

# MODELLI FISICI

## 1. Considerazioni generali

Nell'affrontare la soluzione di un problema meccanico ci si può trovare nella condizione di non disporre di un modello matematico che descriva, con la necessaria completezza, tutti i fattori che determinano gli aspetti fondamentali del problema. In altri casi, pur disponendo di un adeguato modello matematico, la soluzione del modello stesso può presentare notevoli difficoltà operative.

In tali circostanze, la soluzione del problema può essere affrontata ricorrendo ad uno studio sperimentale; da tale studio è, in genere, possibile ottenere validi risultati solo se la sperimentazione è adeguatamente impostata.

I punti che devono essere seguiti per ottenere una valida realizzazione del modello fisico possono essere così sintetizzati.

1°) Definire un'adeguata formulazione adimensionale del problema.

Sulla base dell'analisi dimensionale si deve definire, mediante il teorema  $\Pi$ , un'opportuna relazione funzionale del problema del tipo:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-n}) = 0 \quad (1)$$

I gruppi adimensionali della relazione (1), in generale, sono definiti in funzioni delle grandezze fisiche che caratterizzano il problema in esame: le dimensioni del dominio di definizione, le grandezze cinematiche, le forze agenti sul sistema.

2°) Definire un 'modello' in similitudine con il 'prototipo'.

Nel campo della modellazione fisica, si definisce: 'prototipo' il problema reale in esame; 'modello' una riproduzione del prototipo, adeguata all'attuazione dello studio sperimentale del problema. A tal fine è necessario che il modello sia realizzato in 'similitudine' con il prototipo.

3°) Definire le similitudini

Nel realizzare il modello si devono assicurare le seguenti similitudini:

- similitudine geometrica;
- similitudine cinematica;
- similitudine dinamica.

**Se si realizza il modello nel rispetto di tali similitudini, la relazione funzionale (1) che governa il problema reale (prototipo) è rappresentativa anche del problema riprodotto in sede sperimentale (modello).**

In altri termini, indipendentemente dai valori delle singole grandezze fisiche che intervengono nel problema il generico parametro adimensionale  $\Pi_i$  della (1) assume lo stesso valore sia in riferimento al prototipo che al modello.

## 2. Le similitudini tra modello e prototipo

**2.1 Similitudine geometrica** – Per soddisfare questa similitudine è necessario che ogni dimensione del modello sia in un rapporto costante con le corrispondenti dimensioni del prototipo, vale a dire il modello deve essere ottenuto come trasformazione omotetica del prototipo, come mostrato schematicamente in Fig. 1.

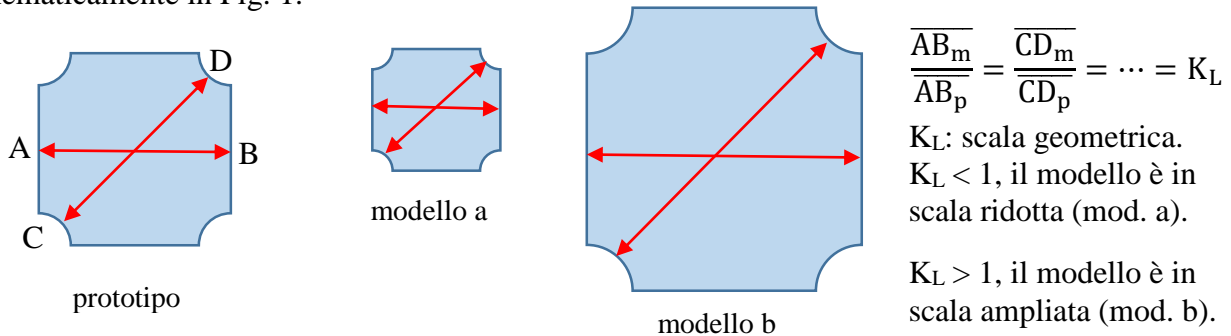


Fig. 1

**2.2 Similitudine cinematica** - Per soddisfare questa similitudine è necessario che in ogni punto del dominio del modello la velocità abbia la stessa direzione e verso della corrispondente velocità del prototipo. Inoltre, in punti corrispondenti del modello e del prototipo il rapporto tra i moduli delle velocità deve risultare costante: scala delle velocità  $K_v = \text{costante}$ .

