UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELL'INGEGNERIA CIVILE
CORSO DI INFRASTRUTTURE IDRAULICHE - II modulo
a.a. 2006-2007

Esercitazione n°4

Verifica di una rete chiusa con il metodo di Cross

Sia assegnata la geometria della rete chiusa di condotte di distribuzione idrica rappresentata in figura 1. Siano assegnate le lunghezze e i diametri delle condotte (Tabella 1). Siano inoltre assegnate le portate entranti nei nodi (Tabella 2) ed il carico piezometrico minimo che si può accettare sulla rete in esame (Tabella 3). Si calcolino con il metodo di Cross le portate nei tronchi ed i carichi nei nodi, i quali devono risultare sempre superiori al carico minimo accettabile.

Tronco	1	2	3	4	5	6	7
Lunghezza L_i [m]	500	380	720	470	700	510	490
Diametro D_i [m]	0.45	0.50	0.35	0.40	0.30	0.35	0.35

Tabella 1: Dati: lunghezze e diametri delle condotte della rete

Nodo	1	2	3	4	5
Portata Q_k [m^3/s]	0.510	-0.150	-0.060	-0.180	-0.120

Tabella 2: Dati: portate scambiate con l'esterno

Scabrezza dei tubi (Manning)	n	0.012 m$^{-1/3}$s
Carico piezometrico nel nodo 1	H_1	75 m
Carico piezometrico minimo	H_{min}	68 m

Tabella 3: Dati: carico minimo sulla rete

Procedimento

Il problema in esame richiede la verifica di una rete di distribuzione idrica di tipo chiuso, avendo definito le caratteristiche delle tubazioni e le portate in ingresso nei nodi. In figura 1a è riportato lo schema della rete (3 maglie indipendenti, 5 nodi e 7 tronchi).

Le equazioni che permettono di risolvere il problema di verifica sono quelle di continuità e quelle di conservazione del carico su una maglia chiusa. Per ogni nodo deve conservarsi la massa, ovvero la portata entrante deve essere pari a quella uscente (Figura 1b):

$$\sum_{i(k)} \delta_{ik} Q_i + P_k = 0 \tag{1}$$

avendo indicato con i l'indice di tronco affluente al nodo k. Inoltre percorrendo una maglia partendo da un nodo e tornando nel medesimo nodo si deve ottenere lo stesso valore del carico piezometrico, avendo assunto con il segno negativo le perdite relative a tronchi attraversati da una portata che fluisce in senso opposto al senso di percorrenza assunto per la maglia (Figura 1c):

$$\sum_{i(j)} \delta_{ij} \left| Q_i \right| Q_i \gamma \left(D_i \right) L_i = \sum_{i(j)} \Delta H_i = 0 \tag{2}$$

avendo indicato con i l'indice di tronco della maglia j.

Appare con evidenza che, se si assume un vettore di portate per la rete che soddisfi la continuità ai nodi (1) e si aggiunge ad esso un vettore di portate circolanti nelle maglie, il vettore risultante soddisfa ancora le

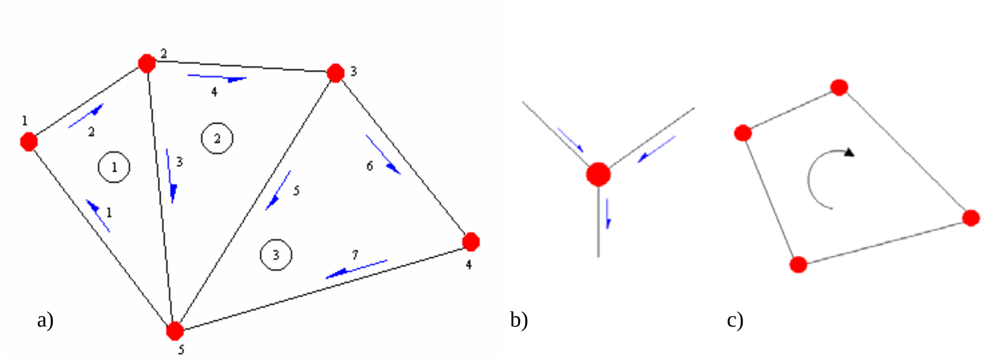

Figura 1: a) Schema della rete, b) continuità delle portate al nodo e c) conservazione del carico totale nella maglia.

equazioni dei nodi. Infatti aggiungere una portata circolante in una maglia equivale a sommare e sottrarre una stessa quantità nel bilancio di portata nel nodo. Il metodo più comune per la risoluzione della rete si basa sulla precedente considerazione e procede per iterazioni successive partendo da un vettore che soddisfi l'equazione di continuità e perturbando tale vettore con portate di correzione circolanti nelle maglie, sino ad ottenere un vettore che soddisfi anche l'equazione dei carichi 2.

Sia $Q\prime_i$ il sistema di portate di prima iterazione che soddisfa l'equazione di continuità, sia invece Q_v il sistema di portate che risolve entrambe le condizioni di continuità e dei carichi. La differenza portate vere e portatate di prima iterazione, $q_v^* = Q_v - Q_i'$, equivale ad un sistema di portate q_j circolanti nelle maglie per cui si ha:

- per condotte esterne $Q_{vi} = Q_i' + q_j$
- per condotte interne $Q_{vi} = Q_i' + q_j - q_{j,j+1}$ ($q_{j,j+1}$ è il termine relativo alla maglia $j+1$ a contatto con quella j nel tronco interno).

Sostituendo nell'equazione dei carichi si ottengono tante equazioni quante sono le maglie nelle incognite q_j che sono in egual numero:

$$\sum_{i(j)} \delta_{ij} \gamma\left(D_i\right) L_i \left|Q_i' + q_j \pm q_{j,j+1}\right| \left(Q_i' + q_j \pm q_{j,j+1}\right) = 0 \tag{3}$$

Tale sistema non è lineare e va pertanto risolto con metodi numerici idonei. In particolare se le portate di prima approssimazione sono abbastanza vicine a quelle reali, e quindi le correzioni sono piccole, possono essere trascurati i termini in cui le incognite compaiono al secondo grado ed il sistema è linearizzato. L'approssimazione di Cross consiste nel trascurare anche le $q_{j,j+1}$ per ottenere la seguente formula risolutiva esplicita:

$$q_j = -\frac{\sum_{i(j)} \delta_{ij} K_i \left|Q_i'\right| Q_i'}{2 \sum_{i(j)} K_i \left|Q_i'\right|} \tag{4}$$

avendo indicato con $K_i = \gamma\left(D_i\right) L_i$, $\gamma\left(D_i\right) = \frac{n^2}{16\pi^2 R_i^{\frac{16}{3}}}$ e $R_i = \frac{D_i}{4}$.

Come portate di prima approssimazione si utilizzino le seguenti:

Tronchi	1	2	3	4	5	6	7
Portate Q_i' [m^3/s]	$-0,20$	$0,31$	$0,05$	$0,11$	$-0,03$	$0,08$	$-0,10$

Tabella 4: Dati: portate di prima approssimazione che verificano le equazioni ai nodi