

## 4 L'ala infinita. Teoria di Glauert

### 4.1 Cenno ai metodi impiegati per lo studio dell'ala infinita

Vogliamo ora intraprendere lo studio del sistema portante di un aeroplano: l'ala.

È chiaro infatti che i risultati ottenuti nello studio dei flussi potenziali 2D, con il cilindro rotante in particolare, non sono di pratica applicazione, e possono solo servire a chiarire il fenomeno della portanza.

Possiamo intanto dire che l'ala è un oggetto che, per la sua conformazione, riesce a produrre una dissimmetria del flusso d'aria sulle superfici superiore ed inferiore, generando quindi una differenza di pressione che dà la forza portante.

Le teorie impiegate per la soluzione dell'ala infinita sono basate essenzialmente sugli studi di Joukowski e di Glauert.

Il primo utilizza le funzioni di variabile complessa e, definendo un "potenziale complesso", trasforma il corpo aerodinamico, già noto, attorno ad un cilindro rotante, in quello generato da un profilo alare.

Il secondo schematizza il profilo alare con un insieme di vortici, paralleli fra di loro ed ortogonali alla corrente esterna, tali da dare una corrente risultante che lambisce la superficie alare.

Lo studio del metodo delle funzioni di variabile complessa non sarà affrontato nella presente trattazione. Osserviamo soltanto che esso si basa sulla possibilità di rappresentare il potenziale  $\phi$  e la funzione di corrente  $\psi$  come parte reale e parte immaginaria di un "potenziale complesso":

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (4.1)$$

dove:

$$z = x + iy \quad (4.2)$$

Vediamo subito che la posizione (4.1) è possibile; infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad (4.3)$$

avendo rilevato che dalla (4.2) si ha:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

Allora, tenuto conto della (4.3), derivando la (4.1) rispetto alla  $x$  si ha:

$$f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.4)$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i f'(z) \quad (4.5)$$

poiché dalla (4.2) risulta:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = i$$

Allora, derivando la (4.1) rispetto alla  $y$ :

$$i f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.6)$$

Dal confronto della (4.6) con la (4.4), moltiplicata per  $i$ , risulta:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow u \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow v \quad (4.8)$$

ricordando che:

$$i^2 = -1$$

Le (4.7) ed (4.8) sono proprio le note relazioni valide per le correnti piane irrotazionali di un fluido incompressibile: esse mostrano quindi la possibilità della posizione (4.1).

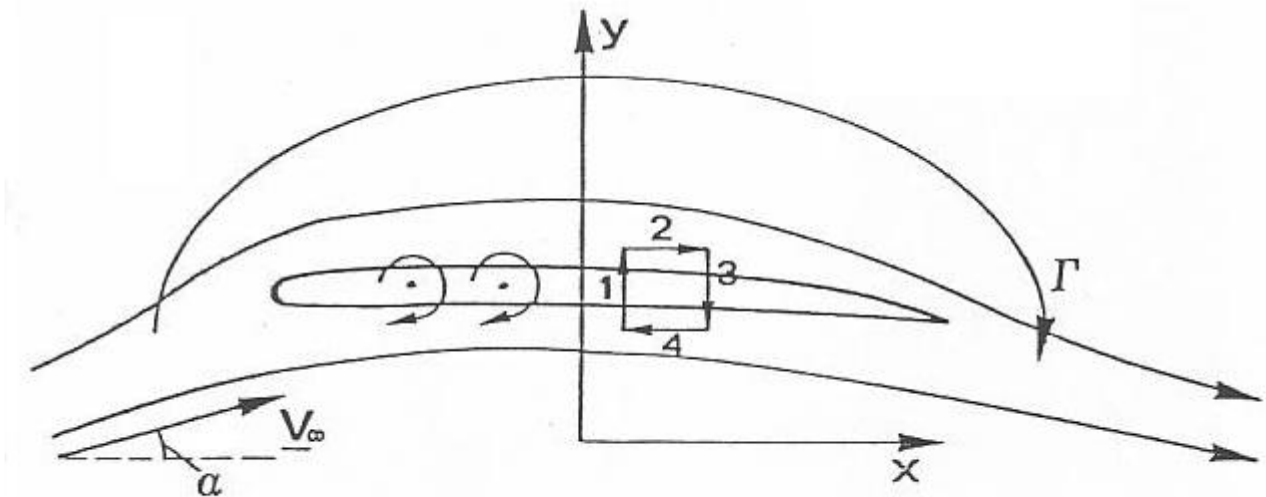
Dalle (4.4), (4.7) e (4.8) si ha infine:

$$f'(z) = u - iv = w(z) \quad (4.9)$$

dove la  $w(z)$  descrive le due componenti cartesiane della velocità.

## 4.2 Teorema di Kutta-Joukowski sulla portanza per il profilo

Consideriamo (fig.1) un profilo immerso in una corrente d'aria; sia  $V_\infty$  la velocità asintotica, lontano dal corpo.



- Fig. 1 -

Immaginiamo di sostituire il corpo alare con aria a concentrazione vorticosità di intensità:

$$\omega = \text{rot}_z \underline{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.10)$$

che dia lo stesso campo di velocità prodotto dalla presenza del profilo.

Se, come supponiamo, o per la curvatura del profilo o per la incidenza  $\alpha$  della corrente, esiste dissimmetria tra il dorso (faccia superiore) ed il ventre (faccia inferiore), nella (4.10) avremo, per un profilo sottile:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gg \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|$$

La (4.10) diventa allora:

$$\omega \approx -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.11)$$

Proponiamoci ora di valutare la circolazione attorno ad ogni tratto di profilo, nonché la circolazione totale  $\Gamma$ , considerata positiva in senso antiorario. Avremo:  $d\Gamma = \text{flusso di } (\underline{\omega}) \text{ attraverso la superficie } \Delta S$ , di contorno  $dl_1 \ dl_2 \ dl_3 \ dl_4$  (fig.1). Allora, dalla 11:

$$d\Gamma = \int_{\Delta S} -\omega \, dx \, dy = \Delta x \int_0^h \frac{\partial u}{\partial y} \, dy = \Delta x \{u_2 - u_1\} = (u_s - u_i) \Delta x \quad (4.12)$$

dove  $u_s$  e  $u_i$  indicano le velocità sulle superfici superiore ed inferiore del profilo. Se introduciamo una “circolazione per unità di lunghezza lungo la corda”:

$$\gamma(x) = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta x} \quad (4.13)$$

dalla (4.12) si ha:

$$\gamma(x) = u_s - u_i \quad (4.14)$$

che può anche essere ottenuta direttamente; infatti dalla fig. 1:

$$d\Gamma = v_1 h + u_2 \Delta x - v_3 h - u_4 \Delta x$$

dove  $h$  è lo spessore del profilo. Per profili molto sottili (teoria di Glauert) risulta (essendo  $h$  trascurabile):

$$d\Gamma = \gamma \Delta x = (u_2 - u_4) \Delta x$$

ossia la (4.14).

Proponiamoci ora di trovare la differenza di pressione,  $\Delta p$ , tra un punto della superficie ventrale ed il corrispondente punto sulla superficie dorsale; dal teorema di Bernoulli avremo:

$$\Delta p = p_i - p_s = \frac{1}{2} \rho (u_s^2 - u_i^2) = \rho \frac{u_s - u_i}{2} (u_s + u_i) \approx \rho V_\infty \gamma \quad (4.15)$$

avendo usato la (4.14) e sfruttato l'ipotesi delle piccole perturbazioni, in base alla quale si può porre:

$$\frac{u_s + u_i}{2} \approx V_\infty$$

Dalla (4.15) è possibile ottenere per la portanza:

$$dL = \Delta p \, dx = \rho V_\infty \gamma \, dx$$

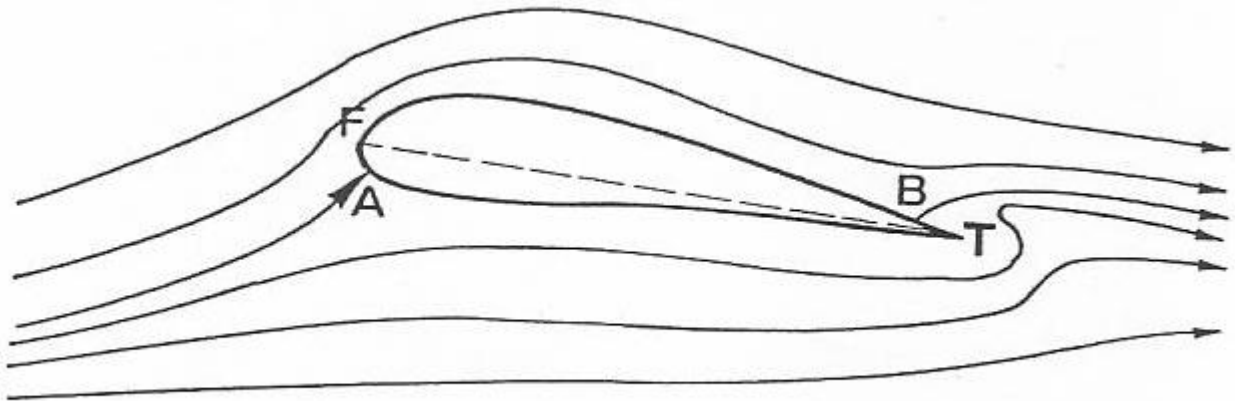
da cui:

$$L = \rho V_\infty \int_0^\ell \gamma \, dx = \rho V_\infty \Gamma \quad (4.16)$$

Che è il Teorema di Kutta-Joukowski, già visto per il caso del cilindro circolare: esso vale dunque anche nel caso di un profilo alare.