**2.3 Similitudine dinamica** - Per soddisfare questa similitudine è necessario che ogni forza che agisce nel modello abbia la stessa direzione e verso della corrispondente forza che agisce nel prototipo. Inoltre, il rapporto tra i moduli di forze agenti nel modello deve essere uguale al corrispondente rapporto che si determina nel prototipo: scala delle forze  $K_{Fp} = K_{Fm}$ .  
 In genere, al fine di definire i rapporti tra le forze, si assume come forza di riferimento la ‘forza di inerzia’

$$F_i \propto \rho L^2 V^2$$

dove con L si indica una opportuna dimensione geometrica e con V un opportuno valore di velocità, in riferimento al dato problema.

Le diverse similitudini dinamiche che possono interessare i problemi idraulici sono, quindi, definite nel modo seguente.

– Similitudine per le forze peso

$$\frac{F_i}{F_g} \propto \frac{\rho L^2 V^2}{\rho g L^3} \propto \frac{V^2}{gL} \rightarrow \frac{V}{\sqrt{gL}} : \text{numero di Froude}$$

– Similitudine per le forze viscosive

$$\frac{F_i}{F_v} \propto \frac{\rho L^2 V^2}{\mu V L} \propto \frac{VL}{\nu} : \text{numero di Reynolds}$$

- Similitudine per le forze di pressione

$$\frac{F_i}{F_p} \propto \frac{\rho L^2 V^2}{\Delta p L^2} \propto \frac{\rho V^2}{\Delta p} \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho V^2} : \text{numero di Eulero}$$

- Similitudine per le forze di tensione superficiale

$$\frac{F_i}{F_\sigma} \propto \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} \propto \frac{\rho L V^2}{\sigma} \rightarrow V \sqrt{\frac{\rho L}{\sigma}} : \text{numero di Weber.}$$

**Al fine di assicurare una determinata similitudine, il valore del corrispondente numero deve risultare lo stesso sia per il prototipo che per il modello.**

Nell'ambito delle similitudini dinamiche tra prototipo e modello è necessario porre particolare attenzione al seguente aspetto.

Una determinata forza  $X$  può essere irrilevante nel prototipo, cioè può verificarsi che  $F_x \ll F_i$  e, quindi, il valore del corrispondente numero rappresentativo risulta molto grande: se questo avviene, si dice che la forza  $X$  è fuori scala nel prototipo. In questi casi è necessario verificare che anche nel modello la forza  $X$  rimanga fuori scala; si deve cioè verificare che anche nel modello il numero rappresentativo della specifica similitudine dinamica abbia un valore molto grande.

**2.4 Principi generali di Similitudine** – Tenendo conto che i problemi meccanici si presentano come fenomeni deterministici, nell'ambito delle Similitudini valgono i seguenti principi generali.

1° Se un modello è realizzato in similitudine geometrica e dinamica con il prototipo, la similitudine cinematica tra modello e prototipo è conseguentemente realizzata. Infatti le due similitudini indicate assicurano tra modello e prototipo simili condizioni al contorno e simili azioni dinamiche, quindi il campo di velocità che risulta nel modello è simile a quello che si determina nel prototipo.

2° Se nel problema in esame risulta rilevante l'azione di  $n$  forze, la similitudine dinamica tra modello e prototipo è assicurata realizzando solo la similitudine per  $(n - 1)$  forze, poiché date le condizioni di equilibrio dinamico (risultante di tutte le forze, ivi compresa la 'forza d'inerzia', pari a zero) anche la  $n$ -ennesima forza risulterà in similitudine tra modello e prototipo.

