs ($s \leq n$) di rango *s*. Allora la matrice **B'AB** risulta definita positiva.
- Sia **A** una matrice quadrata semidefinita positiva, di ordine *n*, e di rango *r*. Allora esattamente *r* dei suoi autovalori sono positivi, mentre i restanti n-r sono nulli.
- Sia **A** una matrice simmetrica di ordine *n*. Il suo rango e' uguale al numero di autovalori non nulli.

4) Proprietà di matrici idempotenti

Sia **A** una matrice idempotente (**AA=A**). Allora:

- I suoi autovalori possono valere solo 0 oppure 1.
- Se e' anche simmetrica il suo rango risulta uguale alla sua traccia.
- Se e' anche simmetrica e' semidefinita positiva.

5. ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUGLI SPAZI VETTORIALI

1)Somma diretta di sottospazi

Dati due sottospazi S_1 ed S_2 di uno stesso spazio lineare, si può definire l'insieme unione delle basi di S_1 ed S_2 .Tale insieme sarà a sua volta un insieme generatore di un sottospazio S_o di S. Qualora accada che l'unione delle basi costituisca un insieme di vettori linearmente indipendenti, (ovvero definisca una base del sottospazio S_0) si dice che S_o è *somma diretta* dei due sottospazi S_1 ed S_2 .

Si ha anche che S_o è somma diretta dei sottospazi S_1 ed S_2 se e solo se per ogni elemento **z** di S_0 si ha un'unica rappresentazione:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad \text{con } \mathbf{x} \,\varepsilon\, S_1 \,,\, \mathbf{y} \,\varepsilon\, S_2$$

2) Spazio complementare

Sia S è uno spazio lineare di dimensione n, sia S_1 un suo sottospazio. Esiste e si chiama *spazio complementare* un sottospazio S_2 tale che S risulti definito dalla somma diretta di S_1 ed S_2. La dimensione del sottospazio complementare S_2 sarà data dalla differenza tra la dimensione di S e la dimensione di S_1 .

3) Spazio metrico

Se sull'insieme dei vettori che costituiscono uno spazio vettoriale viene definita una funzione di distanza (che abitualmente è quella euclidea) allora si parla di *spazio metrico*.

4) Sottospazi ortogonali

Due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto interno e' nullo. Un insieme di elementi si dice ortogonale se tutti gli elementi sono a due a due ortogonali.

Dato uno spazio metrico euclideo S dotato di prodotto interno, dati due sottoinsiemi S_1 ed S_2, si dicono mutuamente ortogonali se e solo se :

$$\mathbf{x'y} = \mathbf{y'x} = 0 \;\forall\; \mathbf{x} \,\varepsilon\, S_1 \,,\, \mathbf{y} \,\varepsilon\, S_2 \,.$$

Un vettore **y** si dice ortogonale al sottospazio S_1, se è ortogonale a tutti gli elementi di S_1.

5) **Teoremi**:

1. Due sottospazi di uno spazio euclideo S sono ortogonali se e solo se ciascun elemento della base di S_1 e' ortogonale a ciascun elemento della base di S_2 .
2. L'insieme di tutti i vettori ortogonali a un sottospazio S_o di uno spazio euclideo S, e' un sottoinsieme di S. Tale sottoinsieme si chiama complemento ortogonale di S_o .
3. Il vettore nullo e' il complemento ortogonale di S.

6) Proiezione ortogonale

Ogni spazio S si può scrivere come somma diretta di un suo sottospazio S_0 e del complementare. Se la dimensione di S è n, anche la somma della dimensione di S_o e del complemento di S_o dovrà essere n. Inoltre ogni vettore **x** appartenente ad S si può decomporre nella somma di un vettore $\mathbf{x_1}$ appartenente a S_o e di un vettore $\mathbf{x}_2$ ortogonale ad $\mathbf{x}_1$. Il vettore $\mathbf{x}_1$ si chiama *proiezione ortogonale* di **x** in S_o .

Vale inoltre la relazione pitagorica:

$$||\mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x_1}||^2 + ||\mathbf{x}_2||^2$$

7) Spazi vettoriali generati da matrici

Data una matrice A nxp , appartenente allo spazio S dei vettori a n componenti (se consideriamo i vettori colonna) possiamo definire lo spazio lineare S_A generato dalle sue colonne, o viceversa lo spazio lineare $S_{A'}$ generato dalle sue righe (cioè generato dalle colonne della matrice A'). La dimensione dello spazio generato dalle colonne di A sarà pari al rango di A, come anche la dimensione dello spazio generato dalle sue righe, essendo rango(A) = rango(A').

Similmente possiamo definire il *Kernel* della matrice A, che e' l'insieme di tutti i vettori **x** (ad n componenti) per i quali è:

$$\mathbf{x'A = 0}$$

Anche il kernel di A è un sottospazio dello spazio S a cui appartiene A. Inoltre i vettori appartenenti al kernel di A sono ortogonali alle colonne di A. Pertanto il kernel di una matrice ed il sottospazio generato dalle sue colonne sono sottospazi ortogonali, entrambi appartenenti allo spazio dei vettori di ordine n.

Sarà quindi:

$$\text{dimensione}(A) + \text{dimensione }(\text{kernel}(A)) = n$$

ovvero:

$$\text{rango}(A) + \text{dimensione }(\text{kernel}(A)) = n$$

Analogamente, ragionando sulle righe della matrice A, e sullo spazio dei vettori di ordine p, di cui lo spazio $S_{A'}$ ed il suo complemento fanno parte:

$$\text{rango}(A') + \text{dimensione }(\text{kernel}(A')) = p$$