

Turbolenza¹

¹ Note tratte dal corso di *Turbolenza* del Prof. Verzicco, Politecnico di Bari (2002)

Indice

1	Turbolenza	3
1.1	fenomenologia della turbolenza	3
1.2	cascata di energia e dissipazione	7
1.3	significato fisico dei termini delle equazioni di Navier–Stokes	14
1.4	turbolenza omogenea ed isotropa	17
1.5	equazioni di Reynolds	20
1.6	Ipotesi di Boussinesq: la viscosità turbolenta	24
1.7	viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento	25
1.8	simulazione numerica della turbolenza	29

Capitolo 1

Turbolenza

1.1 fenomenologia della turbolenza

L'osservazione di flussi turbolenti è un'esperienza quotidiana che identifichiamo con il moto non stazionario, irregolare ed apparentemente caotico di un fluido. Le volute formate dal fumo di una sigaretta nel suo moto ascensionale, il miscelamento tra latte e caffè all'interno di una tazza o la scia irregolare di un fiume a valle del pilone di un ponte sono solo alcuni esempi tra un'innumerabile quantità.

Sebbene il concetto di turbolenza sia abbastanza chiaro per ognuno di noi, non è altrettanto chiaro l'effetto che ha la turbolenza sulle caratteristiche globali di un flusso.

Si consideri, per esempio l'accensione di una sigaretta all'interno di una stanza; è esperienza comune che dopo pochi secondi la presenza del fumo può essere avvertita in tutta la stanza, indicando che il fumo ha “diffuso” ovunque. Un'interpretazione ingenua potrebbe indurre a pensare che la diffusione sia la causa di questo fenomeno ma una stima delle scale temporali esclude inequivocabilmente questo fattore. Detta infatti ν la viscosità cinematica dell'aria ed L la distanza percorsa dal fumo, il tempo impiegato dal fumo per percorrere tale lunghezza risulta $T_\nu = L^2/\nu$ che, utilizzando i parametri dell'aria ed ipotizzando $L = 4\text{m}$ fornisce $T_\nu \simeq 1.07 \cdot 10^6\text{s}$ (circa 12 giorni)! In realtà il tempo risulterebbe ancora maggiore in quanto per tale calcolo non bisognerebbe considerare ν che dà la diffusività della quantità di moto ma la diffusività κ del fumo in aria; potendo porre $\kappa = \nu Sc$ (essendo Sc il numero di Schmidt che vale circa $Sc = 0.7$ per l'aria) si otterrebbe $T_\nu \simeq 17.7\text{giorni}$.

Si potrebbe comunque osservare che poiché il fumo di sigaretta è più caldo dell'aria circostante, la convezione naturale ha un ruolo rilevante nella diffusione del fumo. Una stima dimensionale, tuttavia fornisce delle velocità dell'ordine dei cm/s che, combinata con l'osservazione che il fumo caldo sale verso l'alto e non si propaga orizzontalmente, porta comunque a dei tempi di ore in netto contrasto, con l'esperienza quotidiana.

La ragione della discrepanza tra l'esperienza pratica e le due stime quantitative è che in entrambi i casi, si è trascurata la presenza della turbolenza. Le fluttuazioni di velocità indotte nel fluido dal moto turbolento, infatti, hanno la capacità di trasportare una quantità (scalare o vettoriale) molto rapidamente anche in assenza di moto medio. Ciò

porta ad assimilare l'effetto della turbolenza con un notevole aumento della diffusività del fluido che arriva ad essere anche due o tre ordini di grandezza maggiore rispetto al valore molecolare. Un studio più attento dei fenomeni turbolenti mostrerà comunque che questo è solo l'effetto più visibile di una dinamica molto complessa che coinvolge principalmente i termini non lineari delle equazioni di Navier–Stokes.

Per fornire un altro esempio sugli effetti macroscopici della turbolenza consideriamo la portata di un fluido attraverso un tubo a sezione circolare di raggio R e lunghezza L per una data differenza di pressione Δp . In base alla soluzione laminare di Hagen–Poiseuille si potrebbe scrivere $Q = \pi R^4 \Delta p / (8\mu L)$ indicando che sarebbe sufficiente una differenza di pressione di un Pascal per ogni metro di lunghezza per avere in un tubo di raggio $R = 0.5$ m una portata d'acqua di $Q \simeq 20$ m³/s. Questo risultato sovrastima in modo molto grossolano la portata reale che risulta ¹ invece $Q \simeq 0.25$ m³/s. Il motivo di tale differenza è che il numero di Reynolds del flusso è $Re \simeq 3 \cdot 10^5$ ossia molto al di sopra del limite $Re = 2100$ di validità della soluzione laminare; in tali condizioni, il flusso all'interno del condotto non può considerarsi nè stazionario nè tantomeno piano (ossia contenente la sola componente di velocità nella direzione della corrente) e le intense fluttuazioni di velocità “diffondono” la quantità di moto in modo molto efficiente comportando un apparente aumento degli sforzi viscosi.

Questo esperimento è stato descritto per la prima volta in modo sistematico da O. Reynolds nel 1883 il quale, conducendo degli esperimenti sul flusso all'interno di tubi a sezione circolare, osservò che combinando la velocità media del flusso U , il diametro del tubo d e la viscosità cinematica del fluido ν nel fattore Ud/ν (che in seguito prese il nome di numero di Reynolds) si poteva descrivere la dinamica del flusso in 3 categorie differenti. Per $Re \leq 2100$ il flusso si manteneva stazionario e si comportava come se delle lamine rettilinee (da cui il termine flusso laminare) scorressero le une sulle altre interagendo solo attraverso degli sforzi tangenziali. Questo comportamento fu notato osservando l'evoluzione di una “streakline” di inchiostro rilasciata da una posizione fissa all'interno del condotto; la linea di colorante, infatti, si manteneva rettilinea diffondendo molto debolmente mentre si allontanava dalla sorgente.

Per $2100 \leq Re \leq 4000$ la linea di colorante perdeva la sua stazionarietà e si propagava lungo una traiettoria ondulata con caratteristiche dipendenti dal tempo. In questo regime transizionale, tuttavia la traccia di colorante preservava la sua coerenza spaziale rimanendo confinata in una linea sottile.

Al contrario, per $Re \geq 4000$, dopo un tratto iniziale con oscillazioni di ampiezza crescente la traccia d'inchiostro veniva diffusa vigorosamente in tutta la sezione trasversale del tubo fino a distribuirsi omogeneamente in tutto il flusso. Quest'ultimo regime è detto turbolento ed è caratterizzato da un moto disordinato, completamente tridimensionale e non stazionario e da delle fluttuazioni di velocità con caratteristiche non deterministiche.

Un tipico esempio di segnale turbolento di velocità è mostrato in figura 1.2 da cui si vede che la velocità oscilla intorno ad un valore medio senza alcuna frequenza specifica. Un'altra caratteristica comune a tutti i flussi turbolenti è che se si ripete lo stesso esperi-

¹Questo risultato è stato determinato utilizzando il valore del fattore d'attrito f determinato dal diagramma di Moody ipotizzando una rugosità relativa delle superfici del tubo pari a $\epsilon/D = 10^{-3}$.

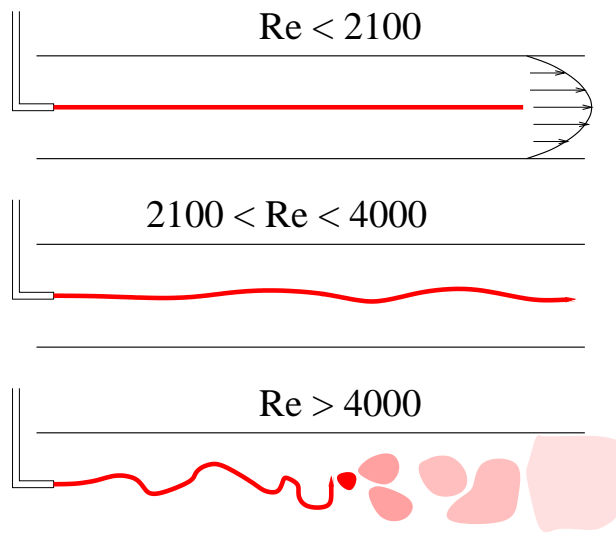


Figura 1.1: Disegno schematico dell'esperimento di Reynolds.

mento e si misura la stessa quantità nello stesso punto per lo stesso intervallo temporale si ottengono dei segnali notevolmente differenti se confrontati istantaneamente mentre essi hanno le stesse caratteristiche statistiche (valore medio, deviazione standard, etc.).

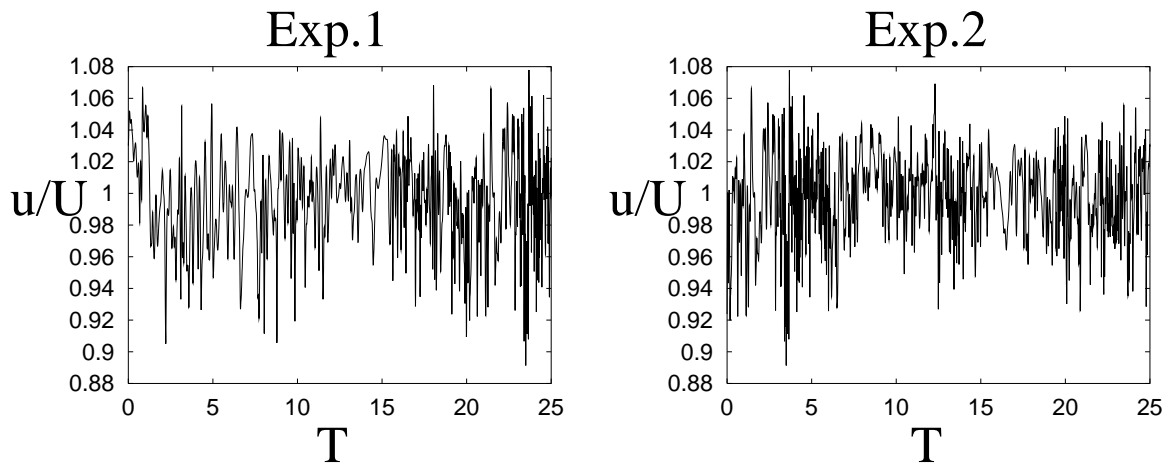


Figura 1.2: Segnali turbolenti di velocità per due realizzazioni successive dello stesso esperimento.

Questa osservazione sembra a prima vista inconciliabile con la natura delle equazioni che governano il fenomeno, cioè le equazioni di Navier–Stokes; essendo infatti le equazioni di tipo deterministico ed avendo condizioni iniziali ed al contorno definite si ha che anche la soluzione deve essere deterministica nello spazio e nel tempo. Questo dilemma è stato risolto da Lorentz che nel 1963 mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di

partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti ².

A tale scopo si consideri il sistema di equazioni

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz,$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy,$$

in cui i parametri valgono $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e $\rho = 35$ con le condizioni iniziali $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.1$ e $z(0) = 0.3$; la soluzione di questo sistema è riportata in figura 1.3 dove il tempo è il parametro lungo la curva si può osservare il noto attrattore di Lorentz. In figura 1.4, viene riportata invece con una linea continua l'andamento temporale per una della variabile $y(t)$ del sistema (1.1).

Se, lasciando tutto invariato, si considerano le condizioni iniziali $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.100001$ e $z(0) = 0.3$ si nota che dopo un intervallo di tempo iniziale (in questo caso $t \geq 15$ ma il valore dipende dalle condizioni iniziali e dai parametri σ , β e ρ) le due soluzioni differiscono nei valori istantanei e possono essere confrontate solo nei valori medi e nell'ampiezza delle fluttuazioni (figura 1.4, linea tratteggiata).

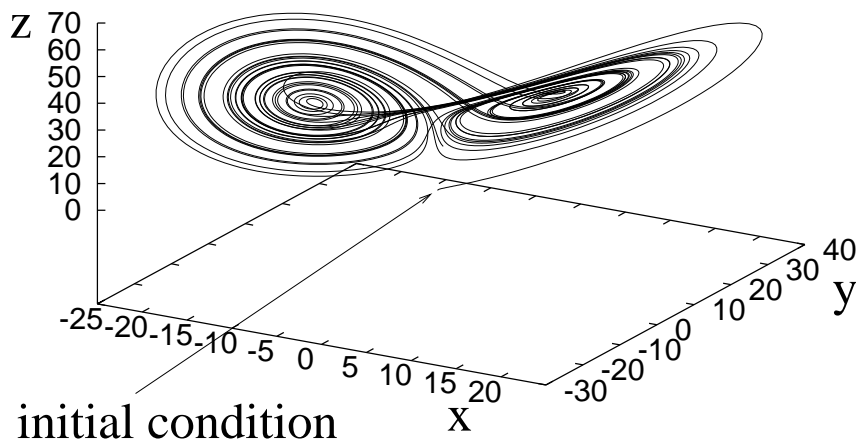


Figura 1.3: Attrattore di Lorentz nello spazio tridimensionale x - y - z .