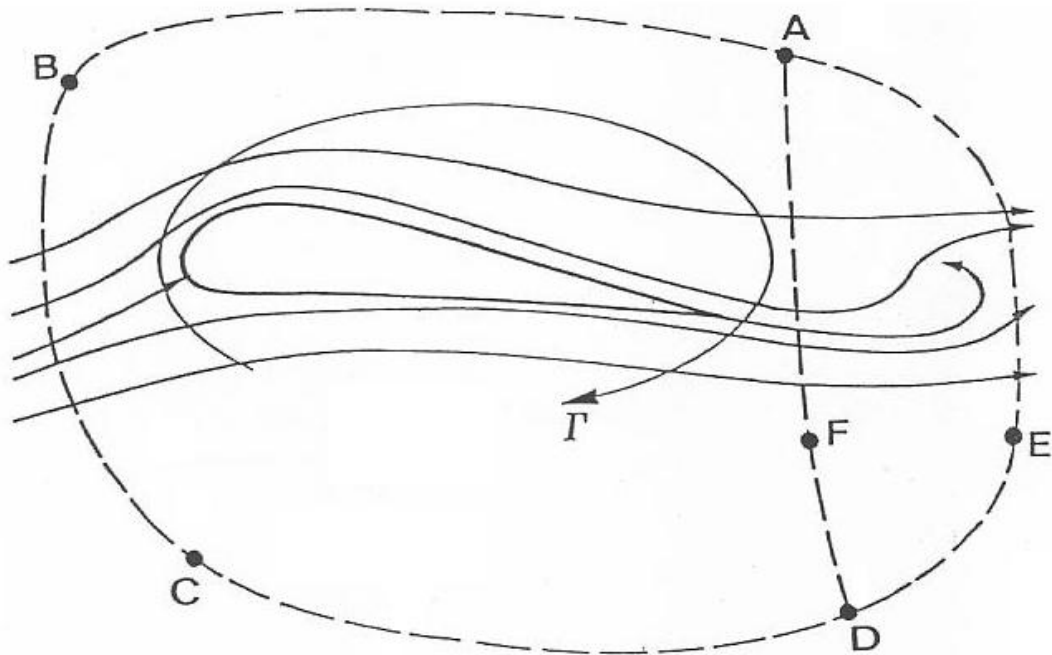
### 4.3 La condizione di Kutta-Joukowski

Prima di presentare lo sviluppo proposto da Glauert per la vorticità  $\gamma$ , osserviamo il comportamento del flusso attorno ad un profilo, che inizi il suo moto da fermo (fig.2).



- Fig. 2 -

All'inizio del moto gli effetti della viscosità non si fanno ancora sentire ed il moto è irrotazionale; attorno al profilo la circolazione è nulla e, con essa, è nulla la portanza. Come già visto per la corrente attorno ad un cilindro circolare, anche ora avremo due punti di ristagno A e B, non necessariamente coincidenti con gli estremi, F e T, della corda alare. La corrente gassosa gira velocemente attorno a detti estremi, tanto più velocemente quanto più è piccolo il raggio di curvatura locale della superficie alare; tale aggiramento è quindi particolarmente vivo attorno al bordo d'uscita T (trailing-edge), ove ben presto si faranno sentire gli effetti della viscosità. Tali effetti consistono in un frenamento locale della velocità e del distacco del vortice di aggiramento (fig.3) con orientazione antioraria.



- Fig. 3 -

Consideriamo ora il circuito A B C D E A; su di esso la circuitazione era nulla e resta nulla. Poiché sul circuito A F D E A si è creata una circolazione antioraria, sul circuito A F D C B A si è formata una circolazione  $\Gamma$  di senso orario. Il flusso diventa stazionario quando il punto B di fig.2 si è portato al bordo d'uscita T sul profilo, evitando ivi velocità teoricamente infinite (raggio locale di curvatura nullo), mentre il vortice antiorario distaccatosi dal "trailing-edge" si allontana all'infinito a valle.

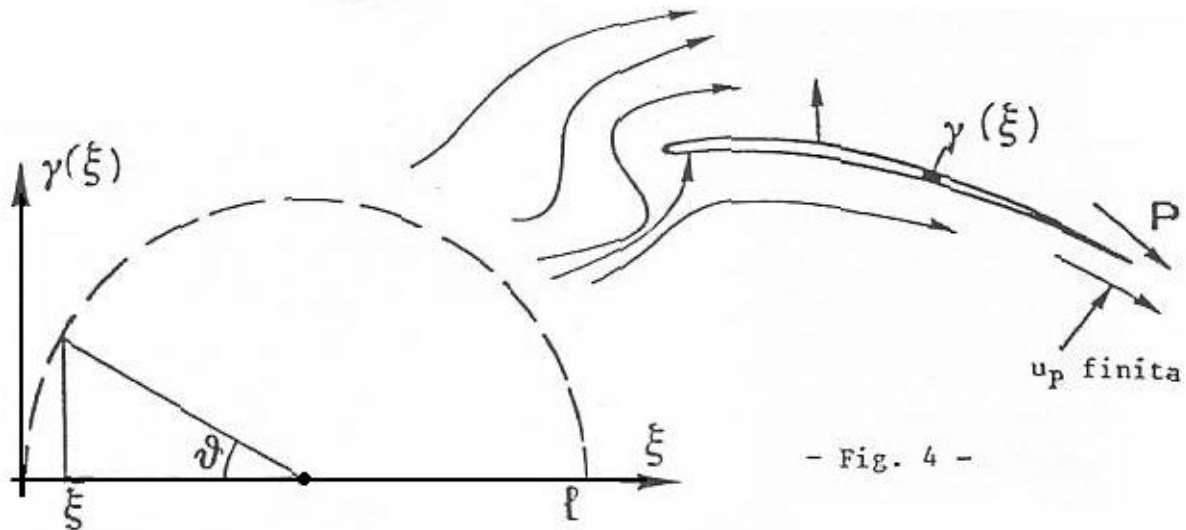
Ne risulta che la viscosità fa sì che la circolazione  $\Gamma$  attorno al profilo acquisti, per ogni assegnata incidenza,  $\alpha$ , della corrente, un ben determinato valore  $\Gamma(\alpha)$ : dal ragionamento fatto si evince la necessità che l'ala termini a punta, mentre il bordo d'attacco deve essere arrotondato, per evitare che anche qui si formi una velocità di aggiramento troppo elevata.

La condizione che sul bordo d'uscita risulti nulla o, almeno, finita, è detta "condizione di Kutta-Joukowski".

Concludiamo osservando che il comportamento del profilo alare in corrente viscosa può essere approssimato con il comportamento in corrente non viscosa, pur di tener conto della condizione di Kutta-Joukowski.

#### 4.4 Teoria di Galuert per il profilo sottile: sviluppo della vorticità $\gamma$ . Portanza e Momento

Lo sviluppo della vorticità proposto da Glauert tiene conto della condizione di Kutta-Joukowski, cosicché tale sviluppo deve dare zero al bordo d'uscita  $\xi = \ell$  (fig.4).



Al bordo d'entrata,  $\xi = 0$ , la velocità locale, e quindi la  $\gamma$ , è tanto più elevata quanto più piccolo è il raggio di curvatura del bordo d'entrata del profilo. La teoria di Glauert accetta ivi una  $\gamma$  infinita, confortata dal fatto che, per un profilo non estremamente sottile, tale picco resta finito. Glauert introduce una variabile ausiliaria  $\theta$  (fig.4) talchè:

$$\xi = \frac{\ell}{2}(1 - \cos \theta) \quad (4.17)$$

e:

$$d\xi = \frac{\ell}{2} \sin \theta d\theta \quad (4.18)$$

La vorticità  $\gamma$  viene così espressa in termini della variabile ausiliaria  $\theta$ :

$$\frac{\gamma(\theta)}{u_\infty} = a_0 \cotg \frac{\theta}{2} + \sum_1^\infty a_n \sin n\theta \quad (4.19)$$

Poiché:

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

dalla (4.17) risulta, per il primo termine dello sviluppo (4.19):

$$a_0 \cotg \frac{\theta}{2} = a_0 \left( \frac{\ell - \xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

Che dà il preannunciato picco della vorticità  $\gamma$  per  $\xi \rightarrow 0$ , mentre per  $\xi \rightarrow \ell$  la (4.19) dà vorticità nulla, come deve essere in base alla condizione di Kutta-Joukowski.

I coefficienti  $a_n$  della (4.19) vanno determinati in base alle condizioni al contorno: nel prossimo paragrafo vedremo come si valutano detti coefficienti. Osserviamo intanto che, al fine di determinare la portanza ed il momento forniti da un profilo, ci basta determinare  $a_0$ ,  $a_1$  ed  $a_2$ , mentre, ovviamente, tutti i coefficienti  $a_n$  sono necessari per ottenere la pressione locale su di un dato punto del profilo, come del resto già si vede dalla (4.15). Per la portanza abbiamo infatti dalle (4.16), (4.19), (4.17) e (4.18):

$$L = \rho u_\infty \int_0^\ell \gamma d\xi = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \ell \int_0^\pi \left( a_0 \cotg \frac{\theta}{2} + \sum_1^\infty a_n \sen n\theta \right) \sen \theta d\theta$$

ossia:

$$C_L = \sum_0^\infty a_n A_n \quad (4.21)$$

con:

$$A_0 = \int_0^\pi \cotg \frac{\theta}{2} \sen \theta d\theta \quad (4.22)$$

e:

$$A_n = \int_0^\pi \sen n\theta \sen \theta d\theta \quad n \geq 1 \quad (4.23)$$

Ma dalle:

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sen \theta}$$

e:

$$\sen n\theta \sen \theta = \frac{1}{2} \cos(n-1)\theta - \frac{1}{2} \cos(n+1)\theta$$

Risulta per le (4.22) e (4.23):

$$\begin{aligned} A_0 &= \pi \\ A_1 &= \frac{\pi}{2} \\ A_n &= 0 \quad \text{per } n > 1 \end{aligned}$$

La (4.21) porge quindi:

$$C_L = \pi \left( a_0 + \frac{a_1}{2} \right) \quad (4.24)$$



Valutiamo ora il momento delle forze rispetto al bordo d'attacco:

$$M_0 = \rho u_\infty \int_0^\ell \xi \gamma d\xi \quad (4.25)$$

dove  $\xi$  è proprio il braccio della forza elementare,  $\rho u_\infty \gamma d\xi$ .  
Introducendo nella (4.25) le (4.17), (4.18) e (4.19), si ottiene:

$$C_{m0} = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \ell^2} = \frac{1}{2} \sum_0^\infty a_n B_n \quad (4.26)$$

ove si ponga:

$$B_0 = \int_0^\pi \cotg \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.27)$$

$$B_n = \int_0^\pi \sin n\theta (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad n \geq 1 \quad (4.28)$$

Ma dalla:

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

la (4.27) porge:

$$B_0 = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (4.29)$$

mentre la (4.28) può essere posta nella forma:

$$B_n = A_n - C_n \quad (4.30)$$

dove la  $A_n$  è data dalla (4.23), mentre:

$$C_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin n\theta \sin 2\theta d\theta \quad n \geq 1 \quad (4.31)$$

Procedendo come per le  $A_n$  risulta dalle (4.31):

$$\begin{aligned} C_2 &= \pi/2 \\ C_n &= 0 \quad n \neq 2 \end{aligned}$$

e, infine, dalle (4.30):

$$B_1 = A_1 = \pi/2$$

$$B_2 = A_2 - C_2 = -\pi/4$$

con la conclusione che la (4.26) porge:

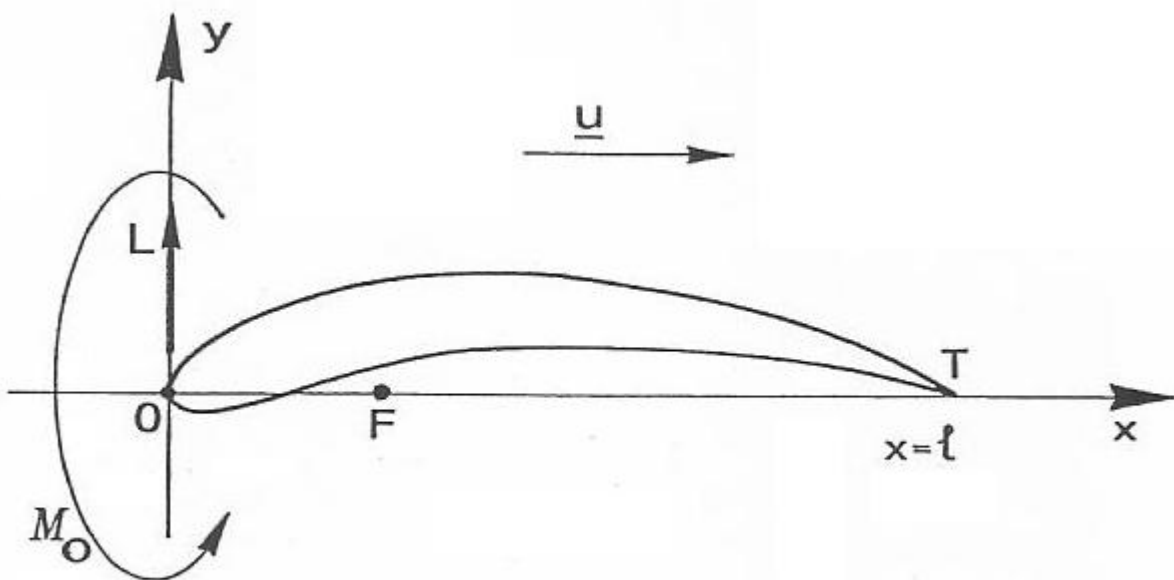
$$C_{m0} = \frac{\pi}{4} \left( a_0 + a_1 - \frac{1}{2} a_2 \right) \quad (4.32)$$

oppure, dalla (4.24):

$$C_{m0} = \frac{\pi}{8} (a_1 - a_2) + \frac{1}{4} C_L \quad (4.33)$$

Teniamo il presente paragrafo definendo il cosiddetto “fuoco del profilo”, F. A tale fine consideriamo (fig.5) un punto di ascissa:

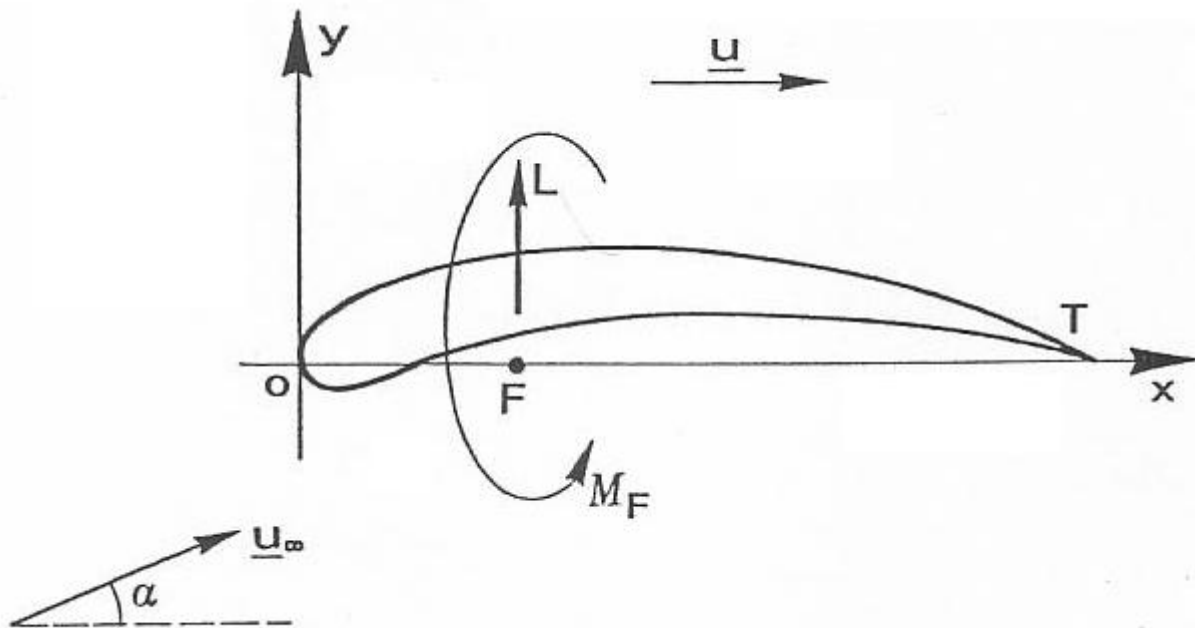
$$x_F = \ell/4 \quad (4.34)$$



- Fig. 5 -

La meccanica razionale insegna che il sistema di forze aerodinamiche che il profilo subisce è equivalente alla risultante L, applicata in O, più una coppia di momento  $M_0$ . Se chiamiamo  $M_F$  il momento risultante rispetto ad F, otteniamo l'equivalente sistema tracciato in fig.6. Dal confronto si ha:

$$M_F = M_0 - L \cdot x_F = M_0 - \frac{1}{4} \ell L \quad (4.35)$$



- Fig. 6 -

e, adimensionalizzando:

$$C_{mF} = C_{m0} - \frac{1}{4} C_L \quad (4.36)$$

ossia, dalla (4.33):

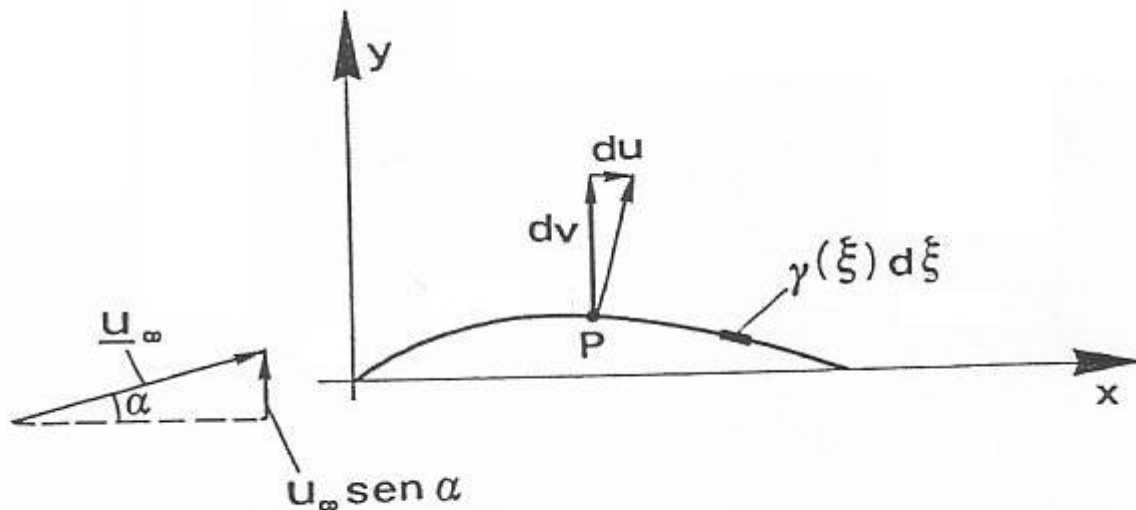
$$C_{mF} = \frac{\pi}{8} (a_1 - a_2) \quad (4.37)$$

Poiché, come vedremo nei prossimi paragrafi, solo il coefficiente  $a_0$  dello sviluppo (4.19) dipende dalla incidenza  $\alpha$  del profilo mentre tutti gli altri dipendono solo dalla forma del profilo, ne concludiamo che esiste un punto, detto “fuoco del profilo”, rispetto al quale il momento risultante è indipendente dall’angolo di incidenza.

## 4.5 I coefficienti di Glauert e la velocità indotta dal sistema vorticoso

Le condizioni al contorno che dobbiamo soddisfare impongono al flusso di lambire la superficie  $y(x)$  del profilo sottile (fig.7). Se  $u$  e  $v$  sono le componenti della velocità indotta dal sistema vorticoso  $\gamma(\xi)$ , dovremo avere, in ogni punto P del profilo:

$$\frac{v + u_\infty \sin \alpha}{u + u_\infty \cos \alpha} = \frac{dy}{dx} \quad (4.38)$$



- Fig. 7 -

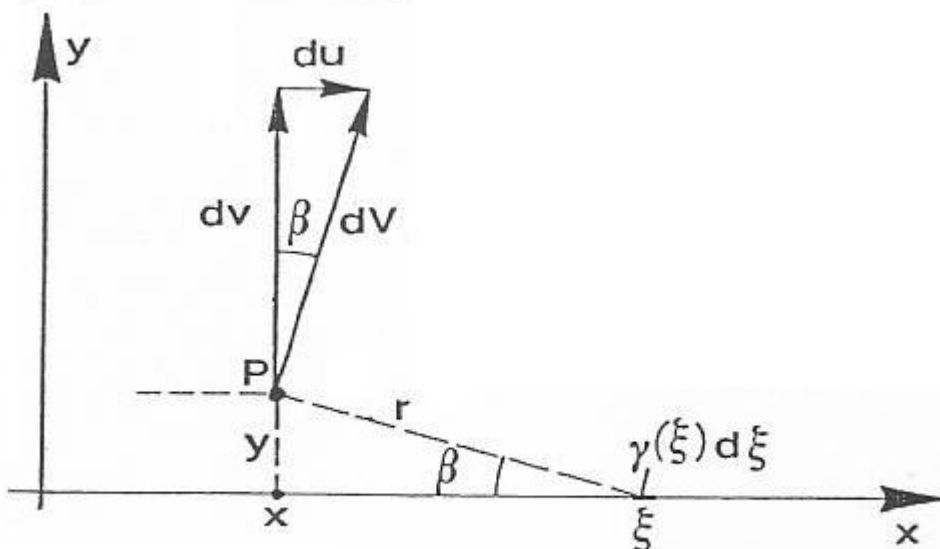
ma, nella ipotesi di piccole perturbazioni:

$$\begin{aligned}
 a \ll 1 & \quad \cos \alpha \approx 1 \\
 u \ll u_\infty & \quad \text{sen} \alpha \approx \alpha
 \end{aligned}$$