### 3. Fattori di scala ed errori di scala

**3.1 Fattori di scala** - Sulla base di quanto esposto nel paragrafo 4, esaminiamo la procedura operativa da seguire per la realizzazione del modello in similitudine con il prototipo.

Supponiamo che nel problema in esame siano rilevanti sia le forze viscosse che le forze peso; è necessario quindi assicurare che tali forze siano in similitudine tra modello e prototipo. A tal fine bisogna determinare i così detti 'fattori di scala' tramite i quali si assicurano le necessarie similitudini dinamiche. Nel seguito si presenta un prospetto del processo operativo di definizione dei fattori di scala.

Determinazione del **fattore di scala geometrica**:  $K_L \equiv L_m/L_p$

Similitudine forze peso	Similitudine forze viscosi
$Fr_m = Fr_p$ $\left[ \frac{V}{\sqrt{gL}} \right]_m = \left[ \frac{V}{\sqrt{gL}} \right]_p$ <p>In genere risulta che <math>g_m = g_p \equiv g</math> (accelerazione di gravità), ne consegue che:</p> $\frac{V_m}{V_p} = \left( \frac{L_m}{L_p} \right)^{1/2} = K_L^{1/2} \quad (1)$	$Re_m = Re_p$ $\left[ \frac{VL}{\nu} \right]_m = \left[ \frac{VL}{\nu} \right]_p$ $\frac{V_m}{V_p} = \frac{v_m L_p}{v_p L_m} = \frac{v_m}{v_p} K_L^{-1} \quad (1)$
rapporto che definisce il <b>fattore di scala delle velocità</b> per la similitudine dinamica tra modello e prototipo.	
Considerando il rapporto tra la forza di inerzia e una generica forza $F_x$ :	
$\left[ \frac{F_i}{F_x} \right]_m = \left[ \frac{F_i}{F_x} \right]_p \Rightarrow \frac{F_{xm}}{F_{xp}} = \frac{\rho_m (V_m L_m)^2}{\rho_p (V_p L_p)^2}$ <p>Si può facilmente derivare per le rispettive similitudini.</p>	
$\frac{Fg_m}{Fg_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} K_L^3 \quad (2)$	$\frac{Fv_m}{Fv_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \left( \frac{v_m}{v_p} \right)^2 \quad (2).$
rapporto che definisce il <b>fattore di scala delle forze</b> per la similitudine dinamica tra modello e prototipo.	
<b>I fattori di scala (1) e (2) permettono di calcolare i valori sia delle velocità che delle forze che si registrano nel prototipo in relazione ai corrispondenti valori misurati nel modello.</b>	

Realizzazione della similitudine forze peso	Realizzazione della similitudine forze viscosi
Considerando che $V \propto Q/L^2$ , si ottiene:	
$\frac{Q_m}{Q_p} = K_L^{5/2},$	$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{v_m L_p L_m^2}{v_p L_m L_p^2} = \frac{v_m}{v_p} K_L,$
rapporto che definisce il <b>fattore di scala delle portate</b> . Per garantire la similitudine dinamica tra modello e prototipo si deve cioè assicurare che:	
$Q_m = Q_p K_L^{5/2}.$	$Q_m = Q_p \left( \frac{v_m}{v_p} K_L \right).$
Considerando che $V \propto L/T$ , si ottiene:	
$\frac{T_m}{T_p} = K_L^{1/2},$	$\frac{T_m}{T_p} = \frac{v_p}{v_m} K_L^2,$
rapporto che definisce il <b>fattore di scala dei tempi</b> per garantire la similitudine dinamica tra modello e prototipo.	