Facendo un parallelo con le equazioni di Navier–Stokes possiamo annoverare tra i parametri iniziali sicuramente il campo di velocità, la pressione e la geometria del condotto, ma anche la distribuzione iniziale di temperatura (che determina la viscosità del fluido)

²Questo esempio è stato preso dal testo ‘Turbulent Flows’ by S.B. Pope, Cambridge Univ. Press, 2000).

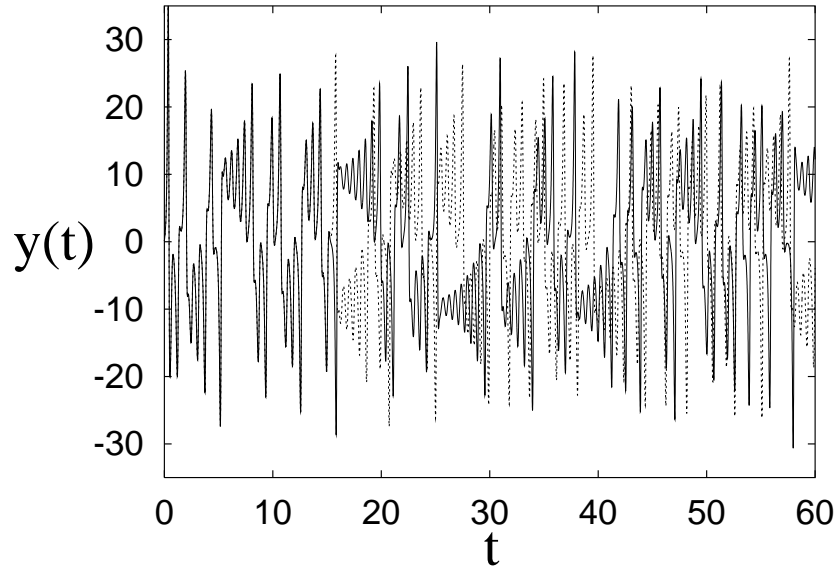


Figura 1.4: Evoluzione temporale della variabile $y(t)$ soluzione dell'equazione di Lorenz: — condizioni iniziali originali, condizioni iniziali perturbate.

la presenza di eventuali impurità e le condizioni di finitura superficiale del tubo. Questi ultimi parametri non possono essere controllati in modo arbitrariamente preciso e ciò determina (attraverso la non linearità delle equazioni) la dinamica non deterministica precedentemente descritta. In altre parole, per quanto si cerchi di mantenere controllati tutti i parametri di un esperimento è impossibile che due relizzazioni successive dello stesso fenomeno abbiano le condizioni iniziali replicate con una precisione infinita e ciò porta inevitabilmente a soluzioni divergenti nel tempo.

I termini non lineari sono anche gli artefici della produzione di fluttuazioni 'locali' di velocità che comportano la generazione di strutture fluidodinamiche di piccola scala. Riconsiderando infatti l'esempio del flusso nel condotto, ci si convince facilmente che la differenza di pressione imposta Δp fornisce energia solamente al moto medio, mentre la dispersione dell'inchiostro in tutto il flusso richiede l'azione di strutture piccole rispetto al diametro del tubo in grado di miscelare localmente il colorante con il fluido non marcato; è lecito quindi chiedersi come viene trasferita l'energia dal moto a grande scala fino alle strutture più piccole. Nella sezione successiva verrà trattata questa fenomenologia, prima da un punto di vista fisico e quindi con un modello matematico semplificato.

1.2 cascata di energia e dissipazione

Il processo di trasferimento di energia dalle grandi strutture vorticoso verso scale sempre più piccole che ne causano la dissipazione è un fenomeno che osserviamo quotidianamente in molte azioni usuali. Quando per esempio misceliamo il latte con il caffè in una tazza,

sappiamo di dover agitare il liquido con un cucchiaino per ottenere un cappuccino; osservando però il l'evento con un "occhio fluidodinamico" si comprende che per ottenere un miscelamento omogeneo bisogna che vengano generate delle scale di moto tanto piccole da portare a contatto a livello microscopico le particelle fluide di latte e quelle del caffè. Le dimensioni di un cucchiaino non sono certamente compatibili con un miscelamento microscopico, ci deve quindi essere un meccanismo che avviene all'interno del fluido tale da trasportare l'energia inizialmente contenuta in grandi vortici (delle dimensioni del cucchiaino e della tazza) fino a dimensioni tali da far avvenire il miscelamento. D'altra parte, a miscelamento avvenuto il cappuccino non conserva alcuna traccia del moto iniziale evidenziando che l'energia cinetica impartita al sistema è stata completamente dissipata a causa dell'attrito³. Ad ulteriore conferma del fatto che è necessario il moto a piccole scale per ottenere la miscelazione completa si può osservare cosa avviene sulla superficie di un cappuccino del bar. In quel caso, la presenza di schiuma non consente la generazione in superficie di moti a piccole scale e, come conseguenza, la schiuma del latte e del caffè formano un intricato disegno di spirali intrecciate, traccia della storia temporale del miscelamento, che ancora permettono di distinguere i due fluidi separatamente (figura 1.5).

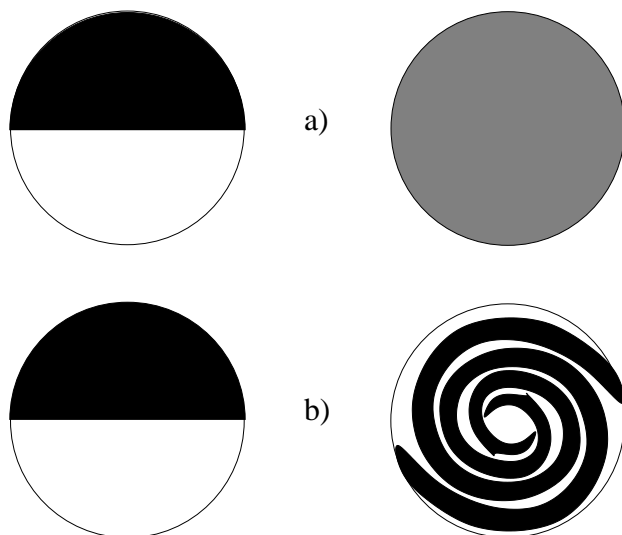


Figura 1.5: Mescolamento tra due fluidi inizialmente segregati (a sinistra) in presenza di turbolenza *a)* ed in sua assenza *b)*.

Fenomeni del tutto analoghi avvengono quando si mescolano due colori di una vernice per ottenerne un terzo, oppure quando combustibile e comburente si portano a contatto in un motore a razzo prima di far avvenire la combustione. In tutti questi casi si utilizza

³Un'analisi completa di questo flusso evidenzierrebbe che solo una piccola parte dell'energia iniziale viene dissipata all'interno del fluido in quanto l'attrito tra fluido e pareti della tazza agiscono in modo più efficiente. In aggiunta, se si considera che mescolando del fluido in una tazza si genera una rotazione di tutto il sistema, si deve considerare anche l'Ekman layer (ossia uno strato limite aggiuntivo che si produce nei flussi rotanti) che supera tutti gli altri fenomeni nella dissipazione dell'energia.

la turbolenza come un utile meccanismo per mescolare sempre più finemente due fluidi fino ad ottenere una miscela nella quale i costituenti originari non sono più individuabili. Alla base di questo fenomeno c'è l'*instabilità* dei vortici grandi dimensioni che si frammentano in strutture sempre più piccole producendo la *cascata* di energia dalle grandi verso le piccole scale. Riferendoci infatti alla figura 1.6 possiamo pensare che un vortice di dimensione L durante la sua rotazione, è sottoposto a delle instabilità che ne alterano la forma fino alla sua rottura in più strutture le cui dimensioni sono una frazione α (con $\alpha < 1$) di quella originale originale. Le prime, a loro volta hanno delle instabilità che producono vortici di dimensioni $L'' = \alpha L' = \alpha^2 L$, e così via. Naturalmente questo scenario è possibile a patto che il tempo di sopravvivenza della singola struttura sia superiore al tempo caratteristico di crescita delle instabilità. Un'analisi quantitativa della fenomenologia descritta richiederebbe la conoscenza della forma iniziale della struttura e del meccanismo di crescita dell'instabilità; tuttavia osservando che le strutture più piccole avranno sopravvivenza più breve mentre la crescita delle instabilità sarà la stessa a tutte le scale ⁴ possiamo asserire che dopo un certo numero di 'frammentazioni' il meccanismo di cascata si arresterà in quanto le strutture avranno dimensioni troppo piccole da venire dissipate prima che l'instabilità abbia avuto il tempo di agire. Il fatto che sia la dissipazione a porre un limite alla cascata di energia ci fa intuire che la viscosità del flusso deve avere un ruolo importante nella dinamica della turbolenza.

Tutti questi concetti verranno resi più rigorosi parlando della turbolenza omogenea ed isotropa (§1.4), ne prosiegua di questa sezione ci domandiamo invece se sia possibile se sia possibile visualizzare a livello matematico il processo di cascata di energia e di dissipazione viscosa senza dover necessariamente analizzare le equazioni complete di Navier–Stokes.

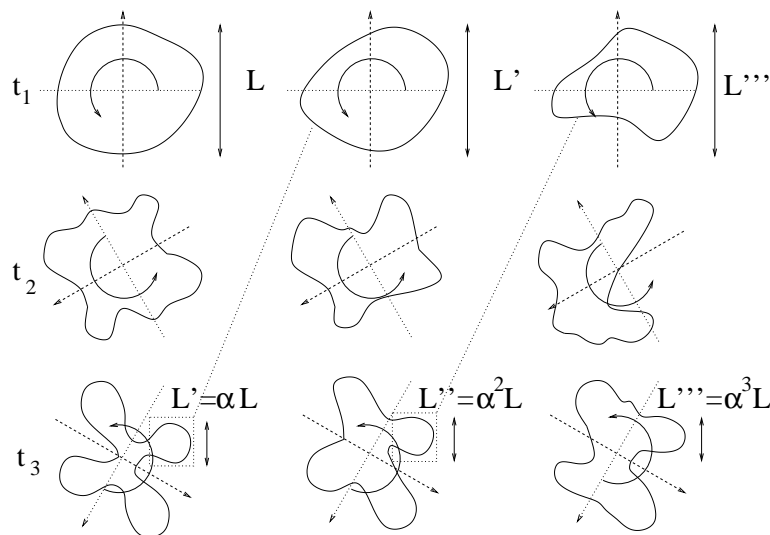


Figura 1.6: Disegno schematico dell'instabilità di un vortice che lo suddivide in strutture sempre più piccole (meccanismo di cascata).

⁴Ciò presuppone che il tipo di instabilità sia lo stesso per le strutture di tutte le dimensioni e che la velocità di crescita dell'instabilità sia indipendente o almeno scarsamente influenzata dalla viscosità.

Per rispondere a questa domanda consideriamo l'equazione di Burgers, un'equazione monodimensionale, che ha tutte le caratteristiche principali delle equazioni di Navier–Stokes tranne il termine di pressione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

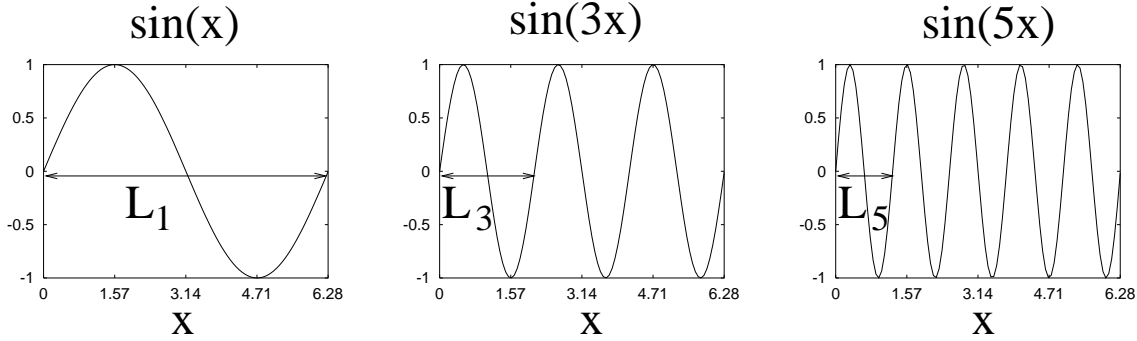


Figura 1.7: Esempio di variazione di lunghezza d'onda L_k con il numero d'onda k .