La (4.38) diventa allora, più semplicemente:

$$\frac{v}{u_\infty} + \alpha = \frac{dy}{dx} \tag{4.39}$$

Per valutare la componente verticale  $v$  della velocità indotta, consideriamo (fig.8) intanto la velocità indotta totale  $dV$  dalla quale valutare poi la componente verticale  $dv$ :



- Fig. 8 -

$$dV = \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi r} \quad (4.40)$$

con:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2} \quad (4.41)$$

Allora:

$$dv = dV \cos \beta \quad (4.42)$$

ma:

$$\cos \beta = \frac{\xi - x}{r} \quad (4.43)$$

Introduciamo la (4.40) e la (4.43) nella (4.42). Integrando su tutto lo strato vorticoso risulta:

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \gamma(\xi) \frac{(\xi - x) d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} \quad (4.44)$$

avendo tenuto conto della (4.41). Poiché il profilo è sottile a noi interessa la (4.44) per  $y$  tendente a zero, ma è bene fare prima alcune considerazioni poiché, per  $y = 0$ , l'integrando diventa singolare per  $\xi = x$ . Conviene allora spezzare l'integrale della (4.44) in tre integrali, il secondo dei quali comprende l'eventuale punto di singolarità  $\xi = x$ :

$$\int_0^\ell A d\xi = \int_0^{x-\varepsilon} A d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} A d\xi + \int_{x+\varepsilon}^\ell A d\xi \quad (4.45)$$

dove con il simbolo  $A$  è stato indicato l'integrando della (4.44).

Poiché, come vedremo subito, il secondo integrale a secondo membro è, comunque, dell'ordine di  $\varepsilon$ , possiamo, nel primo e nel terzo integrale della (4.45), porre, per un dato  $\varepsilon$ :

$$y \rightarrow 0$$

e la (4.44) diventa quindi:

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (4.46)$$

dove si è definito l'integrale "tagliato" nel modo seguente:

$$\int_0^\ell A d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon} A d\xi + \int_{x+\varepsilon}^\ell A d\xi \right\} \quad (4.47)$$

Segue la dimostrazione relativa all'assunzione che:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \gamma(\xi) \frac{(\xi - x) d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} = o(\varepsilon) \quad (4.48)$$

Introduciamo la variabile di integrazione:

$$\zeta = \xi - x \quad ; \quad d\xi = d\zeta$$

e:

$$\gamma(\xi) = \gamma(x + \zeta) = \gamma(x) + \zeta\gamma'(x) + \dots$$

L'integrale della (4.48) diventa:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma(x + \zeta) \frac{\zeta d\zeta}{\zeta^2 + y^2} = \gamma(x) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta^2 + y^2} + \gamma'(x) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta^2 + y^2} + \dots \quad (4.49)$$

avendo trascurato termini più piccoli. Ma:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta^2 + y^2} = \frac{1}{2} [\ln(\zeta^2 + y^2)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (4.50)$$

mentre:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\zeta^2 + y^2} < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\zeta^2 + 0} = 2\varepsilon \quad (4.51)$$

La (4.50) e la (4.51), inserite nella (4.49), dimostrano la validità della (4.48) e, quindi, della (4.46). Per valutare la velocità indotta basterà allora introdurre nella (4.46) lo sviluppo proposto da Glauert, dato dalla (4.19) con le posizioni (4.17) e (4.18), oltre alla:

$$x = \frac{\ell}{2}(1 - \cos \phi) \quad (4.52)$$

cosicché la variabile  $\phi$  fissa la posizione  $x$  ove intendiamo valutare la velocità indotta dal sistema vorticoso  $\gamma(\theta)$ . Dalla (4.46) si ha quindi:

$$2\pi \frac{v}{u_{\infty}} = -a_0 \int_0^{\pi} \frac{\cotg \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \phi} - \sum_1^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \phi} \quad (4.53)$$

Ma da note formule di trigonometria:

$$\cotg \frac{\theta}{2} \sin \theta = 1 + \cos \theta \quad (4.54)$$

nonché:

$$\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} \cos(n-1)\theta - \frac{1}{2} \cos(n+1)\theta \quad (4.55)$$

Introducendo le (4.54), (4.55) nella (4.53) si vede che vi appaiono integrali del tipo:

$$I_n = \oint_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \quad (4.56)$$

e la (4.53) diventa:

$$2\pi \frac{v}{u_\infty} = -a_0(I_0 + I_1) + \sum_1^\infty a_n \frac{I_{n+1} - I_{n-1}}{2} \quad (4.57)$$

Poiché, come vedremo nel prossimo paragrafo, gli integrali della (4.56), detti integrali di Glauert, valgono:

$$I_n = \pi \frac{\text{sen } n\phi}{\text{sen } \phi} \quad (4.58)$$

e, in particolare:

$$I_0 = 0 \quad ; \quad I_1 = \pi \quad (4.59)$$

La (4.57), introdotte le (4.58), (4.59), diventa:

$$2 \frac{v}{u_\infty} = -a_0 + \sum_1^\infty a_n \frac{\text{sen}(n+1)\phi - \text{sen}(n-1)\phi}{2\text{sen } \phi}$$

ossia:

$$\frac{v}{u_\infty} = -\frac{1}{2} \sum_1^\infty a_n \cos n\phi \quad (4.60)$$

La condizione al contorno (4.39) è quindi, tenuto conto della (4.60):

$$\left(\alpha - \frac{a_0}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty a_n \cos n\phi = \frac{dy}{dx} \quad (4.61)$$

Basterà quindi sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione “pendenza locale del profilo” per ottenere i coefficienti  $a_n$ , nonché, in base alle (4.24) e (4.37), i coefficienti di portanza e momento aerodinamico di un assegnato profilo.

## 4.6 Gli integrali di Glauert

Il presente paragrafo è solo una appendice matematica, utile ma non necessaria per la comprensione del problema che stiamo trattando. Può tuttavia essere utile a chi, in una ricerca, si trovasse di fronte a problemi di integrali singolari. Valutiamo innanzi tutto:

$$I_0 = \oint_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \quad (4.62)$$

mediante la nuova variabile di integrazione:

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \rightarrow \cos \theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

ponendo in coerenza:

$$\zeta = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \rightarrow \cos \phi = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{arctg} z \\ d\theta &= \frac{2 dz}{1+z^2} \end{aligned}$$

Con alcuni semplici passaggi la (4.62) sarà espressa mediante  $z$  e  $\zeta$ :

$$I_0 = (1-\zeta^2) \int_0^{\zeta-\varepsilon} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} \quad (4.63)$$

dove (vedi la definizione (4.47)):

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} = \int_0^{\zeta-\varepsilon} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} \quad (4.64)$$

Ma:

$$\frac{1}{\zeta^2 - z^2} = \frac{1}{2\zeta} \left\{ \frac{1}{\zeta + z} + \frac{1}{\zeta - z} \right\}$$

e, quindi:

$$\int_0^{\zeta-\varepsilon} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} = \frac{1}{2\zeta} \left[ \ln \left| \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right| \right]_0^{\zeta-\varepsilon} = \frac{1}{2\zeta} \ln \frac{2\zeta - \varepsilon}{\varepsilon} \quad (4.65)$$

Analogamente:

$$\int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} = \frac{1}{2\zeta} \left[ \ln \left| \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right| \right]_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} = -\frac{1}{2\zeta} \ln \frac{2\zeta + \varepsilon}{\varepsilon} \quad (4.66)$$

Le (4.65) e (4.66), poste nella (4.64) e nella (4.63), porgono:



$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\zeta^2 - z^2} = \frac{1}{2\zeta} \ln \frac{2\zeta - \varepsilon}{2\zeta + \varepsilon} \rightarrow 0 \quad (\text{per } \varepsilon \rightarrow 0)$$

e, quindi:

$$I_0 = 0$$

come preannunciato nelle (4.58), (4.59).  
Inoltre per l'integrale  $I_1$  si ha dalla (4.56):

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\cos \theta - \cos \phi} = \int_0^{\pi} \frac{(\cos \theta - \cos \phi) + \cos \phi}{\cos \theta - \cos \phi} \, d\theta$$

ossia,

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{\cos \theta - \cos \phi} \, d\theta + \cos \phi \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \phi} = \pi + I_0 \cos \phi = \pi$$

Per l'integrale  $I_2$ , analogamente:

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta - \cos 2\phi}{\cos \theta - \cos \phi} \, d\theta + I_0 \cos 2\phi$$

ossia, essendo  $I_0 = 0$ :

$$I_2 = 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \phi}{\cos \theta - \cos \phi} \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} (\cos \theta + \cos \phi) \, d\theta = 2\pi \cos \phi$$

e, infine:

$$I_2 = \pi \frac{\sin 2\phi}{\sin \phi} \tag{4.67}$$

che è la (4.58) per  $n = 2$ .

Per dimostrare che la (4.58), oltre che per  $n = 0$ ,  $n = 1$  ed  $n = 2$ , vale anche per qualsiasi  $n > 2$ , useremo un "metodo induttivo": faremo cioè vedere che, se la (4.58) vale fino ad un certo indice  $n$ , essa vale anche per l'indice  $(n + 1)$ .

Infatti dalla ovvia:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta = 2 \cos n\theta (\cos \theta - \cos \phi) + 2 \cos \phi \cos n\theta$$

dividendo per  $(\cos \theta - \cos \phi)$  ed integrando termine a termine, si ha:

$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2 \int_0^{\pi} \cos n\theta \, d\theta + 2 \cos \phi \cdot I_n$$

Ne consegue la formula ricorrente:

$$I_{n+1} = 2 I_n \cos \phi - I_{n-1} \quad (4.68)$$

e, ammettendo che fino all'indice  $n$  valga la (4.58):

$$I_{n+1} = 2\pi \frac{\text{sen } n\phi}{\text{sen } \phi} \cos \phi - \pi \frac{\text{sen}(n-1)\phi}{\text{sen } \phi}$$

da cui, con un po' di algebra:

$$I_{n+1} = \pi \frac{\text{sen}(n+1)\phi}{\text{sen } \phi} \quad (4.69)$$

che è proprio la (4.58) scritta per l'indice  $(n + 1)$ : dunque essa è valida per ogni  $n$  se lo è per  $\underline{n = 0}$  ed  $\underline{n = 1}$ , come si vede applicando iterativamente le (4.68) e (4.58) a partire dalla (4.59), ottenendo ogni volta la (4.69), ossia la (4.58) per l'indice successivo.