**3.2 Similitudine incompleta** – In relazione ai fattori di scala sopra definiti, risulta che al fine di realizzare entrambe le similitudini dinamiche (Fr e Re) si deve assumere:

$$\frac{v_m}{v_p} = K_L^{3/2}$$

Vale a dire che il liquido da usare nel modello deve essere diverso dal liquido del prototipo, in modo tale che la viscosità cinematica del liquido usato nel modello sia:

$$v_m = v_p K_L^{3/2}$$

soluzione questa che non è facilmente realizzabile in pratica, sia per ragioni tecniche che economiche.

Se non è possibile usare nel modello un liquido diverso da quello del prototipo, ne consegue che il modello può essere realizzato nel rispetto della similitudine dinamica per una sola tipologia di forze; per l'altra tipologia di forze il modello presenta una così detta '**similitudine dinamica incompleta**'. In pratica, per questi casi, si opera realizzando il modello nel rispetto della similitudine dinamica per quella tipologia di forze che risulta più significativa nel problema in esame, cercando di mantenere nel modello fuori scala le altre tipologie di forze.

Dalla sperimentazione svolta su un modello in similitudine dinamica incompleta si possono derivare, ovviamente, dati relativi al prototipo per le sole forze in similitudine. Gli effetti delle altre tipologie di forze, ipotizzando valido il principio di sovrapposizione degli effetti, potranno essere determinati mediante altri metodi di modellazione del problema.

Ad esempio: la forza che viene ad agire su un corpo solido che si muove relativamente a un liquido  $F_d$  è determinata, in genere, sia dalle forze viscosive che dalle forze peso. Nel limite di validità del principio di sovrapposizione degli effetti si può porre:

- $F_d = F_v + F_g$

Se il modello viene realizzato nel rispetto della sola similitudine delle forze peso  $F_g$ , Si misura nel modello la  $F_d$ , si calcola la  $F_v$  nel modello mediante una modellazione matematico-numerica e si ricava in fine la  $F_g$  nel modello come:

- $F_g = F_d - F_v$

da cui si può determinare:

$$(F_g)_p = (F_g)_m K_L^{-3}$$

#### 4. Modelli in scala geometrica distorta

Nei modelli fisici per lo studio di fenomeni idraulici (modelli di lunghi tratti di un fiume o di ampi baci ecc.) spesso si rende necessario, per motivi tecnici di realizzazione del modello, operare con due diversi fattori di scala geometrica, uno per le dimensioni orizzontali ed un altro per le dimensioni verticali:

- fattore di scala per le dimensioni orizzontali:  $\frac{(L_O)_m}{(L_O)_p} = K_{LO}$ ;
- fattore di scala per le dimensioni verticali:  $\frac{(L_V)_m}{(L_V)_p} = K_{LV}$ ;

con  $K_{LO} < K_{LV}$ .

In riferimento alla procedura operativa di definizione di un modello, esposta nel paragrafo 3.1, ci si chiede: come si definiscono i fattori di scala nei modelli in scala distorta?

In questi casi, la definizione dei diversi fattori di scala si stabilisce in base ai seguenti criteri.

**Fattore di scala delle velocità** – Le velocità nei casi in considerazione sono proporzionali alle ai tiranti liquidi [il termine  $V^2/2g$  è di  $\mathcal{O}(Y)$ ], pertanto risulta:

- $\frac{V_m}{V_p} = K_{LV}^{1/2}$ .

**Fattore di scala delle portate** – Essendo la portata  $Q \propto VA$  ( $A$  area di deflusso), risulta:

- $\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m A_m}{V_p A_p} = \frac{V_m}{V_p} \left( \frac{L_{Om} L_{Vm}}{L_{Op} L_{Vp}} \right) = K_{LV}^{1/2} (K_{LO} K_{LV}) = K_{LO} K_{LV}^{3/2}$ .

**Fattore di scala dei tempi** – Nel caso dei fenomeni idraulici considerati, le componenti della velocità prevalenti sono quelle orizzontali; pertanto il tempo di convezione risulta  $T \propto L_O/V$ , si pone quindi:

- $\frac{T_m}{T_p} = \frac{V_p L_{Om}}{V_m L_{Op}} = K_{LO} K_{LV}^{-1}$ .