Immaginiamo ora che l'intervallo di definizione della sua soluzione sia $x \in [0, 2\pi)$ e che la soluzione sia periodica in x con media nulla; con queste ipotesi è possibile espandere la $u(x, t)$ con una serie di seni

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx), \quad (1.3)$$

in cui la dinamica della soluzione è tenuta in conto dai coefficienti $A_k(t)$ mentre la base di seni soddisfa automaticamente le condizioni al contorno. A titolo di esempio vengono riportate in figura 1.7 le funzioni seno per $k = 1, 3, 5$ da cui si può notare che la lunghezza della singola onda (detta appunto lunghezza d'onda) è pari ad $L_k = 2\pi/k$ e che il gradiente della curva diventa tanto più ripido quanto più aumenta k . Con questo semplice esempio abbiamo quindi imparato che l'indice k ci dà l'informazione sulla dimensione della struttura di base (ossia la singola onda) e sui gradienti spaziali che, rispettivamente, diminuiscono ed aumentano al crescere di k .

Avendo fatto questa precisazione, possiamo utilizzare la sommatoria (1.3) per esprimere i singoli termini della (1.2) ed ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k \cos(kx), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_l(t) A_m(t) m \sin(lx) \cos(mx) =$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \}.$$

Questi termini possono essere risostituiti nell'equazione (1.2) che diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \} = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx). \quad (1.5)$$

Osservando ora la proprietà di ortogonalità delle funzioni seno

$$\int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \pi \delta_{pq},$$

abbiamo che moltiplicando l'equazione (1.5) per $\sin(kx)$ ed integrando tra 0 e 2π si ottiene

$$\dot{A}_k(t) \pi + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi A_l(t) A_m(t) m}{2} = -\pi \nu k^2 A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \infty,$$

essendo la doppia sommatoria ristretta ai soli m ed l tali che $l+m=k$ ed $l-m=k$ ossia

$$\dot{A}_k + \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{A_m A_{k-m}}{2} + \frac{A_m A_{k+m}}{2} \right) = -\nu k^2 A_k, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.6)$$

L'equazione appena trovata indica che le variazioni nel tempo della quantità di moto nel modo k -esimo (\dot{A}_k) hanno due cause, una lineare ed una non lineare. Per comprendere meglio l'effetto dei due termini sorgente immaginiamo per un istante di cancellare dall'equazione di partenza (1.2) i termini non lineari, ottenendo che la (1.6) diventa

$$\dot{A}_k = -\nu k^2 A_k, \implies A_k(t) = A_k(0) e^{-\nu k^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1.7)$$

da cui si nota che ogni componente A_k decresce inesorabilmente nel tempo tanto più rapidamente quanto più è viscoso il fluido e quanto più è piccola la struttura (ossia quanto più grande è k). L'altro risultato notevole è che in assenza di termini non lineari l'evoluzione di ogni modo A_k è indipendente dagli altri; ciò implica che una condizione iniziale che contenesse solamente un numero finito di $A_k(0)$ (per esempio $k = 1, 3, 8$) evolverebbe unicamente con i modi 1, 3, 8 ognuno decrescendo nel tempo indipendentemente dagli altri secondo la soluzione appena ricavata. In figura 1.8 è riportata la soluzione in termini di $u(x, t)$ e di $A_k(t)$ dell'equazione (1.7) in cui si vede che effettivamente solo i coefficienti A_k presenti nella condizione iniziale determinano la dinamica del fenomeno e che questi decrescono nel tempo tanto più rapidamente quanto più è grande k .

Al contrario, la presenza dei termini non lineari modifica completamente la dinamica del fenomeno, trasferendo quantità di moto dalla componente k alle componenti $k-m$ e $k+m$. Per illustrare più in dettaglio questo concetto, immaginiamo che il numero

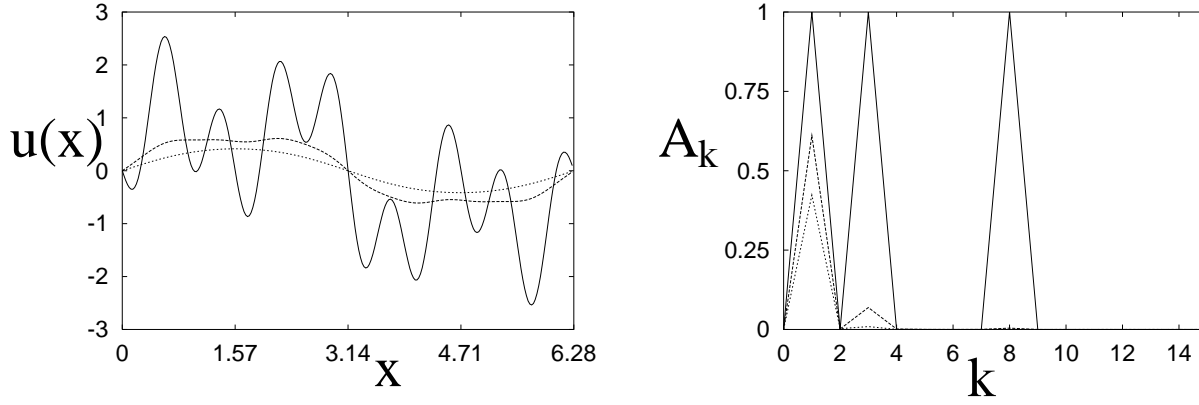


Figura 1.8: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers (senza i termini non lineari) $\nu = 10$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

di termini della sommatoria (1.3) sia limitato a 3 invece che infinito. L'equazione (1.6) scritta per componenti risulterebbe allora:

$$\dot{A}_1 + (A_1 A_0 + A_1 A_2) \frac{1}{2} + (A_2 A_{-1} + A_2 A_3) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-2} + A_3 A_4) \frac{3}{2} = -\nu A_1, \quad (1.8)$$

$$\dot{A}_2 + (A_1 A_1 + A_1 A_3) \frac{1}{2} + (A_2 A_0 + A_2 A_4) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-1} + A_3 A_5) \frac{3}{2} = -\nu A_2,$$

$$\dot{A}_3 + (A_1 A_2 + A_1 A_4) \frac{1}{2} + (A_2 A_1 + A_2 A_5) \frac{2}{2} + (A_3 A_0 + A_3 A_6) \frac{3}{2} = -\nu A_3,$$

e osservando che risulta $A_p \equiv 0$ per $p \leq 0$ e $p > 3$ si riducono a

$$\dot{A}_1 + \frac{A_1 A_2}{2} + A_2 A_3 = -\nu A_1, \quad (1.9)$$

$$\dot{A}_2 + \frac{A_1 A_1}{2} + \frac{A_1 A_3}{2} = -4\nu A_2$$

$$\dot{A}_3 + \frac{3A_1 A_2}{2} = -9\nu A_3.$$

Se ora consideriamo una condizione iniziale contenente solo A_1 (per esempio un seno come il primo pannello di figura 1.9) si vede che a causa del termine $A_1 A_1/2$ risulterà nell'istante iniziale $\dot{A}_2 \neq 0$ indicando che parte della quantità di moto viene trasferita nella componente A_2 . D'altra parte, quando risulta $A_2 \neq 0$, anche il termine $3A_1 A_2/2$ verrà attivato nell'equazione per A_3 e quindi anche la terza struttura verrà interessata dal moto del flusso. Se ricordiamo quindi che al crescere di k diminuisce la dimensione della struttura, abbiamo che i termini non lineari hanno come effetto quello di trasferire il

‘moto’ (e quindi l’energia) dalle strutture grandi a quelle più piccole ⁵ con il meccanismo di ‘cascata’ dai moti a grande scala verso quelli più piccoli e locali.

In particolare se nell’esempio precedente invece di limitare a 3 il numero di termini ne avessimo infiniti, avremmo un trasferimento di energia verso strutture sempre più piccole (k grandi) in un tempo tanto più lungo quanto più distante risulterebbe k dal modo $k = 1$ contenente energia nella condizione iniziale. Questa osservazione ci pone quindi un nuovo interrogativo e cioè se il trasferimento dell’energia procede indefinitamente fino a $k = \infty$ oppure se interviene qualche meccanismo in grado di bloccare questa cascata.

La risposta è fornita dalla soluzione analitica (1.7) da cui si vede come la viscosità diminuisca rapidamente il contenuto energetico del modo k -esimo all’aumentare di k . Se in particolare questa diminuzione è sufficientemente rapida, si può inibire il trasferimento di energia verso numeri d’onda k elevati semplicemente perché l’energia viene dissipata prima ancora che riesca ad essere trasferita. In pratica la viscosità opera un ‘taglio’ sulla dimensione minima della struttura che è possibile generare (o sul k massimo) in un flusso e questo taglio dipende sia dal valore della viscosità ν sia da quanto velocemente l’energia viene trasferita da un modo all’altro; si potrebbe verificare, infatti, che il flusso di energia verso le piccole scale è così rapido che la viscosità è costretta a ‘spostare’ il k di taglio verso valori maggiori dove può agire più efficientemente.

Le considerazioni appena fatte sono mostrate mediante due esempi in cui si riporta la soluzione dell’equazione di Burgers, entrambe con la medesima condizione iniziale, ma con due diversi valori di viscosità. Confrontando le figure 1.9 e 1.10 si nota come nel caso a viscosità minore la curva presenti un gradiente più ripido in corrispondenza del punto $x = \pi$. Ragionando in termini di A_k abbiamo quindi che la soluzione con viscosità piccola conterrà A_k con k più elevati rispetto alla soluzione più viscosa. Ciò è confermato dai pannelli di destra delle figure 1.9 e 1.10 che riportano l’evoluzione temporale della distribuzione degli A_k , consistentemente con gli argomenti precedentemente discussi.

Riconsiderando con quest’ottica l’esperimento di Reynolds per il flusso all’interno di tubi, si comprende che se il numero di Reynolds è piccolo ($Re < 2100$) gli effetti viscosi prevalgono su quelli inerziali (non lineari) e, essendo inibito ogni trasferimento di energia, il moto medio a grande scala non degenera in strutture più piccole. Al contrario, quando gli effetti inerziali prevalgono su quelli viscosi ($Re > 4000$) il trasferimento tra i modi sarà attivato ed il moto inizialmente uniforme produrrà strutture fluidodinamiche più piccole.

Queste ultime osservazioni costituiscono la base di partenza della teoria della turbolenza tridimensionale che illustreremo brevemente in una sezione successiva.

⁵Ciò non è vero nella turbolenza bidimensionale dove l’effetto combinato dei termini non lineari ed i termini viscosi crea un trasferimento in direzione opposta rispetto al caso monodimensionale e tridimensionale. Questo spiega la formazione di strutture di grande scala nell’atmosfera e negli oceani (grandi circolazioni e correnti).

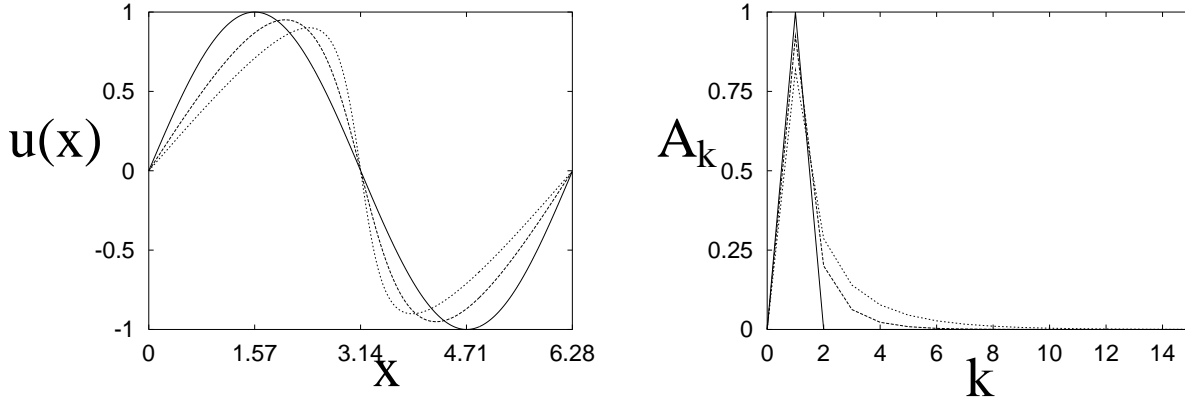


Figura 1.9: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-1}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

1.3 significato fisico dei termini delle equazioni di Navier–Stokes

La fisica dei fenomeni descritti in precedenza, ossia il trasferimento di energia dalle grandi alle piccole scale dove viene infine dissipata, è contenuta interamente nelle equazioni di Navier–Stokes; in questa sezione deriveremo un'espressione per l'evoluzione temporale dell'energia cinetica in un volume di fluido che ci consentirà di identificare l'effetto dei singoli termini delle equazioni sull'energia oltre che il suo comportamento globale.