## 4.7 Determinazione dei coefficienti dello sviluppo della vorticità

Al detto scopo, riprendiamo lo sviluppo di Fourier (4.61) che è derivato dalla applicazione delle condizioni al contorno (4.39), tenuto conto della (4.60).

Se allora nella (4.61) moltiplichiamo ambo i membri per:

$$\cos k\phi \, d\phi$$

Ed integriamo, si ha:

$$\left( \alpha - \frac{a_0}{2} \right) \int_0^\pi \cos k\phi \, d\phi + \frac{1}{2} \sum_1^\infty a_n \int_0^\pi \cos n\phi \cos k\phi \, d\phi = \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos k\phi \, d\phi \quad (4.70)$$

da cui, per  $k = 0$ :

$$a_0 = 2\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \, d\phi \quad (4.71)$$

Per  $k \geq 1$  osserviamo che:

$$\cos n\phi + \cos k\phi = \frac{1}{2} \cos(n-k)\phi + \frac{1}{2} \cos(n+k)\phi$$

cosicché il secondo integrale che figura nella (4.70) è diverso da zero solo per  $n = k$ . Avremo:

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos k\phi \, d\phi \quad (k \geq 1) \quad (4.72)$$

Le (4.71) e (4.72) forniscono i coefficienti dello sviluppo di Glauert della vorticità (4.19), in funzione della forma del profilo della linea media dell'ala,  $y(x)$ ; riassumendo il procedimento, abbiamo:

- a) posto lo sviluppo (4.19) per la  $\gamma(\xi)$ ;
- b) ricavata la velocità verticale  $v(x)$  prodotta, (4.60) dalla  $\gamma(\xi)$ ;
- c) applicate le condizioni al contorno (4.39) ottenendone lo sviluppo (4.61);
- d) trovato le  $a_k$ , mediante semplici quadrature, (4.71), (4.72), in funzione della  $y(x)$  dell'ala.

#### 4.10 Determinazione dei coefficienti di portanza e momento per un assegnato profilo d'ala, $y(x)$

Avendo ora a disposizione le (4.71) e (4.72), possiamo inserirle nella (4.24):

$$C_L = \pi \left( a_0 + \frac{a_1}{2} \right) = 2\pi\alpha - 2 \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos\phi) d\phi \quad (4.73)$$

Se poi definiamo:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos\phi) d\phi \quad (4.74)$$

la (4.73) diventa semplicemente:

$$C_L = 2\pi (\alpha + \alpha_0) \quad (4.75)$$

La (4.75) ci dice che la portanza è funzione lineare dell'incidenza, cosa ben verificata dall'esperienza, per incidenze non troppo alte; esiste inoltre una "incidenza di portanza nulla":

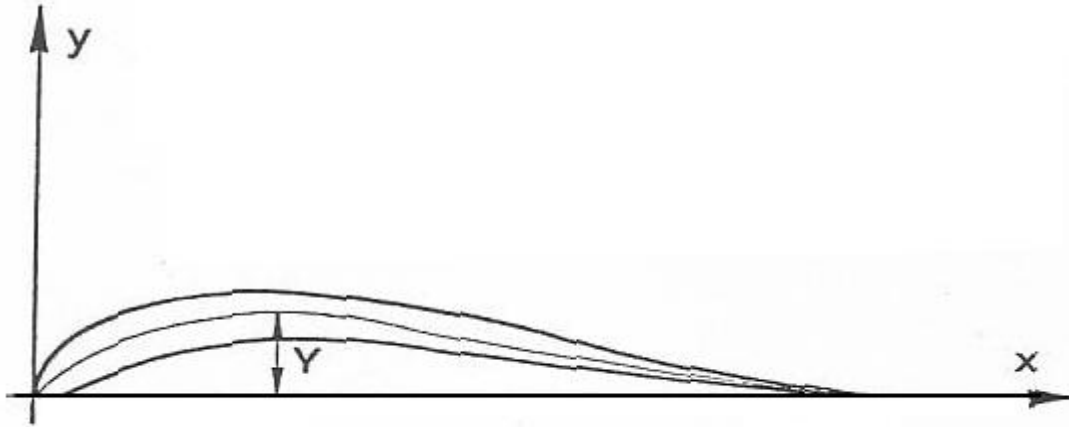
$$\alpha = -\alpha_0$$

tanto maggiore quanto più è curvo il profilo: essa è invece nulla per un profilo simmetrico, per il quale  $\frac{dy}{dx} = 0$ ; la (4.74) dà infatti  $\alpha_0 = 0$ .

Al fine di avere un più comodo procedimento di calcolo della  $\alpha_0$ , eseguiamo nella (4.74) una integrazione per parti. Poniamo intanto:

$$y(x) = Y f(\phi) \quad (4.76)$$

Dove  $Y$  è la "freccia" del profilo, (fig.9), ossia la ordinata massima, mentre la  $f(\phi)$  ne caratterizza la forma.



- Fig. 9 -

Naturalmente dalla (4.52), che lega la  $x$  alla variabile ausiliaria  $\phi$ , si ha per la (4.76):

$$\frac{dy}{dx} = Y \frac{df}{d\phi} / \frac{dx}{d\phi}$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Y}{\ell} \frac{f'(\phi)}{\text{sen}\phi} \quad (4.77)$$

Inseriamo la (4.77) nella (4.74):

$$\alpha_0 = -\frac{2Y}{\pi \ell} \int_0^\pi \left( \text{tg} \frac{\phi}{2} \right) f'(\phi) d\phi \quad (4.78)$$

dove, come è ben noto:

$$\text{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos\phi}{\text{sen}\phi}$$

Dalla (4.78) si ha, integrando per parti:

$$\int_0^\pi \left( \text{tg} \frac{\phi}{2} \right) f'(\phi) d\phi = \left[ \text{tg} \frac{\phi}{2} f(\phi) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{f(\phi) d\phi}{1 + \cos\phi} \quad (4.79)$$

Ma:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \left( \text{tg} \frac{\phi}{2} \right) f(\phi) = 0 \quad (4.80)$$

Infatti:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{f(\phi)}{\cos \frac{\phi}{2}} = \lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{f'(\phi)}{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}}$$

mentre:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} f'(\phi) = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=\ell} \cdot \lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{dx}{d\phi}$$

e, infine, dalla (4.52):

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{dx}{d\phi} = \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \pi = 0$$

Tenendo conto della (4.80), allora, la (4.79), posta nella (4.78), dà:

$$\alpha_0 = \frac{2Y}{\pi \ell} \int_0^\pi \frac{f(\phi) d\phi}{1 + \cos \phi} \quad (4.81)$$

In modo del tutto simile si può calcolare, dalla (4.37) il momento focale:

$$\begin{aligned} C_{mF} &= \frac{\pi}{8} (a_1 - a_2) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (\cos \phi - \cos 2\phi) d\phi = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos \phi) d\phi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \\ &= \frac{\pi}{2} \alpha_0 + \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi \end{aligned}$$

avendo introdotto la (4.74). Dalla (4.52), dalla (4.76) e dalla (4.77) avremo infine:

$$C_{mF} = \frac{\pi}{2} \alpha_0 - 2 \frac{Y}{\ell} \int_0^\pi f(\phi) \cos \phi d\phi \quad (4.82)$$

dove  $\alpha_0$  è dato dalla (4.81).

Se, ad esempio:

$$f(\phi) = \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{x(\ell - x)}{\ell^2/4} \quad (4.83)$$

nel qual caso la linea media del profilo è un semplice arco di parabola, risulta:

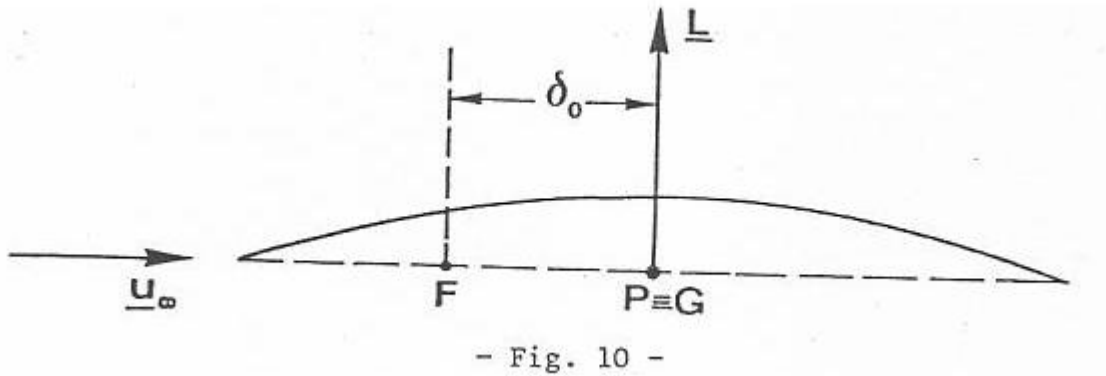
$$\alpha_0 = 2 \frac{Y}{\ell} \quad (4.84)$$

e:

$$C_{mF} = \pi \frac{Y}{\ell} \quad (4.85)$$

Le (4.84), (4.85) ci permettono di valutare la posizione del centro P di spinta, concetto importante poiché in condizioni stazionarie la risultante delle forze deve passare per il baricentro G. Nel semplice caso esposto come esempio si ha (fig.10):

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{C_{mF}}{C_L} = \frac{\pi Y/\ell}{2\pi\left(\alpha + 2\frac{Y}{\ell}\right)} = \frac{Y/\ell}{2\alpha + 4Y/\ell} \quad (4.86)$$



Se, ad esempio, l'ala vola ad incidenza nulla ( $\alpha = 0$ ), risulta:

$$\frac{\delta_0}{\ell} = 0,25 \quad (4.87)$$

Supponendo che questo sia il volo di regime, il baricentro G dovrà trovarsi al 50% della corda del profilo (fig.10), per poter ottenere l'equilibrio dei momenti attorno al baricentro.

È bene però ricordare che la sola ala dà un equilibrio instabile: tale instabilità intrinseca dell'ala viene perciò eliminata dalla presenza dei piani di coda dell'aeroplano. Se infatti per cause occasionali la incidenza  $\alpha$  aumenta rispetto al valore di regime (supposto nullo nell'esempio di figura 10), mentre  $C_{mF}$  resta costante, il coefficiente di portanza,  $C_L$ , aumenta, facendo quindi diminuire la distanza  $\delta$  tra il centro di pressione P ed il fuoco.