## Modelli fisici: un'applicazione

### MODELLO DI ALVEO A FONDO FISSO

Si voglia realizzare un modello che simuli il comportamento di un lungo tratto di un fiume a fondo fisso, allo scopo di determinare sperimentalmente nel *modello* la forza di resistenza al moto e da questa analisi trarre informazioni sul valore che tale forza assume nella realtà (*prototipo*).

Come è noto dalla teoria, questo è possibile se il fenomeno sia nel modello che nel prototipo è rappresentato da una stessa relazione funzionale adimensionale. In pratica, affinché questa condizione sia soddisfatta, è sufficiente realizzare il modello in similitudine geometrica, cinematica e dinamica con il prototipo.

Consideriamo il caso in cui il flusso nel prototipo sia completamente turbolento, così da considerare trascurabili (fuori scala) le forze viscosi; si dovrà, quindi, garantire che tali forze rimangano fuori scala anche nel modello.

Si ricorda che un flusso si può definire completamente turbolento se si realizza un valore del rapporto adimensionale

$$\frac{u^* \varepsilon}{\nu} > 70 \div 100$$

dove  $u^*$  è la velocità di attrito,  $\varepsilon$  l'indice di scabrezza e  $\nu$  la viscosità cinematica.

Si è verificato sperimentalmente che la condizione precedente corrisponde a un valore del numero di Reynolds

$$\frac{V\mathfrak{R}}{\nu} > 500 \div 1000$$

dove  $V$  è una velocità caratteristica del flusso e  $\mathfrak{R}$  il raggio idraulico dell'alveo.

La relazione funzionale tra le grandezze che determinano sostanzialmente la forza di resistenza è la seguente:

$$f_1(F_R, V, g, \rho, \mathfrak{R}, L) = 0 \quad (1)$$

dove  $F_R$  rappresenta la forza di resistenza,  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $\rho$  la densità del fluido e  $L$  è una scala caratteristica delle dimensioni orizzontali del dominio di definizione dell'alveo fluviale.

In tale relazione compaiono  $m = 6$  grandezze. Poiché in questo caso le grandezze fondamentali risultano essere in numero  $n = 3$ , per il teorema  $\Pi$  sussiste una nuova relazione funzionale composta da  $(m - n = 3)$  gruppi adimensionali rappresentativa del fenomeno in esame.

Dalla (1) si può, quindi, derivare la seguente relazione tra 3 gruppi adimensionali:

$$f_2 \left[ \frac{F_R}{\rho V^2 L^2}, \frac{V}{(g\mathfrak{R})^{1/2}}, \frac{\mathfrak{R}}{L} \right] = 0 \quad (2),$$

in cui il primo gruppo è il rapporto tra la forze oggetto di studio e la forza d'inerzia; il secondo è il numero di Froude e il terzo è il rapporto tra due scale geometriche caratteristiche del dominio.

In base alla (2) si stabiliscono le scale con le quali deve essere realizzato il modello in relazione a:

1. Similitudine geometrica
2. Similitudine dinamica delle forze peso: similitudine di Froude  
(si ricorda che la realizzazione della similitudine cinematica consegue dal realizzarsi delle due precedenti similitudini, allorquando siano imposte le medesime condizioni al contorno)
3. Controllo degli effetti della scabrezza
4. Controllo delle forze viscosi
5. Similitudine dinamica delle forze di resistenza  $F_R$ .