Partendo dall'equazione di bilancio della quantità di moto per un flusso viscoso ed incomprimibile,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.10)$$

è possibile scrivere un'equazione di bilancio per l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = \frac{1}{2} \rho \int_V |\mathbf{u}|^2 dV, \quad (1.11)$$

moltiplicando scalarmente per \mathbf{u} l'equazione (1.10). Risultando infatti

$$\frac{dK}{dt} = \rho \int_V \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV, \quad (1.12)$$

si ricava il termine di derivata temporale dalla (1.10) ed, utilizzando l'equazione di conservazione della massa che per flussi incomprimibili si scrive $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, si giunge a

$$\frac{\partial K}{\partial t} = - \int_V [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}] dV. \quad (1.13)$$

Alcuni termini di questa equazione si possono nuovamente trasformare con la conservazione della massa ottenendo

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2), \quad \mathbf{u} \cdot \nabla p = \nabla(p\mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - |\nabla \mathbf{u}|^2. \quad (1.14)$$

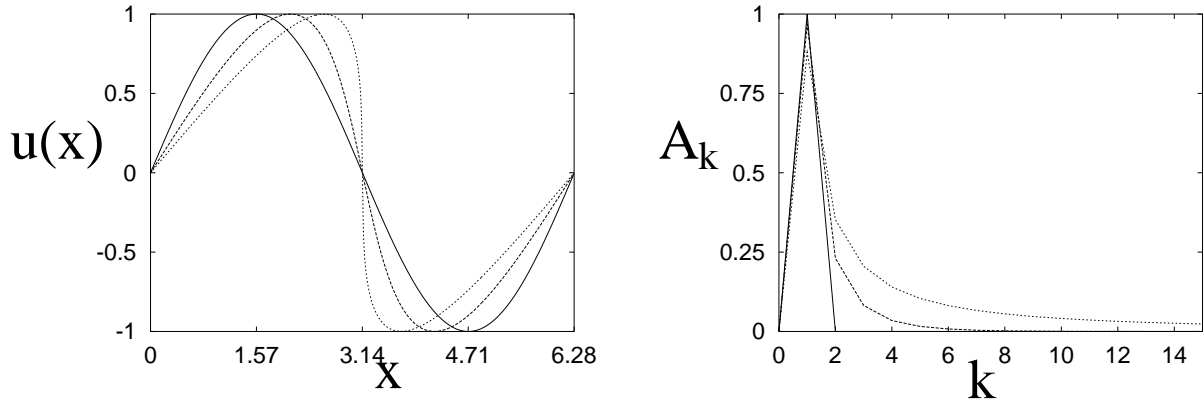


Figura 1.10: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-3}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, - - - $t = 0.5$ e · · · · · $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

I termini in questa forma consentono di applicare il teorema della divergenza

$$\int_V [-\rho \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}] dV = \int_V [-\frac{\rho}{2} \nabla(\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2) - \nabla(p\mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mu |\nabla \mathbf{u}|^2] dV \quad (1.15)$$

$$= \int_S [-\frac{\rho}{2}(\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2) - p\mathbf{u} + \rho\nu(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \rho\nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV = - \int_V \rho\nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV,$$

dove S è la superficie del volume V e l'integrale di superficie si è posto uguale a zero in quanto le componenti di velocità o si annullano all'infinito oppure in corrispondenza del contorno⁶. Mettendo quindi insieme i termini precedentemente manipolati si può scrivere

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_V \rho\nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV. \quad (1.16)$$

L'ultimo termine di questa equazione contiene la definizione della 'velocità di dissipazione dell'energia cinetica per unità di massa'

$$\epsilon = \nu |\nabla \mathbf{u}|^2, \quad (1.17)$$

per cui l'equazione (1.16) si può riscrivere nella forma compatta

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_V \rho \epsilon dV. \quad (1.18)$$

Questa relazione permette di fare alcune interessanti osservazioni sulle equazioni di Navier-Stokes che serviranno come base di partenza per l'analisi della dinamica della

⁶L'integrale di superficie è nullo anche se le condizioni al contorno sono periodiche in quanto prese due superfici contrapposte si avrebbe lo stesso valore per qualunque grandezza ma normali opposte. In casi del tutto particolari, tuttavia, come superfici mobili o traspiranti, l'integrale di superficie in (1.15) non si annulla ed il suo contributo deve essere tenuto in conto nel bilancio globale.

turbolenza. Nell'equazione (1.18) sono presenti solamente i termini derivati dalle forze di volume e dal termine viscoso, mentre non è rimasta alcuna traccia dei termini non lineari e di pressione. Poiché K è l'energia cinetica del sistema fluido integrata su V , ciò implica che i termini convettivi e di pressione non alterano il bilancio globale di energia ma agiscono solo sul suo trasferimento, sia da un punto all'altro dello spazio, sia attraverso le varie scale di moto del flusso. L'altra osservazione è legata alla definizione (1.17) di ϵ che, risultando definita positiva, indica la continua diminuzione di energia cinetica del sistema a causa di questo termine. In altre parole, se nella relazione (1.18) non ci fosse il termine contenente \mathbf{f} allora l'energia cinetica diminuirebbe inesorabilmente nel tempo fino ad ottenere un flusso in quiete. Al contrario se un flusso è statisticamente stazionario ⁷ allora la sua energia cinetica è costante e l'equazione (1.18) implica che $\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV = \int_V \rho \epsilon dV$ ossia, l'energia immessa nel sistema in quantità costante nel tempo (potenza costante) viene dissipata con la stessa velocità dalla viscosità del fluido.

Data la definizione (1.17) di ϵ si potrebbe pensare che quando la viscosità tende a zero, ossia per numeri di Reynolds molto elevati, il termine viscoso diventa trascurabile e l'energia cinetica si conserva in assenza di lavoro delle forze di massa. L'evidenza sperimentale ha mostrato che le cose non stanno in questo modo in quanto quando la viscosità diminuisce diminuisce anche la dimensione minima delle scale di moto che si generano nel flusso e quindi aumentano i gradienti. Questo fenomeno fa sì che il termine viscoso non sia mai trascurabile per quanto elevato sia il numero di Reynolds rendendo la turbolenza un fenomeno intrinsecamente dissipativo. D'altra parte, vedendola da un punto di vista prettamente matematico, la cancellazione del termine viscoso nell'equazione (1.10) abbassa di grado il suo ordine e ne cambia la fisica ⁸.

Prima di concludere questa sezione vogliamo notare a margine che solamente delle forze \mathbf{f} non conservative possono contribuire al bilancio di energia cinetica. Infatti, se \mathbf{f} contenesse solo forze conservative allora si potrebbe porre $\mathbf{f} = -\nabla G$ ed, utilizzando l'incompressibilità si potrebbe porre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} = -\mathbf{u} \cdot \nabla G = -\nabla \cdot (\mathbf{u}G)$. Il teorema della divergenza permetterebbe quindi di trasformare l'integrale di volume $\int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV$ nell'integrale di superficie $-\int_S \mathbf{u}G \cdot \mathbf{n} dS$ che si annullerebbe sotto le stesse condizioni che hanno permesso di annullare i termini in (1.14).

⁷La turbolenza è un fenomeno di natura intrinsecamente non stazionario, la sua stazionarietà deve quindi sempre essere intesa in senso statistico. Considerando infatti la definizione (1.11) per l'energia cinetica K , il fatto che questa risulti costante nel tempo non preclude alla velocità \mathbf{u} di fluttuare nel tempo all'interno del volume V .

⁸Questo è il motivo per cui le equazioni di Eulero non sono il limite delle equazioni di Navier–Stokes per $Re \rightarrow \infty$. Infatti la viscosità moltiplica il termine di ordine più elevato e trascurare la dissipazione cambia l'ordine dell'intera equazione. A titolo di esempio non è così nel caso dell'oscillatore armonico di massa m , rigidità k e coefficiente d'attrito μ proporzionale alla velocità. Per questo sistema, infatti, l'equazione del moto è $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$ e la cancellazione del termine d'attrito non cambia la natura dell'equazione.

1.4 turbolenza omogenea ed isotropa

L'esempio della soluzione di Burgers ha mostrato come nelle equazioni di evoluzione di un fluido ci sono i termini viscosi e quelli non lineari che hanno meccanismi di azione completamente diversi ed in competizione tra loro. I primi, infatti, sono dissipativi ed hanno un'azione locale, interessano cioè singolarmente i vari modi senza implicare alcuna interazione. L'efficacia con cui viene dissipata l'energia cresce con il quadrato del numero d'onda k e quindi con l'inverso del quadrato della dimensione della struttura. I secondi, al contrario, data la loro natura non lineare sono responsabili del trasferimento di energia tra i vari modi senza alterarne il valore globale.

Sebbene le equazioni di Navier–Stokes abbiano una struttura più complessa dell'equazione di Burgers, l'azione dei termini non lineari e di quelli viscosi è analoga a quella appena descritta e questa dinamica ha dato spunto a molti scienziati del ventesimo secolo per ipotizzare lo scenario evolutivo della turbolenza. In particolare Richardson nel 1922 immaginò che l'energia entri nel flusso alle scale più grandi e, attraverso meccanismi di instabilità, vengano prodotti vortici più piccoli che a loro volta generano vortici ancora più piccoli e così via fino a quando le dimensioni non sono talmente piccole che la viscosità dissipa le strutture impedendo ogni ulteriore trasferimento⁹. Questa descrizione implica un trasferimento a cascata (essenzialmente non viscosa) dell'energia dalle scale più grandi del moto verso quelle sempre più piccole fino alle scale dissipative dove la viscosità trasforma tutta l'energia in calore.

Lo scenario appena presentato descrive in modo abbastanza fedele ciò che accade in un flusso turbolento anche se, senza ulteriori ipotesi, non è possibile quantificare il fenomeno descritto; per esempio, quanto piccole sono le dimensioni a cui prevalgono gli effetti viscosi, e cosa succede tra le scale in cui l'energia viene immessa nel flusso e quelle a cui viene dissipata? Questi quesiti hanno trovato una risposta solo recentemente quando Kolmogorov nel 1941 ha pubblicato i risultati di una sua teoria applicabile alla turbolenza omogenea ed isotropa¹⁰.

È bene precisare subito che la turbolenza omogenea ed isotropa è un'astrazione concettuale e che non è mai riprodotta in modo esatto da alcun sistema fisico reale. Tuttavia la sua utilità per lo studio della turbolenza è duplice in quanto da un lato semplifica enormemente la trattazione teorica e permette quindi una migliore comprensione della fisica, dall'altro si osserva che tutti i sistemi reali soddisfano 'localmente' le condizioni di omogeneità ed isotropia.

⁹L'asserzione di Richardson era: "Big whorls have little whorls, which feed on their velocity and little whorls have lesser whorls and so on to viscosity".

¹⁰La turbolenza si definisce omogenea ed isotropa, rispettivamente, quando le sue caratteristiche statistiche non dipendono dalla posizione nello spazio e sono uguali in tutte le direzioni. Tecnicamente la definizione rigorosa richiede l'introduzione di variabili random; detta infatti $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ una variabile random funzione della posizione \mathbf{x} (per esempio la velocità) questa è definibile mediante tutti i suoi momenti statistici (media, deviazione standard, etc.) $\langle \mathbf{u}^m \rangle = \int f(\mathbf{x}) \mathbf{u}^m d\mathbf{u}$ dove $f(\mathbf{x})$ è la funzione densità di probabilità. Un fenomeno si definisce omogeneo se la funzione $f(\mathbf{x})$ è indipendente dalla posizione \mathbf{x} . La definizione di isotropia richiede invece che $f(\mathbf{x})$ sia invariante sotto ogni rotazione e riflessione degli assi in \mathbf{x} .