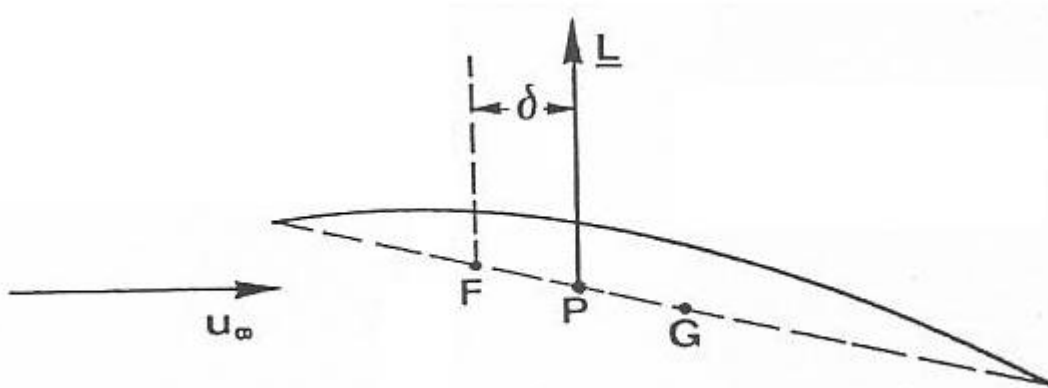
Se, ad esempio, consideriamo il caso in cui  $\alpha$  aumenti fino al valore (fig.11):

$$\alpha = 2Y/\ell$$

dalla (4.86) si ha:

$$\frac{\delta}{\ell} = 0,125 \quad (4.88)$$

ed il punto P, centro di pressione, si sposta in avanti, cosicchè la portanza dà ora un momento cabrante rispetto al baricentro G, che tende a far aumentare ulteriormente l'angolo  $\alpha$  e, con esso, l'intero assetto dell'ala.



- Fig. 11 -

Con altre parole, se  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  sono due assetti ed il primo è quello di regime, cosicchè  $L_1$ , portanza ad incidenza  $\alpha_1$ , passa per il baricentro (fig.12), risulta per le distanze,  $\delta$ , di applicazione delle risultanti aerodinamiche dal fuoco F:

$$M_F = \text{cost.} = L_1 \delta_1 = L_2 \delta_2 \quad (4.89)$$

poiché per:

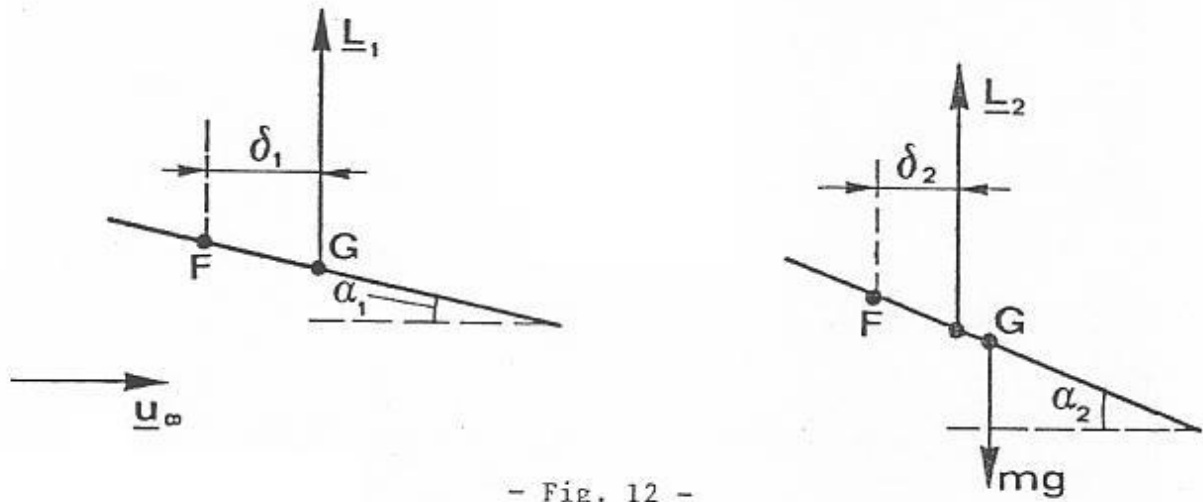
$$\alpha_2 > \alpha_1$$

risulta:

$$L_2 > L_1$$

si avrà anche, dalla (4.89):

$$\delta_2 < \delta_1$$

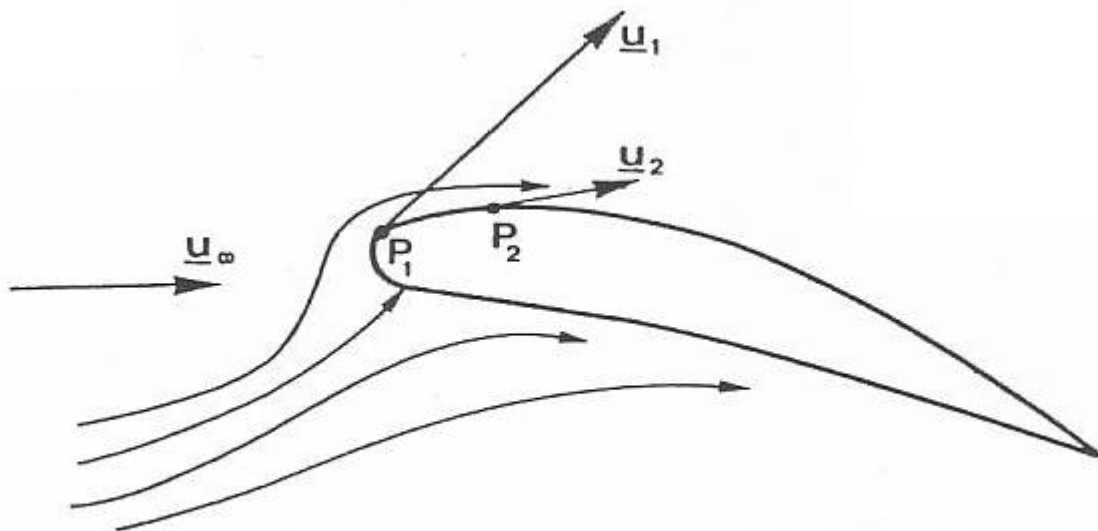


- Fig. 12 -

#### 4.9 Portanza di progetto ed angolo ideale di attacco

Chiamiamo incidenza ideale di attacco,  $\alpha_i$ , quel valore della incidenza che rende nullo  $a_0$  e, con esso, il primo termine dello sviluppo (4.19) della vorticit   $\gamma(\theta)$  proposto dal Glauert.

Dal punto di vista fisico c'  da ricordare che tale termine (4.20) d  un picco di velocit  in prossimit  del bordo d'attacco, tanto pi  elevato quanto pi  piccolo   il locale raggio di curvatura, cosicch  subito a valle del bordo d'attacco, ove la velocit   $u_2$  riacquista valori non eccessivamente alti (fig.13), si ha ivi (basti pensare al teorema di Bernoulli) una brusca risalita di pressione, che tende a distaccare lo strato limite, peggiorando sensibilmente il comportamento aerodinamico dell'ala.



- Fig. 13 -



Al fine di valutare questa “incidenza ideale”  $\alpha_i$  basterà porre uguale a zero la espressione analitica di  $a_0$ , data dalla (4.71); se ne ricava quindi che il primo termine (cattivo) della serie di Glauert svanisce se:

$$\alpha = \alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\phi \quad (4.90)$$

Il corrispondente valore del coefficiente di portanza di progetto,  $C_{Li}$ , è dato dalla (4.24), o dalla (4.73), ove si ponga  $a_0 = 0$ :

$$C_{Li} = \frac{\pi}{2} a_1 = 2 \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos\phi d\phi \quad (4.91)$$

Introducendo, nelle (4.90) e (4.91), le (4.76) e (4.77) ed integrando per parti, risulta:

$$\alpha_i = \frac{2}{\pi} \frac{Y}{\ell} \int_0^\pi \frac{f(\phi) \cos\phi}{\sin^2\phi} d\phi \quad (4.92)$$

e:

$$C_{Li} = 4 \frac{Y}{\ell} \int_0^\pi \frac{f(\phi) d\phi}{\sin^2\phi} \quad (4.93)$$

Nel semplice caso (4.83) di linea media del profilo a forma parabolica (o, date le approssimazioni, a forma di arco di cerchio), risulta:

$$\alpha_i = 0$$

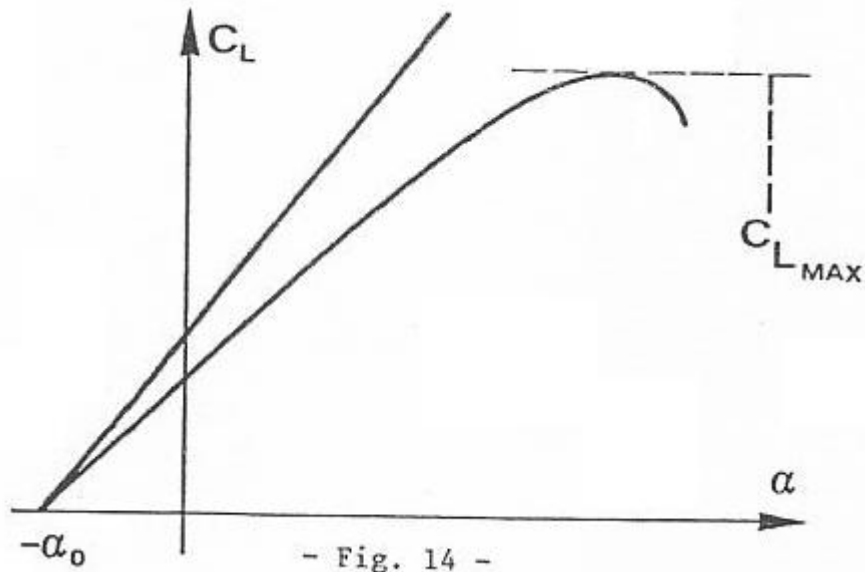
$$C_{Li} = 4 \pi \frac{Y}{\ell} \rightarrow 2 \pi \alpha_0$$