➤ **Modello realizzato senza distorsioni**

**1. Similitudine geometrica**

Occorre fissare una unica scala (di riduzione) delle lunghezze, la scala geometrica costante è quindi definita come:

$$\boxed{\frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} = \frac{L_m}{L_p} \equiv k_L < 1} \quad (3)$$

**In questo caso una scala geometrica definita dalla (3) determina una riduzione omotetica del dominio di definizione tra prototipo e modello.**

**2. Similitudine dinamica di Froude**

Per garantire la similitudine delle forze peso, occorre avere:

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{V_m}{(g_m \mathfrak{R}_m)^{1/2}} = \frac{V_p}{(g_p \mathfrak{R}_p)^{1/2}} \text{ se } g_m = g_p \text{ e per la (3)} \Rightarrow \boxed{\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2} = k_L^{1/2}} \quad (4).$$

In realtà, si realizza la similitudine di Froude mantenendo in scala le portate (fattore di scala delle portate):

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m A_m}{V_p A_p} = \frac{V_m L_m^2}{V_p L_p^2} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_m}{Q_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{5/2} = k_L^{5/2}} \quad (5).$$

**Il modello deve essere alimentato con la portata  $Q_m = Q_p (k_L)^{5/2}$  per assicurare la similitudine dinamica di Froude.**

**3. Controllo degli effetti della scabrezza**

Si deve assicurare che l'effetto della scabrezza sulla scala delle velocità (4) sia lo stesso nel modello e nel prototipo. Considerando valida la relazione di Chezy, con il fattore di resistenza esplicitato tramite la formula di Manning, si ha:

$$V \propto \frac{1}{n} \mathfrak{R}^{2/3} i^{1/2}$$



da cui

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{n_p}{n_m} \left( \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} \right)^{2/3} \left( \frac{i_m}{i_p} \right)^{1/2} \quad (\text{dove con } i \text{ si è indicata la pendenza geometrica dell'alveo})$$

relazione che uguagliata alla (4) determina

$$\boxed{\frac{n_m}{n_p} = \frac{(\mathfrak{R}_m/\mathfrak{R}_p)^{2/3} (i_m/i_p)^{1/2}}{(L_m/L_p)^{1/2}}} \quad (6).$$

La pendenza di fondo  $i$  è data dal rapporto tra dimensioni verticali e orizzontali ma poiché la scala geometrica è unica, si ha  $\frac{i_m}{i_p} = 1$ , da cui

$$\frac{n_m}{n_p} = \frac{(\mathfrak{R}_m/\mathfrak{R}_p)^{2/3}}{(L_m/L_p)^{1/2}} \quad \text{tenendo conto della (3)} \Rightarrow \boxed{\frac{n_m}{n_p} = \left( \frac{L_m}{L_p} \right)^{1/6} = (k_L)^{1/6}} \quad (7)$$

**Il modello deve essere realizzato con un indice di scabrezza  $n_m = n_p (k_L)^{1/6}$ . Essendo  $k_L < 1$ , la scabrezza del modello deve essere inferiore a quella del prototipo.**

#### 4. *Controllo delle forze viscosse.*

Si è detto che le forze viscosse devono rimanere fuori scala nel modello, dunque dovrà risultare:

$$Re_m = \frac{V_m \mathfrak{R}_m}{\nu_m} > 510^2 \div 10^3 .$$

Rapportando il valore di  $Re_m$  con il valore di  $Re_p$ , supponendo  $\nu_m = \nu_p$  e tenendo conto della (3) e della (4), si ottiene

$$\boxed{Re_m = Re_p \left( \frac{L_m}{L_p} \right)^{3/2} = Re_p k_L^{3/2} > 510^2 \div 10^3} \quad (8).$$

**Se  $k_L$  è molto minore di 1 potrebbe risultare un valore di  $Re_m$  tale che le forze viscosse nel modello non risultino trascurabili.**

#### 5. *Similitudine delle forze di trascinamento*

Avendo realizzato il modello in similitudine geometrica e dinamica, dalla relazione (2) deriva che:

$$\frac{F_{Rp}}{\rho_p V_p^2 L_p^2} = \frac{F_{Rm}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} .$$

Essendo la forza di resistenza  $F_R \propto t L^2$  (dove  $t$  è lo sforzo di resistenza) e considerando  $\rho_p = \rho_m$ , si ottiene:

$$\frac{t_m}{t_p} = \frac{V_m^2}{V_p^2} \quad \text{tenendo conto della (4)} \Rightarrow \boxed{\frac{t_m}{t_p} = \frac{L_m}{L_p} = k_L} \quad (9).$$