Quest'ultima asserzione costituisce la prima ipotesi fondamentale di Kolmogorov e cioè "per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le strutture fluidodinamiche piccole in un flusso turbolento sono statisticamente isotrope". In questa affermazione 'strutture fluidodinamiche piccole' è inteso rispetto alle scale di moto in cui l'energia turbolenta viene immessa nel flusso e questa osservazione chiarisce anche perché vengano richiesti 'numeri di Reynolds sufficientemente elevati'. Ciò infatti implica che gli effetti inerziali siano di gran lunga più importanti di quelli viscosi rendendo possibile un lungo processo di cascata dell'energia dalle strutture più grandi alle più piccole. Se si ipotizza che ad ogni passo della cascata le strutture perdano sempre più memoria delle caratteristiche dei vortici che hanno innescato la cascata, si conclude facilmente che le strutture più fini di qualunque flusso turbolento hanno tutte le stesse caratteristiche. Si avrà quindi che le piccole scale generate dietro un cilindro o a valle di un getto hanno la stessa statistica nonostante le scale più grandi abbiano una dinamica completamente differente.

La seconda ipotesi di Kolmogorov trae spunto dall'osservazione che la dinamica della turbolenza dipende da quanto rapidamente l'energia viene trasferita dalle grandi alle piccole scale e dal valore della viscosità che fissa il numero d'onda k a cui viene operato il taglio nel trasferimento di energia. Se il fenomeno fluidodinamico è statisticamente stazionario, essendo la cascata dall'energia non viscosa, si deduce che, detta ϵ l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) prodotta nell'unità di tempo, questa sarà anche l'energia dissipata nell'unità di tempo¹¹. Con questa osservazione si può comprendere la seconda ipotesi di Kolmogorov che dice: "per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, le caratteristiche delle piccole scale di tutti i flussi turbolenti sono universali e sono determinate dalla viscosità ν e dalla potenza dissipata ϵ ."

Questa osservazione potrebbe apparire di scarsa utilità per stime quantitative, tuttavia considerazioni di tipo dimensionale ci portano a concludere che con ϵ e ν c'è un solo modo per costruire delle scale di lunghezza, velocità e tempo. In particolare, osservando che ϵ è un'energia per unità di tempo e unità di massa si ottiene

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad u_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad t_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}, \quad (1.19)$$

rispettivamente per la lunghezza, velocità e tempo delle scale dissipative (le più piccole).

Ricordiamo ora, che per un processo stazionario ϵ coincide con la potenza immessa nel flusso dalle scale di moto più grandi; dette quindi U ed L , rispettivamente, la velocità e la lunghezza caratteristiche di queste scale, si ottiene da considerazioni dimensionali $\epsilon = U^3/L$. È utile osservare che in questa stima dimensionale non è stata considerata la viscosità in quanto per le strutture più grandi gli effetti viscosi sono trascurabili e le questioni energetiche devono coinvolgere fattori puramente inerziali.

Dalla stima per ϵ e dalle relazioni (1.19), ricordando la definizione del numero di Reynolds $Re = UL/\nu$, si ottiene:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}, \quad \frac{U}{u_\eta} = Re^{1/4}, \quad \frac{T}{t_\eta} = Re^{1/2}, \quad (1.20)$$

¹¹Infatti, se così non fosse, l'energia si dovrebbe accumulare alle scale intermedie che, avendo un contenuto di energia variabile nel tempo, non potrebbero essere statisticamente stazionarie.

dove $T = L/U$ è la scala dei tempi dei moti a grande scala.

Queste relazioni permettono di stimare i rapporti tra le caratteristiche delle scale più grandi e quelle più piccole in un flusso turbolento in funzione del solo numero di Reynolds ed hanno ripercussioni di straordinaria importanza pratica per le misure sperimentali, per le simulazioni numeriche e per la possibilità di predizione di un flusso turbolento.

Dopo aver messo in relazione le strutture più piccole con le più grandi, rimane da analizzare la dinamica delle strutture intermedie con dimensione r tale che $L \gg r \gg \eta$.

In base a quanto visto finora, è facile convincersi che la viscosità avrà un'influenza trascurabile in quanto agisce solo alle scale più piccole. D'altra parte l'energia viene immessa nel flusso dalle scale più grandi da cui ne consegue che le scale intermedie vedranno solo un flusso di energia in transito, proveniente dai grandi vortici e trasferito verso i vortici dissipativi. In base a quanto detto, la terza ipotesi di Kolmogorov afferma che per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le caratteristiche (la statistica) delle strutture di dimensione r (con $L \gg r \gg \eta$) sono universali e dipendono unicamente da ϵ (e quindi sono indipendenti da ν).

Ciò comporta che se u_r è la velocità delle scale di dimensione r si ottiene

$$\frac{u_r^3}{r} = \epsilon = \frac{U^3}{L}, \implies u_r = \frac{U}{L^{1/3}} r^{1/3}, \quad \text{e} \quad t_r = \frac{r}{u_r} = \frac{L^{1/3}}{U} r^{2/3}. \quad (1.21)$$

Queste stime indicano che le strutture con scale r intermedie tra L ed η hanno una velocità caratteristica che cresce solo come $r^{1/3}$ mentre i tempi caratteristici crescono come $r^{2/3}$. La conseguenza di ciò è che i vortici più grandi hanno le velocità più intense ed una dinamica più lenta mentre per i gradienti di velocità $\nabla u \sim u_r/r \approx r^{-2/3}$ si ha che quelli più intensi sono alle scale più piccole¹².

Notiamo a margine che dall'ultima ipotesi si deriva la famosa legge di potenza ($k^{-5/3}$) per lo spettro di energia. Se infatti si definisce lo spettro come $E(k)$ tale che

$$K = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (1.22)$$

con K energia cinetica per unità di massa del flusso, dalla terza ipotesi di Kolmogorov e da argomenti dimensionali si ottiene $E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$, in cui C è una costante universale¹³.

¹²Da questa stima sembrerebbe che i gradienti diventino infiniti per $r \rightarrow 0$, mentre in realtà bisogna ricordare che le formule (1.21) valgono solo per $L \gg r \gg \eta$. Viceversa quando $r \rightarrow 0$ risulta r dello stesso ordine di η ed il campo di velocità si 'regolarizza' essendo $u_r \sim r$ con dei gradienti finiti.

¹³A questo risultato si giunge facilmente ricordando che dimensionalmente k è l'inverso di una lunghezza da cui ne consegue che le dimensioni di $E(k)$ sono una velocità al quadrato per una lunghezza (ossia quelle di un'energia cinetica per unità di massa moltiplicata per una lunghezza). D'altra parte nel range inerziale si dispone solo di ϵ per poter soddisfare requisiti dimensionali per cui ponendo $[E(k)] = C[\epsilon^\alpha k^\beta] = [U^2 L]$ si ricava $\alpha = 2/3$ e $\beta = -5/3$.

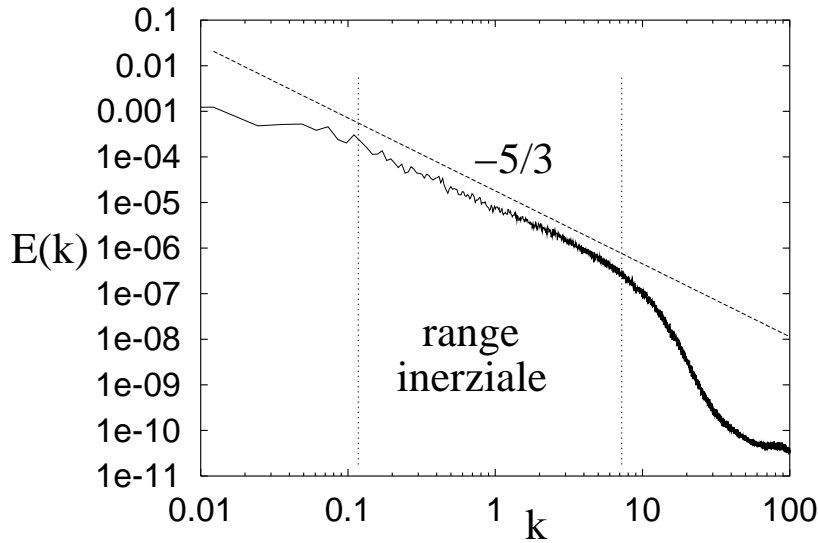


Figura 1.11: Spettro della turbolenza omogenea ed isotropa. La linea è la legge di potenza $k^{-5/3}$ riportata per confronto.

1.5 equazioni di Reynolds

Abbiamo visto in precedenza che in un flusso turbolento, anche con condizioni al contorno e forzanti stazionarie, il campo di velocità è non stazionario con oscillazioni non deterministiche intorno ad un valore medio che eventualmente può dipendere anch'esso dal tempo.

È utile chiarire immediatamente che questa dinamica così complessa è interamente contenuta nelle equazioni di Navier–Stokes che sono in grado di descrivere il moto e l'interazione di tutte le scale di moto, fino alle più piccole e dissipative. Purtroppo dal punto di vista pratico, l'estremo dettaglio con cui queste equazioni descrivono il flusso costituisce al tempo stesso la debolezza del modello in quanto le risorse di calcolo necessarie per la risoluzione di queste equazioni crescono vertiginosamente con il numero di Reynolds ($\sim Re^3$). Se si considera che nei problemi pratici si ha $Re = 10^6 - 10^9$ si capisce immediatamente che una soluzione del problema con un metodo 'diretto' è tecnicamente impossibile.

D'altra parte per alcune applicazioni pratiche la sola conoscenza delle grandezze medie può essere sufficiente per la soluzione del problema, ci si chiede quindi se sia possibile, partendo dalle equazioni di Navier–Stokes, derivare delle equazioni più semplici per le sole grandezze medie.

A tal fine, iniziamo con l'osservare che dato un qualunque segnale dipendente dal tempo (nella fattispecie la velocità) è possibile decomporlo in un valore medio ed una fluttuazione. Nel caso in cui il valore medio sia costante nel tempo allora si può porre:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (1.23)$$

risultando

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad \text{e} \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}), \quad (1.24)$$

in cui tutta la non stazionarietà del segnale è nella fluttuazione (figura 1.12). Dalle definizioni risulta identicamente $\langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv 0$, proprietà che tornerà utile nella decomposizione delle equazioni del moto.

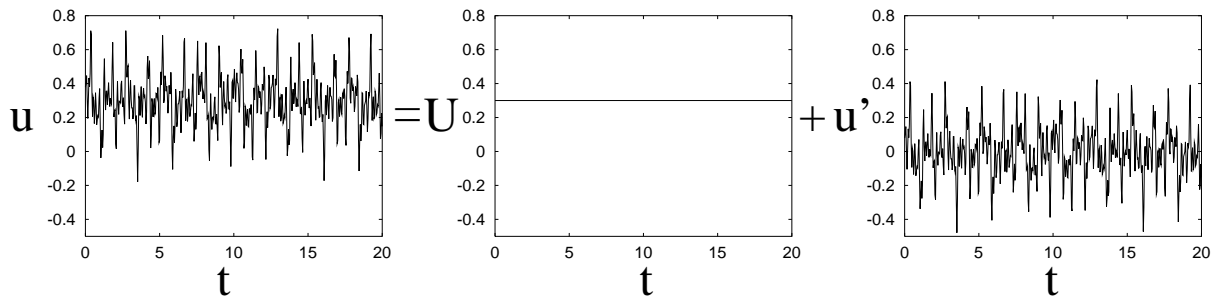


Figura 1.12: Decomposizione di un segnale statisticamente stazionario in parte media e parte fluttuante.

Se la velocità media risulta invece anch'essa funzione del tempo allora l'operazione di media non va effettuata per un tempo infinito ma su un'intervallo finito che risulti molto grande rispetto alle scale temporali delle fluttuazioni ma abbastanza breve se confrontato con i tempi di variazione del campo medio ¹⁴ (figura 1.13).

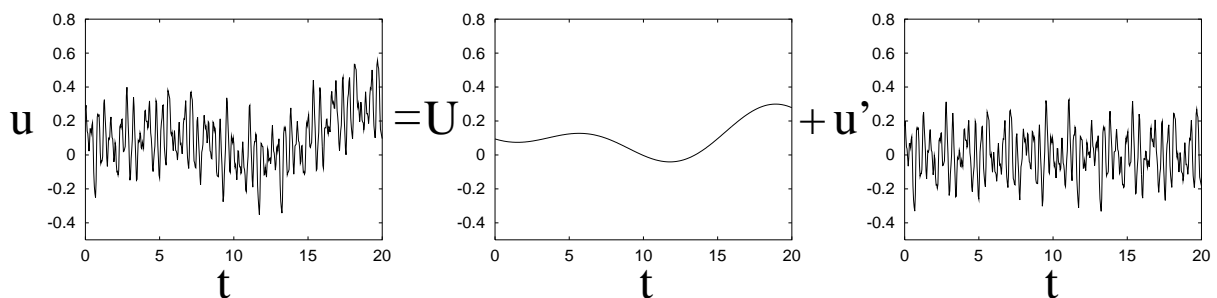


Figura 1.13: Decomposizione di un segnale statisticamente *non* stazionario in parte media e parte fluttuante.