Terminiamo osservando (fig.14) che i risultati sperimentali sul  $C_L$  concordano abbastanza bene fino a valori di  $C_L \approx 1,2 \sim 1,5$ ; il coefficiente teorico  $2\pi$  della  $C_L = 2\pi (\alpha + \alpha_0)$  diventa in pratica:

$$C_L = A_\infty (\alpha + \alpha_0)$$

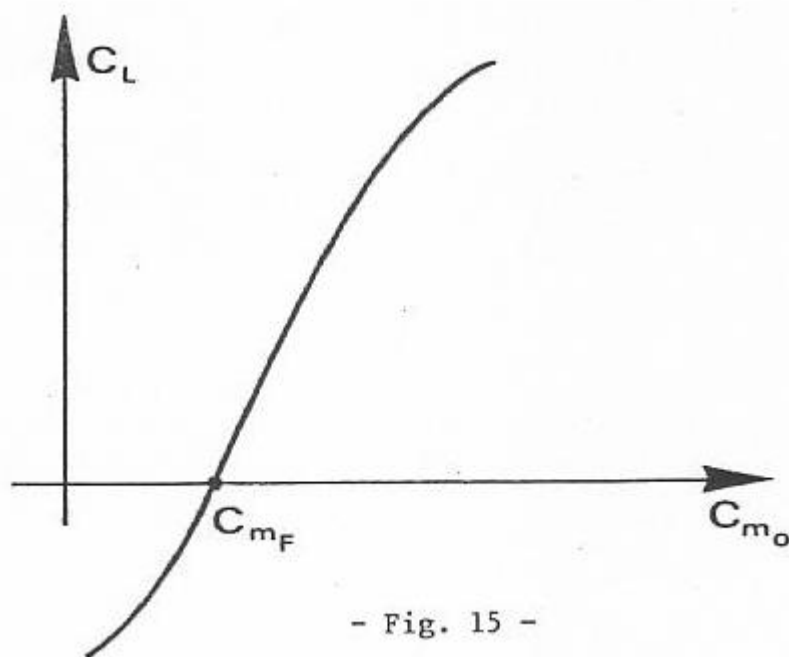
dove:

$$A_\infty \sim 5,7 \sim 5,8$$



Ad alte incidenze ( $\alpha > 15^\circ$ ) interviene il distacco della vena con caduta della portanza. Se poi tracciamo il coefficiente di momento  $C_{m0}$  in funzione del coefficiente di portanza, avremo (fig.15):

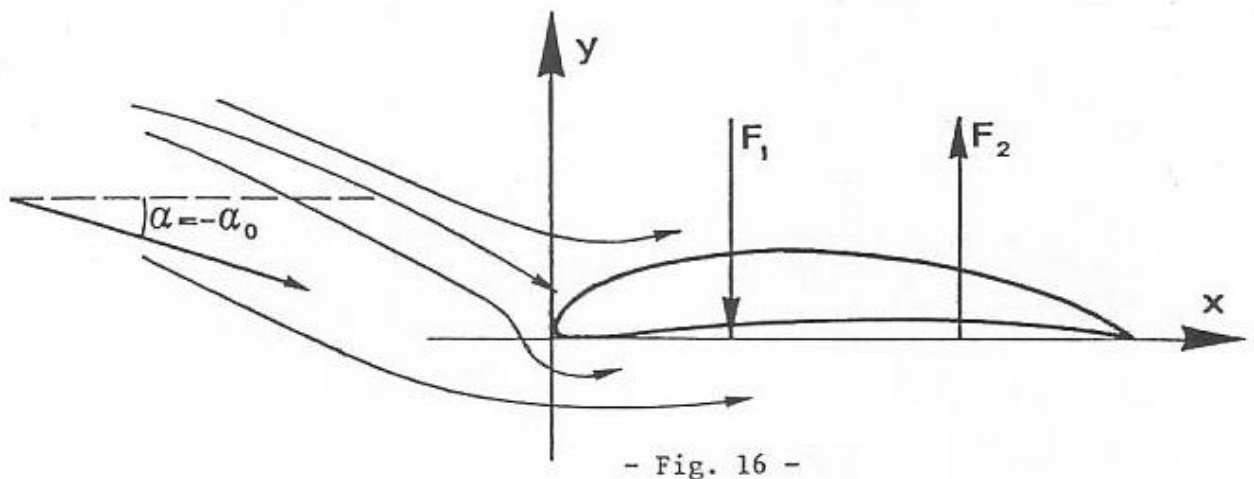
$$C_{m0} = C_{mF} + \frac{C_L}{4}$$



È da notare che, per  $C_L = 0$ , ossia ad incidenza negativa:

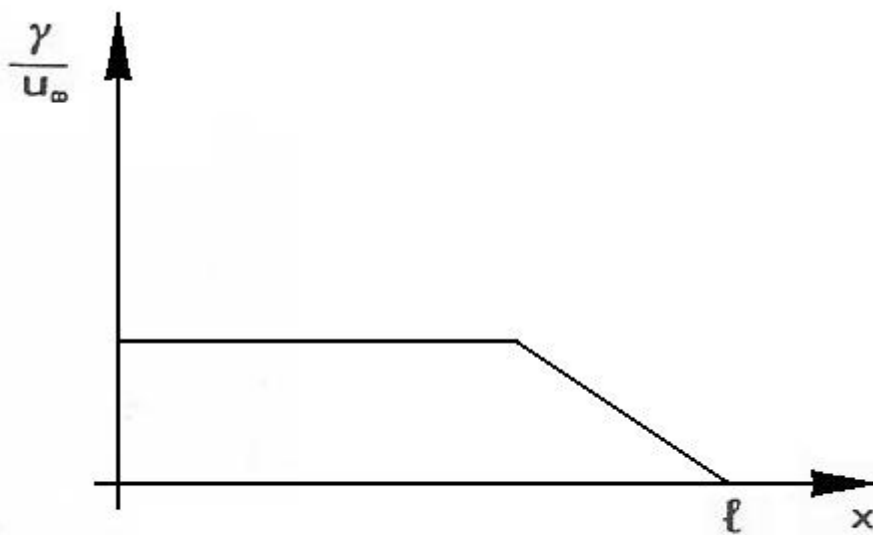
$$\alpha = -\alpha_0$$

il punto di ristagno si sposta sul dorso del profilo (fig. 16) dando luogo ad una portanza negativa sulla parte anteriore del profilo, compensata, per  $\alpha = -\alpha_0$ , dalla portanza positiva sulla parte posteriore del profilo: benché la portanza totale sia nulla, quindi, ne risulta un momento diverso da zero.



#### 4.10 Calcolo della linea media di un profilo per assegnato diagramma di carico

Si tratta del così detto “problema inverso”: trovare la linea media e la incidenza,  $\alpha_i$ , di progetto di un profilo che abbia un assegnato diagramma di carico. Tale problema è particolarmente sentito in sede di progetto, se vogliamo evitare i “picchi” locali di velocità e, quindi, di pressione. Ci può interessare, in particolare, realizzare un diagramma di carico del tipo descritto in fig. 17, nel quale sia assente qualunque gradiente di velocità lungo la parte anteriore dell’ala.



È chiaro che, mancando ora qualsiasi picco sul diagramma di carico, la incidenza di lavoro che troveremo sarà proprio la  $\alpha = \alpha_i$ . Trovato il profilo  $y(x)$ , per studiarne il comportamento ad altre incidenze occorrerà aggiungere alla  $\gamma(x)$  assegnata un termine del tipo:

$$a_0 \cotg \frac{\theta}{2} \tag{4.94}$$

dove, in base alla (4.71), tenuto conto della (4.90) che dà la  $\alpha_i$ , si ha:

$$a_0 = 2(\alpha - \alpha_i) \quad (4.95)$$

Per risolvere il problema propostoci ricordiamo intanto che la velocità verticale indotta dal sistema vorticoso è data dalla (4.46), cioè:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (4.96)$$

o, se si vuole introdurre le variabili ausiliarie (4.17), (4.18), (4.52)  $\theta$  e  $\phi$ :

$$v(\phi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin\theta d\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \quad (4.97)$$

Dalla condizione al contorno (4.39) si ha poi:

$$y(x) = \int_0^x \frac{v}{u_\infty} dx + \alpha_i x \quad (4.98)$$

tralasciando qui di puntualizzare di nuovo le difficoltà connesse con l'integrando che figura nella (4.96), o nella (4.97), singolare per  $\theta = \phi$ .

Nella (4.98) non abbiamo ancora il valore della  $\alpha_i$ , ne' siamo ancora in grado di calcolarla mediante la (4.90) o la (4.92). Osserviamo però che la (4.98) deve dare:

$$y(\ell) = 0 \quad (4.99)$$

Ponendo allora  $x = \ell$  nella (4.98), avremo, tenuto conto della (4.99):

$$0 = \alpha_i \ell + \int_0^\ell \frac{v}{u_\infty} dx \quad (4.100)$$

d'onde il valore  $\alpha_i$  che, introdotto nella (4.98), risolve il problema.

Quanto alla corrispondente "portanza di progetto" abbiamo:

$$L_i = Mg = \rho u_\infty \int_0^\ell \gamma(\xi) d\xi$$

da cui:

$$C_{Li} = 2 \int_0^\ell \frac{\gamma(\xi) d\xi}{u_\infty \ell} \quad (4.101)$$

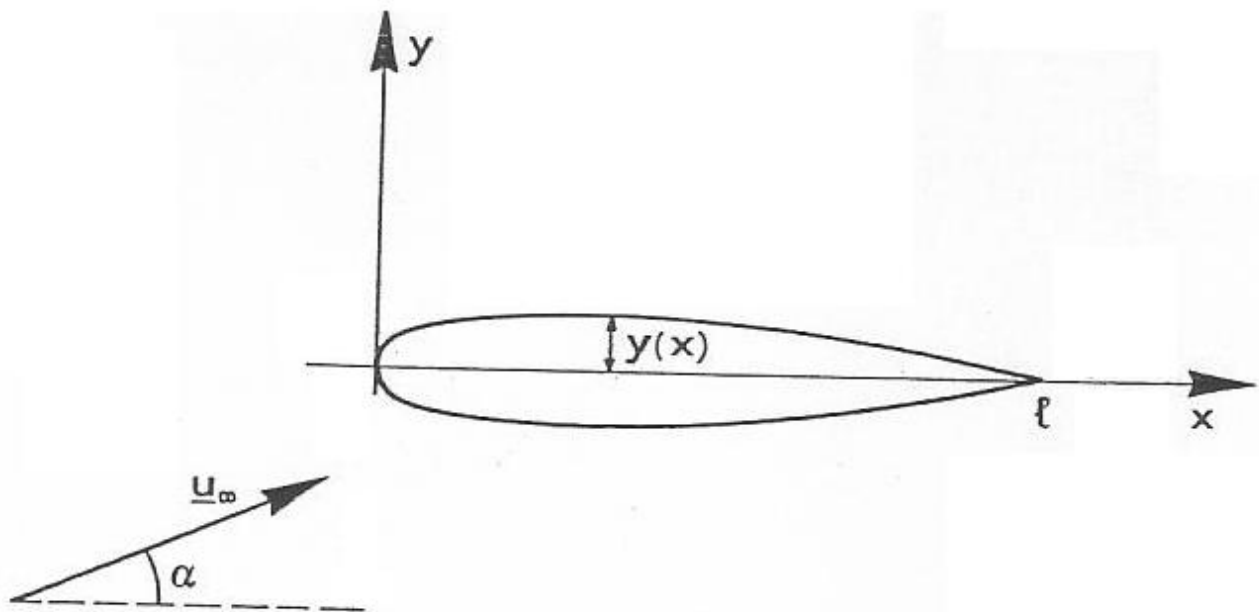
## 4.11 Il problema dello spessore

Ci proponiamo ora lo studio di un'ala sottile con spessore. Tale studio verrà affrontato in tre successivi stadi:

- A) profilo simmetrico ad incidenza nulla;
- B) profilo simmetrico ad incidenza  $\alpha \neq 0$  (fig.18);
- C) profilo, a linea media curva, con spessore.