**Il rapporto tra gli sforzi di resistenza modello/prototipo, nel caso di modello ad unica scala, risulta uguale alla scala geometrica  $k_L$ .**

## ➤ Modello realizzato con scale distorte

### 1. Similitudine geometrica

In questo caso si fissano due diverse scale geometriche: la scala verticale si realizza scalando opportunamente il raggio idraulico  $\mathfrak{R}$ , mentre quella orizzontale scalando la lunghezza  $L$  dell'asta fluviale.

$$\boxed{k_{\mathfrak{R}} \equiv \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} \neq \frac{L_m}{L_p} \equiv k_L} \quad (10)$$

**In questo caso il modello si realizza con scale di riduzione diverse per le dimensioni verticali e orizzontali.**

### 2. Similitudine dinamica di Froude

Per garantire la similitudine delle forze peso occorre avere:

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{V_m}{(g_m \mathfrak{R}_m)^{1/2}} = \frac{V_p}{(g_p \mathfrak{R}_p)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{V_m}{V_p} = \left( \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} \right)^{1/2} = k_{\mathfrak{R}}^{1/2}} \quad (11).$$

Per definire la scala delle portate:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m A_m}{V_p A_p}$$

si deve tener conto che, in questo caso, la scala geometrica orizzontale è diversa da quella verticale, per cui risulta

$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{\mathfrak{R}_m L_m}{\mathfrak{R}_p L_p}$$

che unitamente alla (11) conduce a

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \left( \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} \right)^{1/2} \frac{\mathfrak{R}_m L_m}{\mathfrak{R}_p L_p} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_m}{Q_p} = k_{\mathfrak{R}}^{3/2} k_L} \quad (12)$$

**Il modello deve essere alimentato con la portata  $Q_m = Q_p k_{\mathfrak{R}}^{3/2} k_L$  per assicurare la similitudine dinamica di Froude.**

### 3. Controllo degli effetti della scabrezza

Prendendo in considerazione la (6), in questo caso la differenza nelle scale geometriche orizzontali e verticali porta ad avere

$$\frac{i_m}{i_p} = \frac{\mathfrak{R}_m L_p}{\mathfrak{R}_p L_m}$$

da cui

$$\frac{n_m}{n_p} = \frac{(\mathfrak{R}_m/\mathfrak{R}_p)^{2/3} (\mathfrak{R}_m/\mathfrak{R}_p)^{1/2} (L_m/L_p)^{-1/2}}{(\mathfrak{R}_m/\mathfrak{R}_p)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{n_m}{n_p} = k_{\mathfrak{R}}^{2/3} k_L^{-1/2}} \quad (13).$$

**Il modello deve essere realizzato con un indice di scabrezza**  $n_m = n_p k_{\mathfrak{R}}^{2/3} k_L^{-1/2}$ .

In questo caso è sempre  $k_L < 1$  ma contribuisce, essendo l'esponente negativo, ad aumentare  $n_m$  rispetto a  $n_p$ . E' pur vero che  $k_{\mathfrak{R}}$  è anch'esso minore di 1, ma sicuramente maggiore di  $k_L$ .

### 4. Controllo delle forze viscosse.

Questa volta il numero di Reynolds del modello, che deve sempre soddisfare la condizione:

$$Re_m = \frac{V_m \mathfrak{R}_m}{\nu_m} > 510^2 \div 10^3,$$

rapportato a quello del prototipo in questo caso fornisce:

$$\boxed{Re_m = Re_p \left( \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} \right)^{3/2} = Re_p k_{\mathfrak{R}}^{3/2} > 510^2 \div 10^3} \quad (14).$$