La decomposizione appena illustrata può naturalmente essere effettuata per la pressione p e per tutte le altre variabili dipendenti delle equazioni di Navier–Stokes e di conservazione della massa. Per semplicità tratteremo solo il caso $\rho = \text{const.}$ (flusso incomprimibile

¹⁴Questa operazione è ben definita quando esiste una netta separazione tra i periodi delle piccole fluttuazioni e quelli del campo medio. In turbolenza questa eventualità si verifica assai raramente (a meno che non ci siano forzanti periodiche imposte esternamente) e la decomposizione in parte media e parte fluttuante può presentare delle ambiguità.

omogeneo) per cui, l'equazione di continuità si può decomporre in

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{u}') = 0, \quad \implies \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (1.25)$$

rispettivamente per la velocità media e quella fluttuante. La seconda delle (1.25) è stata ottenuta dalla prima dopo aver affettuato un'operazione di media, aver notato che $\langle \mathbf{u}' \rangle \equiv 0$ e che l'operazione di media e di divergenza commutano (in quanto entrambi operatori lineari). La terza delle (1.25) è infine ottenuta semplicemente per sottrazione della seconda dalla prima.

Per decomporre in modo analogo le equazioni di Navier–Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.26)$$

osserviamo che per tutti i termini, tranne quello non lineare possiamo porre

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}, \quad \nabla p = \nabla P + \nabla p', \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{U} + \nabla^2 \mathbf{u}'. \quad (1.27)$$

Il termine non lineare si decompone invece secondo

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla \cdot [(\mathbf{U} + \mathbf{u}')(\mathbf{U} + \mathbf{u}')] = \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}'). \quad (1.28)$$

Se ora sostituiamo i termini così decomposti nell'equazione (1.26) e ne facciamo la media, osservando che risulta $\langle \mathbf{U}\mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{u}'\mathbf{U} \rangle \equiv 0$ mentre $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \neq 0$ si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (1.29)$$

e sottraendo questa equazione dalla (1.26) si ricava l'equazione per le fluttuazioni

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{U}) - \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}', \quad (1.30)$$

L'equazione (1.29) e la seconda delle (1.25) costituiscono le equazioni della dinamica del campo medio e se non fosse per il termine $\nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle)$ queste sarebbero identiche alla (1.26) e la prima delle (1.25) che sono le equazioni di partenza. La differenza potrebbe sembrare marginale ma mentre il sistema originale di equazioni è chiuso (4 equazioni nelle 4 incognite \mathbf{u} e p) le equazioni del campo medio rimangono 4 a fronte di un numero di incognite che sale a 13, \mathbf{u} , p ed il tensore ¹⁵ del secondo ordine $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$. Questo problema è noto come 'chiusura' della turbolenza e si presenta sempre con un numero di incognite superiore al numero delle equazioni ogni volta che si tenta di derivare un'equazione per la turbolenza. Una conferma di questa affermazione si può ottenere ricavando l'equazione per $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ dalla (1.30) dopo averla moltiplicata per \mathbf{u}' , averla sommata alla equazione trasposta ed averne effettuato la media. Infatti, poiché l'equazione (1.29)

¹⁵Notando evidenti proprietà di simmetria del tensore $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ il numero delle incognite si riduce a 10, non risolvendo comunque il problema della chiusura.

introduce un'incognita aggiuntiva, potremmo essere tentati di ricavarne un'equazione per chiudere il problema.

Procedendo come descritto si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle + \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U} + [\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U}]^T + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle = \\ -\frac{1}{\rho} [\langle \mathbf{u}'\nabla p' \rangle + \langle \mathbf{u}'\nabla p' \rangle^T] + \nu [\langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle + \langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle^T] \end{aligned} \quad (1.31)$$

dalla quale si nota che l'evoluzione di $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ introduce la nuova incognita $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ e la procedura potrebbe essere ripetuta all'infinito senza mai riuscire a bilanciare il numero di incognite con le equazioni. Si otterrebbe cioè una gerarchia di equazioni in cui le incognite sono sempre superiori rispetto alle relazioni disponibili rendendo impossibile la soluzione esatta del problema.

L'equazione (1.31) si presta ad una interpretazione dei singoli termini permettendo di comprendere più in dettaglio la dinamica degli sforzi di Reynolds. I primi due termini a primo membro sono assimilabili ad una derivata materiale in cui, però, l'accelerazione convettiva è dovuta solo alla velocità media del flusso e non alla velocità totale \mathbf{u} . I due termini successivi, hanno un ruolo fondamentale nella evoluzione del tensore di Reynolds in quanto rappresentano l'interazione tra il tensore stesso ed il campo medio. Per esempio, nel caso di turbolenza omogenea ed isotropa, il gradiente del campo medio è nullo e questi termini di interazione sono nulli. Al contrario, in prossimità di superfici dove i gradienti di velocità sono massimi questi termini causano sia la produzione che la riorientazione delle varie componenti del tensore $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$. Il termine $\nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ fornisce infine il trasporto del tensore $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ da parte della componente fluttuante di velocità \mathbf{u}' .

I primi due termini a secondo membro rappresentano le interazioni velocità–pressione che conferiscono una natura non–locale al fenomeno. L'ultimo termine, infine tiene conto della diffusione e della dissipazione delle fluttuazioni turbolente attraverso la viscosità.

Un'ultima informazione interessante si può derivare dall'equazione (1.31) prendendone solo i termini diagonali e facendone una media. In altre parole, detta K l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) definita come

$$K = \frac{1}{2} (\langle u'_x u'_x \rangle + \langle u'_y u'_y \rangle + \langle u'_z u'_z \rangle) = \frac{3}{2} Tr(\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle), \quad (1.32)$$

si ottiene facilmente dall'equazione (1.31)

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K = - \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \langle \mathbf{u}'p' \rangle - \nabla \cdot \langle K\mathbf{u}' \rangle + \nu \langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle. \quad (1.33)$$

Osservando che risulta:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}' + [\nabla \mathbf{u}']^T), \quad \langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle = \nabla \cdot \langle 2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{E}' \rangle - \langle \epsilon \rangle$$

$$\text{con} \quad \langle \epsilon \rangle = \langle 2\nu \mathbf{E}' \mathbf{E}' \rangle$$

l'equazione (1.33) può essere scritta come

$$\frac{\partial K}{\partial t} = - \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U} - \langle \epsilon \rangle - \nabla \cdot [K \mathbf{U} + \langle K \mathbf{u}' \rangle + \langle p' \mathbf{u}' \rangle + \langle 2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{E}' \rangle], \quad (1.34)$$

che si presta ad una facile interpretazione una volta che venga integrata su un volume V . Infatti, tutto l'ultimo termine a secondo membro, essendo scritto in forma di divergenza darà un contributo nullo all'integrale. D'altra parte, $\langle \epsilon \rangle$ è una quantità definita positiva ed il suo contributo all'integrale sarà sicuramente negativo, consistentemente con il fatto che la dissipazione viscosa trasforma irreversibilmente energia meccanica in calore. Si conclude quindi che il bilancio di energia turbolenta (ossia l'integrale a primo membro) è affidato unicamente all'integrale del termine $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U}$, ossia alle interazioni tra le fluttuazioni di velocità ed il gradiente del campo medio. Tra l'altro, se questo termine deve rifornire di energia il campo fluttuante deve necessariamente sottrarre energia dal campo medio; ciò risulta effettivamente vero in quanto lo stesso termine compare con il segno opposto nell'equazione dell'energia del campo medio, ottenuta in modo analogo alla (1.33) ma partendo dalle equazioni per \mathbf{U} .

1.6 Ipotesi di Boussinesq: la viscosità turbolenta

È stato visto nella sezione precedente che le equazioni di Navier–Stokes presentano un problema di chiusura che impedisce di fatto di avere un sistema in cui il numero delle equazioni uguaglia quello delle incognite. È quindi necessario pensare a qualche strategia che consenta, seppur in modo non esatto, di calcolare le informazioni di base di un flusso (come campo medio ed intensità delle fluttuazioni) senza necessariamente risolvere il problema completo.

La via comunemente utilizzata è quindi quella di troncare il numero di equazioni ad un certo ordine e modellare le incognite di ordine superiore con delle relazioni approssimate. Chiaramente maggiore è l'ordine a cui si tronca la gerarchia, maggiore sarà il numero delle incognite da modellare e conseguentemente la complessità del modello utilizzato. Lasciamo ai testi specialistici del settore la disamina dei numerosi modelli ed equazioni di ordine elevato mentre in queste note ci limiteremo al semplice caso in cui i termini $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$ vengono modellati con una semplice ipotesi di 'gradiente diffusivo'.

Per comprendere il significato fisico di tale approssimazione, riconsideriamo l'equazione (1.29) e riscriviamola nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{E} - \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle), \quad \text{con} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (1.35)$$

da cui si osserva che i termini $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$ possono essere considerati come degli sforzi aggiuntivi (detti sforzi di Reynolds) che sottraggono energia al campo medio per trasferirla alle fluttuazioni. Identificando queste fluttuazioni come la componente turbolenta del

moto, detta K l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) definita in (1.32) si può, analogamente al caso laminare, porre per la parte deviatorica degli sforzi di Reynolds,

$$- \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle + \frac{2}{3}K\mathbf{I} = 2\nu_T\mathbf{E}, \quad (1.36)$$

in cui ν_T è la viscosità turbolenta ed è la nuova incognita del problema.

Con questa posizione l'equazione (1.29) assume la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\nabla P^* + \nabla \cdot (2\nu^*\mathbf{E}), \quad (1.37)$$

che è identica all'equazione originale avendo usato la pressione modificata $P^* = P + 2K/3$ ed avendo definito una viscosità 'totale' $\nu^* = \nu + \nu_T$. Sebbene le espressioni (1.36) e (1.37) possano sembrare particolarmente attraenti data la loro semplicità, è bene sottolineare che nascondono diverse insidie, sia matematiche che fluidodinamiche. Infatti, mentre ν è una proprietà molecolare del *fluido* e nelle ipotesi $\rho = \text{const.}$ è costante in tutto il campo, ν_T è una proprietà del *flusso* il cui valore cambia in ogni punto del campo e nel tempo ($\nu_T = \nu_T(\mathbf{x}, t)$) ed il suo comportamento varia da problema a problema. Inoltre, anche se a prima vista la relazione (1.36) sembra solo aver spostato l'incognita $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ nell'incognita ν_T , dobbiamo osservare che la prima è un tensore del secondo ordine mentre la seconda è uno scalare. L'equazione (1.36) implica quindi che il primo e secondo membro abbiano le stesse direzioni principali ossia che gli autovettori dei due tensori siano paralleli. Questa proprietà non è giustificabile teoricamente ed infatti una verifica diretta della (1.36) attraverso simulazioni numeriche ed esperimenti di laboratorio ha mostrato che ciò non è verificato per la maggior parte dei flussi; questo 'disallineamento' porta in qualche caso a piccole differenze tra le soluzioni calcolate e quelle misurate, mentre altre volte induce errori grossolani. Ricordiamo infine che, anche accettando in modo acritico l'equazione (1.36), il problema non risulta ancora chiuso in quanto le equazioni sono sempre 4 mentre le incognite sono ancora 5 (\mathbf{U} , p e ν^* oppure ν_T).

A questo proposito abbiamo detto che ν_T dipende dal flusso, ossia a seconda che si stia studiando un flusso a valle di un'ostacolo, uno strato limite o un getto turbolento, esistono leggi empirico-euristiche (spesso con correzioni sperimentali o ad hoc) che permettono di calcolare la ν_T dalla geometria del problema o dalle caratteristiche del flusso medio e quindi di chiudere il sistema di equazioni. Anche in questo caso, la descrizione di tutti i modelli per la ν_T viene lasciata ai testi di modellistica della turbolenza mentre in queste note ci limiteremo a commentare un particolare modello algebrico basato sul concetto di lunghezza di mescolamento. Ricordiamo tuttavia che alcuni modelli possono essere tanto complicati da richiedere per il calcolo della ν_T un set di equazioni differenziali più complesse di quello per il calcolo del campo medio.