Il profilo dell'ala sarà definito mediante una funzione,  $y(x)$ , che rappresenta ora il semispessore per ogni ascissa:

$$0 \leq x \leq \ell$$



- Fig. 18 -

Il comportamento dell'ala ad incidenza nulla sarà simulato mediante una opportuna distribuzione di sorgenti, di densità  $\mu(\xi)$ , cosicché la:

$$\mu(\xi)d\xi$$

rappresenti l'intensità totale delle sorgenti distribuite tra  $\xi$  e  $(\xi + d\xi)$ . Al fine di poter dedurre le componenti,  $u$  e  $v$  della velocità prodotta da detta distribuzione di sorgenti, riportiamo qui le relazioni introdotte nel Cap. III:

$$u_r = \frac{m}{r} \quad (4.102)$$

e:

$$Q = 2 \pi m \quad (4.103)$$

valevoli per sorgente concentrata di intensità  $m$ .

Per più sorgenti la (4.103) diventa:

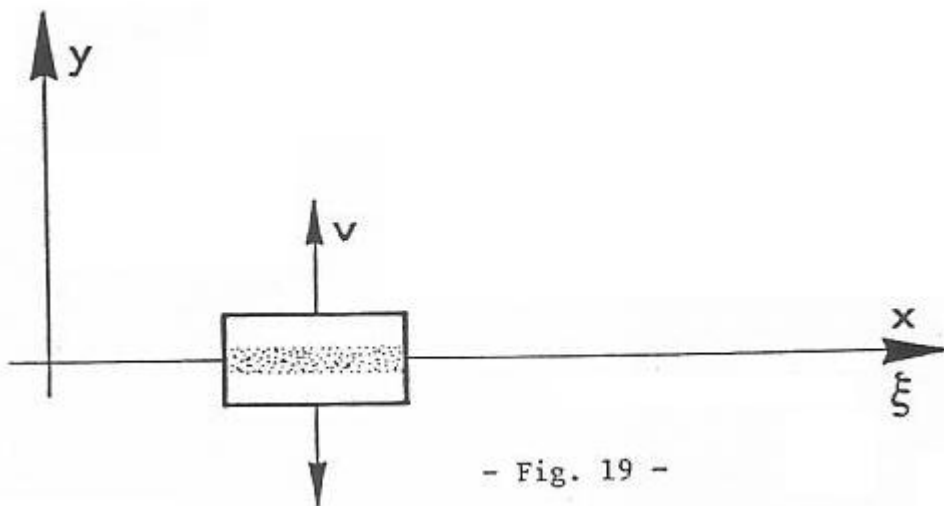
$$Q = 2 \pi \sum_1^N m_n$$

e, per un gruppo di sorgenti distribuite lungo l'asse x, su un tratto dξ:

$$dQ = 2 \pi \mu(\xi) d\xi \quad (4.104)$$

D'altra parte (fig.19), considerando un tratto sottile d'ala, da simulare con le dette sorgenti distribuite, avremo:

$$dQ = 2 v d\xi \quad (4.105)$$



La (4.105) è proprio la definizione di flusso uscente, avendo trascurato i due lati verticali della figura, poiché si tratta di profili sottili. Dalle (4.105) e (4.104):

$$v(x) = \pi \mu(x) \quad (4.106)$$

Ricordando infine le condizioni al contorno (4.39):

$$\frac{v}{u_\infty} + \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (4.107)$$

e sostituendo nella (4.106) per  $\underline{\alpha = 0}$ , si ha:

$$\mu(x) = \frac{u_\infty}{\pi} \frac{dy}{dx} \quad (4.108)$$

che risolve il problema della valutazione dell'intensità della distribuzione di sorgenti, per un dato profilo  $y(x)$ , come in fig.18.

Occasionalmente osserviamo che dalla (4.108) consegue:

$$\int_0^l \mu(x) dx = 0$$

coerentemente con quanto asserito nel Cap. III, e già richiamato più volte.

## 4.12 Profilo simmetrico ad incidenza

Osserviamo intanto che per un profilo estremamente sottile il problema è stato già risolto al paragrafo 6 con il metodo di Glauert: nel caso attuale infatti si ha per la linea media:

$$y(x) = 0$$

e la (4.71) dà allora:

$$a_0 = 2\alpha \quad (4.109)$$

mentre dalla (4.72):

$$a_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

La soluzione consiste quindi nel sovrapporre alla distribuzione (4.108) delle sorgenti (dove la  $y(x)$  è ora il semispessore del profilo), una distribuzione di vortici  $\gamma(\xi)$  data dalla (4.19) che, tenuto conto della (4.109), diventa:

$$\gamma(\xi) = 2u_\infty \alpha \left( \frac{l-\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.110)$$

Se desideriamo però studiare un profilo sottile ma non estremamente sottile, in modo da evitare il picco infinito che la (4.110) dà per  $\xi \rightarrow 0$ , converrà applicare le condizioni al contorno tenendo conto delle velocità  $v_\mu$  prodotte dalle sorgenti e delle  $v_\gamma$  prodotte dalla ancora incognita distribuzione vorticoso  $\gamma(\xi)$ . Avremo allora per la (4.39):

$$\frac{v_\mu}{u_\infty} + \frac{v_\gamma}{u_\infty} + \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (4.111)$$

Dove la  $y(x)$  è il semispessore locale del profilo. Ma, in base alle (4.106) e (4.108), la (4.111) diventa:

$$\frac{v_\gamma}{u_\infty} + \alpha = 0 \quad (4.112)$$

ossia, ricordando la (4.44) che dà la  $v(x)$  in funzione della vorticità  $\gamma$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{\gamma(\xi)}{u_\infty} \frac{(\xi-x)d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2} + \alpha = 0 \quad (4.113)$$

dove ora non vogliamo più porre  $y(x) \approx 0$ ; avremmo altrimenti la soluzione, che non ci interessa, data dalla (4.110). per risolvere la (4.113) possiamo allora (fig.20) proporci, per la  $\gamma(\xi)$ , un diagramma lineare a tratti, tra i punti, convenientemente scelti,  $\xi_0 \equiv 0$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$  e  $\xi_N \equiv \ell$ . Tale diagramma dipende dagli  $N$  valori da determinare:

$$\gamma_0 = \gamma(0) \quad ; \quad \gamma_1 = \gamma(\xi_1) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \gamma_{N-1} = \gamma(\xi_{N-1})$$

L'integrale che figura nella (4.113) si spezza così in  $N$  integrali parziali del tipo:

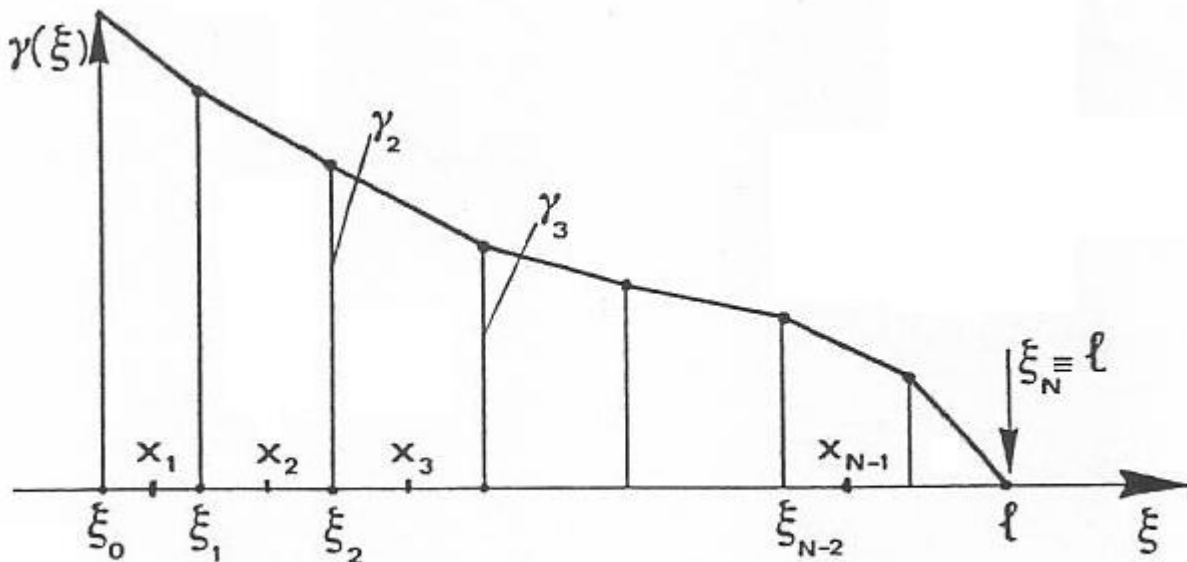
$$\sum_{n=1}^N \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \dots d\xi \quad (4.114)$$

ognuno dei quali è esprimibile in forma analitica.

Se esprimiamo i punti di controllo delle condizioni al contorno (4.113) come i punti del profilo aventi coordinate:

$$x_n = \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{2} \quad ; \quad y_n = y(x_n) \quad (1 \leq n \leq N)$$

la (4.113) si trasforma in un sistema di  $N$  equazioni lineari nelle  $N$  incognite  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}$ , essendo ovviamente  $\gamma_N = 0$  per la condizione di Kutta-Joukowski.



- Fig. 20 -