**Il problema della trascurabilità delle forze viscosse rimane per  $k_{\mathfrak{R}}$  piccoli, ma è anche vero che la scala verticale potrà essere fissata ad un valore maggiore di quella orizzontale, in modo da mantenere le forze viscosse fuori scala nel modello.**

### 5. Similitudine delle forze di trascinamento

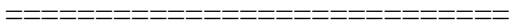
In questo caso risulta che il rapporto tra gli sforzi tangenziali di resistenza nel modello e nel prototipo, dato da

$$\frac{t_m}{t_p} = \frac{V_m^2}{V_p^2},$$

tenendo conto della (11) risulta pari a

$$\boxed{\frac{t_m}{t_p} = \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_p} = k_{\mathfrak{R}}} \quad (15).$$

**Il rapporto tra gli sforzi di trascinamento modello/prototipo nel caso di modello a scala distorta, risulta uguale alla scala verticale  $k_{\mathfrak{R}}$ .**



Ricapitolando, confrontiamo i risultati ottenuti per i due diversi tipi di modello.

		<b>Modello ad unica scala geometrica</b>	<b>Modello con scale distorte</b>
<b>1</b>	<b>Scala geometrica</b>	$\frac{\Re_m}{\Re_p} = \frac{L_m}{L_p} = k_L = \text{costante}$	$k_{\Re} \equiv \frac{\Re_m}{\Re_p} \neq \frac{L_m}{L_p} \equiv k_L$
<b>2</b>	<b>Scala delle portate</b>	$\frac{Q_m}{Q_p} = k_L^{5/2}$	$\frac{Q_m}{Q_p} = k_{\Re}^{3/2} \cdot k_L$
<b>3</b>	<b>Indice di scabrezza del modello</b>	$n_m = n_p (k_L)^{1/6}$	$n_m = n_p \cdot k_{\Re}^{2/3} \cdot k_L^{-1/2}$
<b>4</b>	<b>Numero di Reynolds nel modello</b>	$Re_m = Re_p k_L^{3/2} > 510^2 \div 10^3$	$Re_m = Re_p k_{\Re}^{3/2} > 510^2 \div 10^3$
<b>5</b>	<b>Similitudine degli sforzi di resistenza</b>	$\frac{t_m}{t_p} = k_L$	$\frac{t_m}{t_p} = k_{\Re}$

Si può notare come il modello con scale distorte possa presentare dei vantaggi realizzativi rispetto a quello ad unica scala, in particolare per il controllo delle forze viscosse.

Si consideri un esempio pratico: supponiamo che per motivi tecniche (disponibilità di spazi per la realizzazione del modello) sia necessario ridurre le dimensioni orizzontali del prototipo di 100 volte. È allora possibile operare riducendo tutte le dimensioni di un fattore 100 (modello ad unica scala geometrica), oppure riducendo di 100 volte le sole dimensioni orizzontali e adottando un fattore di riduzione 10 per quelle verticali (modello con scale distorti). Per le due diverse realizzazioni del modello risulta:

<b>Modello ad unica scala geometrica</b>	<b>Modello con scale distorte</b>
$k_L = 0,01$	$k_{\Re} = 0,1 \dots \dots \dots k_L = 0,01$
$n_m = 0,46 \cdot n_p$	$n_m = 2,15 \cdot n_p$
$Re_m = 0,001 \cdot Re_p > 510^2 \div 10^3$	$Re_m = 0,032 \cdot Re_p > 510^2 \div 10^3$

Dalla tabella si evince che l'indice di scabrezza del modello deve essere inferiore a quello del prototipo nel caso di modello ad unica scala geometrica, mentre deve essere più del doppio nel caso di modello a scale distorte.

Il mantenere le forze viscosse fuori scala è sicuramente più problematico, infatti risulta:

- nel caso del primo tipo di modello, deve essere  $Re_p > 510^5$ ;
- nel secondo tipo di modello è invece sufficiente, per mantenere le forze viscosse fuori scala, che sia  $Re_p > 1610^3$ .