1.7 viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento

Uno dei primi tentativi effettuati per la determinazione della viscosità turbolenta è stato fatto costruendo un'analogia tra la turbolenza e la diffusione a livello molecolare della

quantità di moto. Ricordiamo infatti brevemente che la diffusione molecolare avviene a causa degli urti casuali tra molecole dovuti al moto di agitazione termica. Dalla teoria cinetica dei gas ne consegue che, detta \mathcal{V} la metà della velocità media delle molecole e λ il libero cammino medio si ottiene $\nu \approx \mathcal{V}\lambda$.

Se allora si identificano i vortici più piccoli del flusso come le ‘molecole’ della turbolenza si può immaginare che questi, dopo aver percorso una distanza ℓ ad una velocità V , interagiscano mescolandosi tra loro e quindi diffondendo la quantità di moto. Il problema della determinazione di ν_T si tradurrà quindi nella valutazione di ℓ (detta appunto lunghezza di mescolamento) e di V .

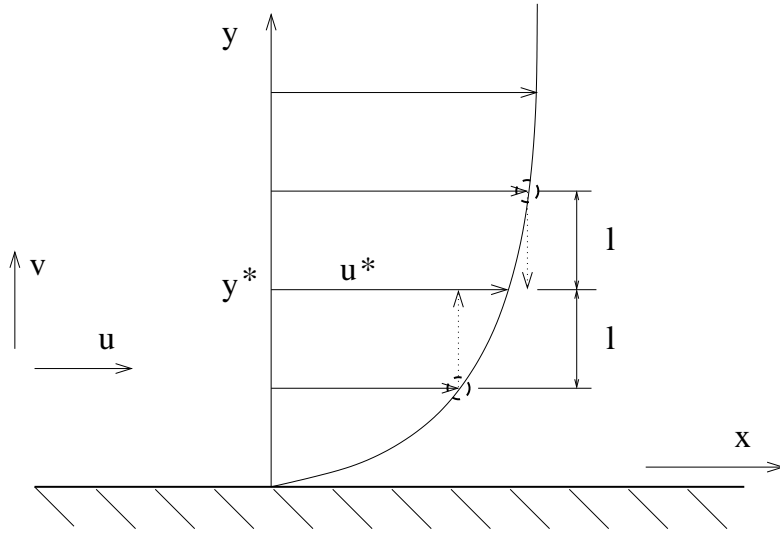


Figura 1.14: Schema di flusso per la definizione di lunghezza di mescolamento e viscosità turbolenta.

In figura 1.14 è riportato uno schema di flusso (tipo strato limite) sul quale si possono effettuare semplici ragionamenti intuitivi per determinare l'andamento di ℓ e V . Per questo flusso, infatti, la velocità media U sarà prevalentemente orizzontale ed il suo profilo dipenderà dalla coordinata normale alla parete y ; se immaginiamo che il flusso abbia uno sviluppo omogeneo in x e statisticamente non ci sia una velocità media nella direzione y , l'unico componente del tensore di Reynolds diverso da zero risulterà $\langle u'_x u'_y \rangle$ che indicheremo per semplicità $\langle u'v' \rangle$. Per mettere in relazione questa quantità incognita alle caratteristiche del flusso medio, immaginiamo quindi di posizionarci alla distanza y^* dalla parete ed osservare in quel punto sia fluttuazioni di velocità verso il basso che verso l'alto. Nel primo caso, una particella inizialmente nella posizione $y^* + l$ verrà trasportata in y^* generando una fluttuazione di velocità orizzontale

$$u'_+ \approx \Delta U_+ = U(y^* + l) - U(y^*) \simeq l \frac{dU}{dy},$$

avendo troncato lo sviluppo in serie di Taylor per la velocità al primo ordine. Analogamente, le fluttuazioni verso l'alto porteranno una particella fluida inizialmente nella

posizione $y^* - l$ in y^* inducendo una fluttuazione di velocità

$$u'_- \approx \Delta U_- = U(y^*) - U(y^* - l) \simeq -l \frac{dU}{dy}.$$

Statisticamente avremo quindi che le fluttuazioni di velocità orizzontale in y^* avranno un modulo pari a

$$u' = \frac{1}{2}(|u'_+| + |u'_-|) = l \left| \frac{dU}{dy} \right|.$$

Osserviamo ora che per la conservazione della massa, una variazione positiva di u (particella che si muove da $y^* + l$ ad y^*) induce una fluttuazione negativa di v mentre l'opposto accade per una particella che si muove da $y^* - l$ ad y^* . Ciò implica che si può porre $v' \approx -c_1 u'$ con c_1 costante di ordine uno e che il prodotto $u'v'$ deve essere sicuramente negativo. Con queste ipotesi si può scrivere

$$\langle u'v' \rangle = -c_2 |u'| |v'| = -c_1 c_2 l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 = -\ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 \quad (1.38)$$

in cui c_2 è ancora una costante di ordine uno, ℓ è la lunghezza di mescolamento e $\ell |dU/dy| = V$ è la velocità cercata. Ciò si evince facilmente confrontando la relazione appena trovata con la (1.36) ed osservando che per questo semplice flusso risulta $2E_{12} = dU/dy$ da cui si ricava $\nu_T = \ell V = \ell^2 |dU/dy|$.

L'ultimo punto che rimane da chiarire è come determinare ℓ in funzione della geometria del flusso. Prandtl nel 1925 osservò che risultando alla parete ($y = 0$) $\mathbf{u} \equiv 0$ anche gli sforzi turbolenti dovranno essere nulli in quel punto; con questo vincolo l'assunzione più semplice per la ℓ è

$$\ell = Ay. \quad (1.39)$$

Prandtl suppose anche che, tranne che per gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla parete, gli sforzi turbolenti fossero molto più grandi degli sforzi puramente viscosi, che quindi erano trascurabili, e che i primi si mantenessero di intensità costante. Indicando con $\tau_T/\rho = -\langle u'v' \rangle$ gli sforzi turbolenti l'assunzione (1.39) implica quindi

$$\frac{\tau_T}{\rho} = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2, \implies \sqrt{\frac{\tau_T}{\rho}} = Ay \frac{dU}{dy} \implies U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_T}} = \frac{1}{A} \ln y + C, \quad (1.40)$$

che fornisce l'andamento della velocità media U in funzione della distanza dalla parete.

D'altra parte, queste ipotesi non possono essere applicate alla parete dove, a causa della condizione di aderenza, il flusso deve essere laminare. In quella regione infatti si deve assumere che gli sforzi turbolenti siano trascurabili, mentre quelli viscosi sono i più rilevanti e sono approssimativamente costanti (che è equivalente ad ammettere che il profilo di velocità alla parete sia linearizzabile). Indicando quindi lo sforzo viscoso di parete come

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0}, \quad (1.41)$$

è possibile definire delle scale di velocità e lunghezza $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ e $\delta_\tau = \nu/u_\tau$ dette, rispettivamente velocità e lunghezza d'attrito, con le quali è possibile adimensionalizzare le quantità della turbolenza di parete. In particolare, la relazione (1.41) con τ_w costante può essere facilmente integrata

$$\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}U = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\frac{y}{\nu} + c \implies U^+ = y^+, \quad (1.42)$$

dovendo risultare $c = 0$ per le condizioni alla parete ed avendo indicato

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} = U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\tau} = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad (1.43)$$

dette quantità di parete.

Allo stesso modo, u_τ e δ_τ possono essere utilizzate per rendere adimensionale la (1.40) che assume la forma

$$U^+ = \frac{1}{\alpha} \ln y^+ + \beta \quad (1.44)$$

in cui $\alpha = 0.4$ e $\beta = 5.5$ sono delle costanti in cui sono compresi tutti i fattori di normalizzazione e risultano universali per tutti i flussi turbolenti di parete che ricadono nella tipologia della figura 1.14.

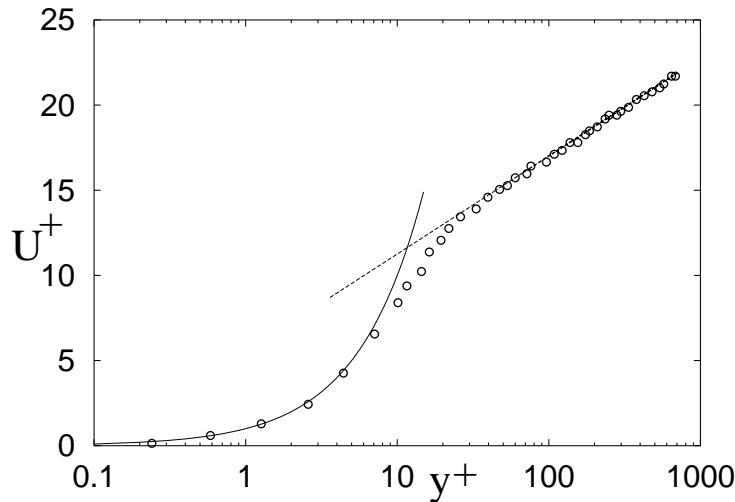


Figura 1.15: Andamento della velocità media in funzione della distanza dalla coordinata y (quantità di parete). Le linee indicano gli andamenti teorici, mentre i simboli sono valori misurati.

Un andamento tipico della velocità normalizzata U^+ in funzione delle coordinate di parete y^+ è riportato in figura 1.15 da cui si nota che il flusso ha due comportamenti distinti. Il primo per $y^+ \leq 5$ in cui la U^+ segue la legge (1.42); questa regione è detta sottostrato laminare ed è caratterizzata da sforzi puramente viscosi di intensità circa

costante. La seconda regione per $y^+ \geq 30$ segue la legge riportata in (1.44) ed è dovuta a sforzi turbolenti di intensità costante. La regione intermedia ($5 \leq y^+ \leq 30$) è una regione di sovrapposizione dei due regimi in cui sia sforzi viscosi che turbolenti hanno rilevanza sul fenomeno.

Il profilo di velocità di figura 1.15 mostra chiaramente che l'assunzione (1.39) per la lunghezza di mescolamento descrive in modo adeguato la dinamica della turbolenza di parete. Questo risultato, tuttavia, non deve trarre in inganno in quanto una tale semplificazione funziona solo nel caso in cui nel flusso non ci sono separazioni, in assenza di gradienti di pressione esterni e per geometrie piane. Nelle applicazioni pratiche la geometria del flusso è solitamente più complicata e devono essere utilizzati modelli più complessi e con fisica meno intuitiva.

1.8 simulazione numerica della turbolenza

Il meccanismo comune a tutti i fenomeni di turbolenza è la cascata dell'energia dalle strutture più grandi delle dimensioni del corpo che genera la turbolenza fino alle strutture più fini dell'ordine di grandezza della scala di Kolmogorov η . Il trasferimento di energia dalle grandi alle piccole scale avviene tramite i termini non lineari e di pressione con un processo essenzialmente non viscoso che quindi non dissipa energia. Come è stato visto brevemente nell'analisi della turbolenza omogenea ed isotropa la maggior parte dell'energia del flusso è nelle grandi scale, mentre la dissipazione avviene alle piccole scale e le prime sono in costante equilibrio con le ultime attraverso il range-inerziale.

Purtroppo per i flussi ad elevato numero di Reynolds la differenza di dimensioni esistente tra le scale più grandi e quelle più piccole diventa esorbitante ed in qualche punto della cascata bisogna necessariamente operare un taglio al di là del quale utilizzare un modello; la differenza esistente tra le varie tecniche di calcolo consiste proprio nella posizione del 'taglio' nella cascata o, in altre parole, in quali scale di moto si è disposti a calcolare e quali modellare.

La tecnica più ovvia è quella di non applicare nessun taglio alle scale del moto e simularle tutte, dalla dimensione L_G del corpo intorno o dentro cui si ha il flusso fino alla scala di Kolmogorov η . Poiché normalmente le scale di moto contenenti la maggior parte dell'energia e con dinamica non omogenea hanno dimensioni L di una frazione di quella del corpo, in questa analisi ci limitiamo a quantificare solo il rapporto L/η rammentando, però che la quantità L_G/η implica un ulteriore incremento di un fattore dell'ordine di 3–10.

Ricordando quanto ricavato per la turbolenza omogenea ed isotropa, dalla stima per ϵ , dalle relazioni (1.19) e ricordando la definizione del numero di Reynolds $Re = UL/\nu$, si ottiene:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}, \quad \frac{U}{u_\eta} = Re^{1/4}, \quad \frac{T}{t_\eta} = Re^{1/2}, \quad (1.45)$$

in cui $T = L/U$ è la scala dei tempi dei moti a grande scala.

La prima di queste relazioni ci dice che per ogni lunghezza L vi sono $Re^{3/4}$ strutture di

dimensioni η ed ognuna di queste deve essere adeguatamente rappresentata per simulare il flusso senza alcun modello. Se la simulazione avviene mediante una griglia di calcolo ciò implica che per ogni lunghezza L ci devono essere un numero di nodi $N \sim Re^{3/4}$ e quindi per un cubo di volume L^3 sono necessari $N_{tot} = N^3 \sim Re^{9/4}$ punti di calcolo. Sebbene questa stima cresca abbastanza rapidamente con il numero di Reynolds da ‘sconsigliare’ questo approccio già per valori moderati di Re , è bene precisare che la stima appena data non è completa. Infatti, siccome l’integrazione delle equazioni deve essere eseguita con un passo temporale Δt discreto, questo deve essere commisurato alla dinamica del flusso. In particolare la simulazione numerica deve essere portata avanti per un tempo lungo abbastanza da consentire la valutazione delle statistiche delle strutture più grandi (e quindi più lente) il che significa che la durata della simulazione deve essere dell’ordine di T . D’altra parte, il passo temporale non può essere più grande di t_η in quanto anche la dinamica delle scale di dimensione η deve essere catturata. Osservando quindi che risulta $T/t_\eta = Re^{1/2}$ si ha che il numero di gradi di libertà spazio-temporali è proporzionale a $Re^{11/4}$. La stima diventa ancora più severa quando si consideri che le piccole scale vengono trasportate dalle velocità indotte dalle grandi scale su una griglia fissa e quando si tenga in conto la presenza di pareti.

Come regola pratica possiamo affermare che, allo stato attuale delle cose la simulazione diretta di un flusso ad un numero di Reynolds di qualche migliaio $\mathcal{O}(5000 - 10000)$ già costituisce una sfida per i moderni supercalcolatori anche limitandosi ad una geometria semplificata. Se poi si aggiungono le complessità geometriche delle applicazioni industriali, e le disomogeneità del flusso, si arriva alla conclusione che la simulazione diretta della turbolenza, ossia la soluzione delle equazioni di Navier–Stokes senza alcun modello, non costituisce una possibilità di indagine di problemi pratici neanche nei prossimi decenni. Ciò continua ad essere vero anche ipotizzando una crescita delle potenze di calcolo simile al passato ossia con un raddoppio della velocità di elaborazione ogni 18 mesi, come si è verificato negli ultimi tre decenni (legge di Moore).

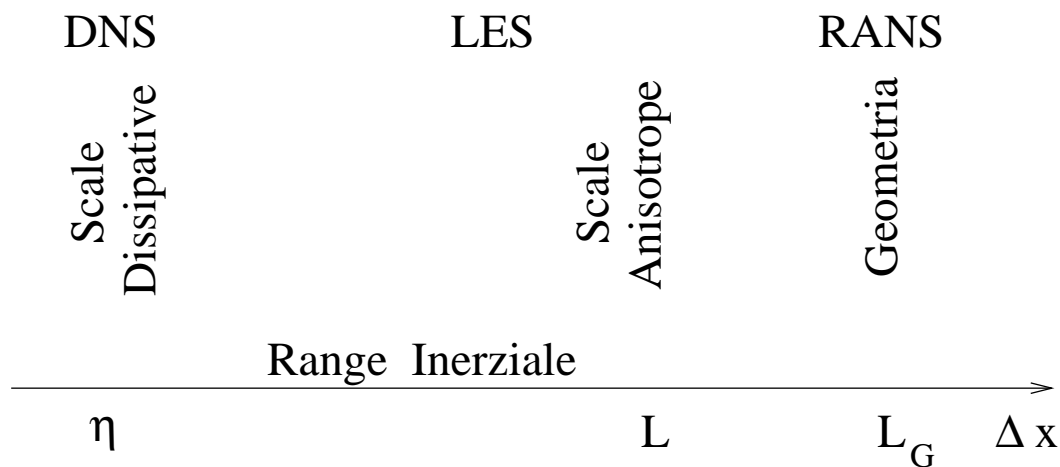


Figura 1.16: Disegno schematico dell’ampiezza della spaziatura di griglia in relazione alla tecnica di calcolo e delle scale del moto.

Una filosofia completamente opposta alla simulazione diretta è quella dei metodi RANS; questo acronimo Reynolds–Averaged–Navier–Stokes (equations) ossia equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds implica la soluzione delle equazioni (1.35) in cui il tensore di Reynolds $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ viene parametrizzato con un modello di turbolenza. Nella sezione 1.6 abbiamo commentato l'assunzione di 'gradiente diffusivo', viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento mentre in questo ambito mostreremo brevemente i modelli tipo $K - \epsilon$. In questi modelli, l'energia cinetica turbolenta K e la sua velocità di dissipazione ϵ vengono utilizzate per creare, mediante considerazioni dimensionali, una scala di lunghezze e di tempo, $\ell = K^{3/2}/\epsilon$ e $\mathcal{T} = K/\epsilon$, rispettivamente. Con queste quantità è possibile costruire una viscosità turbolenta $\nu_T = C_\nu \ell^2 / \mathcal{T}$ ossia

$$\nu_T = C_\nu \frac{K^2}{\epsilon}, \quad (1.46)$$

con C_ν una costante da determinare empiricamente. È utile notare che l'espressione per ν_T in funzione di K ed ϵ è l'unica che si può scrivere se si fa l'ipotesi che la viscosità turbolenta dipende solo da quantità turbolente mentre 'è indipendente dal campo medio o da grandezze da esso derivate. Ricordiamo che ν_T è una funzione dello spazio (e per flussi non stazionari anche del tempo) quindi anche K ed ϵ avranno valori che dipenderanno dalla particolare regione del flusso. Per determinare le distribuzioni spaziali di K ed ϵ bisogna risolvere delle equazioni di evoluzione, la prima delle quali è già stata derivata nella (1.33). Quella equazione, tuttavia, contiene a sua volta dei termini incogniti che devono essere in qualche modo modellati. La chiusura più comune è di tipo gradiente diffusivo che porta ad un'equazione del tipo

$$\frac{\mathcal{D}K}{\mathcal{D}t} = \mathcal{P} - \epsilon + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \nabla k \right), \quad \text{con} \quad \mathcal{P} = \frac{\nu_T}{2} [\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T]^2, \quad (1.47)$$

in cui di nuovo σ_k è una costante empirica. La derivata $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ è simile alla derivata materiale ma il termine di accelerazione convettiva contiene solo la velocità media \mathbf{U} invece della velocità totale \mathbf{u} .

Contrariamente all'equazione per K , quella per ϵ viene concepita direttamente come un'equazione modello in quanto i termini da parametrizzare nell'equazione esatta risulterebbero più numerosi che nell'equazione per K . La relazione normalmente utilizzata è del tipo

$$\frac{\mathcal{D}\epsilon}{\mathcal{D}t} = C_{\epsilon 1} \frac{\mathcal{P}\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right), \quad (1.48)$$

con $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ e σ_ϵ costanti da determinare.

Appare evidente come la soluzione del sistema di equazioni (1.46)–(1.48), insieme alle equazioni di Reynolds per il campo medio, sia fortemente dipendente dai valori delle costanti empiriche; un set di valori largamente utilizzato è $C_\nu = 0.09$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$ anche se questi valori vengono spesso modificati per tenere conto di condizioni di flusso diverse da quelle in cui sono stati determinati. Per flussi fortemente disomogenei come flussi rotanti o flussi stratificati vengono invece cambiate le equazioni

(1.47) e (1.48) aggiungendo altri termini (che a loro volta possono contenere ulteriori costanti empiriche) per tenere in conto il cambiamento della fisica del flusso di base.

L'estrema specificità della modellistica RANS risulta facilmente comprensibile quando si noti che con questo approccio si tende a simulare esplicitamente solo la componente media, o al più quella lentamente variabile, di un flusso mentre tutte le fluttuazioni sono modellate come turbolenza. Nella breve analisi della turbolenza isotropa, tuttavia, abbiamo visto che le scale del moto più grandi $\mathcal{O}(L)$ sono quelle meno omogenee e più dipendenti dal problema in quanto sono posizionate solo all'inizio del processo di cascata dell'energia ed ancora non hanno assunto una dinamica 'universale'. D'altra parte, le grandi scale del moto hanno deboli gradienti spaziali $\mathcal{O}(U/L)$ ed una dinamica lenta $\mathcal{O}(L/U)$, permettendone la simulazione con una griglia di calcolo la cui spaziatura è essenzialmente indipendente dal numero di Reynolds e con un passo temporale che è una frazione della scala temporale imposta dalla geometria del problema (e quindi di nuovo indipendente dal numero di Reynolds).

Attualmente, questo tipo di modellistica è quello standard a livello industriale in quanto consente di simulare flussi industriali in 'scala 1 : 1' con un costo accettabile e con risultati sufficientemente accurati quando si disponga di un set di coefficienti o di equazioni modello già validati e tarati per quel tipo di problemi.

Un terzo tipo di approccio, intermedio tra la DNS ed i RANS, è la tecnica LES o Large-Eddy-Simulation in cui tutte le strutture (anche definite come 'eddies') più grandi ma comunque già nel range inerziale vengono esplicitamente simulate con una griglia adeguatamente fitta mentre le scale del moto più piccole della griglia (o scale di sottogriglia) vengono parametrizzate con un modello. Questo approccio sembrerebbe del tutto simile alle medie di Reynolds ed effettivamente l'unica differenza è che in questo caso il 'taglio' tra ciò che viene simulato e ciò che viene modellato non dipende solo dalla geometria del problema ma anche da dove è messo il range inerziale. Il vantaggio fondamentale in questo approccio è che le scale di moto nel range inerziale si trovano nel mezzo della cascata dell'energia e sono già state adeguatamente omogeneizzate dalla successiva frammentazione delle strutture più grandi. Ciò implica che la loro dinamica sarà essenzialmente indipendente dalla particolare geometria del problema ed avrà un carattere più universale. In questo caso è possibile derivare un unico modello di turbolenza che vada bene per qualunque tipologia di flusso e debba essere tarato una sola volta per tutte.

La derivazione delle equazioni per la modellistica LES è effettuata in modo molto simile alle equazioni di Reynolds. Definendo infatti un'operazione di filtraggio

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \quad (1.49)$$

è possibile suddividere i campi di velocità e pressione in parte filtrata e parte di sottogriglia

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t). \quad (1.50)$$

$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$ è il filtro che può essere definito sia nello spazio fisico che nello spazio dei numeri d'onda e può avere numerose forme specifiche (gaussiana, finestra rettangolare, finestra triangolare, etc.); la caratteristica comune a tutti i filtri è che hanno un supporto

compatto nello spazio e tagliano in qualche modo le scale del moto più piccole di quelle del supporto del filtro. È importante notare che differentemente dalle medie di Reynolds, si hanno in generale le seguenti disuguaglianze:

$$\overline{\mathbf{U}} \neq \mathbf{U}, \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{u}'} \neq 0, \quad (1.51)$$

inoltre l'operazione di filtraggio e quella di differenziazione non è detto che siano commutative. Sebbene sia possibile trovare dei filtri per cui le disuguaglianze (1.51) diventino delle uguaglianze e per i quali filtro e derivata siano commutativi, lasceremo ai testi specialistici la discussione di tutte le eventualità; in queste brevi note, ci vogliamo invece limitare a mostrare le equazioni filtrate ed un possibile semplice modello.

Ammettendo la commutatività tra filtro e derivazione spaziale, filtrando le equazioni di Navier–Stokes si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_{sgs}), \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\tau}_{sgs} = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \mathbf{U}\mathbf{U}, \quad (1.52)$$

in cui \mathbf{E} è il tensore velocit]a di deformazione calcolato con il campo filtrato e $\boldsymbol{\tau}_{sgs}$ sono gli sforzi di sottogriglia analoghi agli sforzi di Reynolds nelle equazioni RANS. Questi sforzi vengono modellati con un'ipotesi di 'gradiente diffusivo' e la loro parte deviatorica viene parametrizzata con una viscosità turbolenta $\boldsymbol{\tau}_{sgs} - Tr(\boldsymbol{\tau}_{sgs}) = -2\nu_T \mathbf{E}$. L'espressione per ν_T viene determinata assumendo che per le scale di moto delle dimensioni della spaziatura di griglia Δ la produzione e la dissipazione di energia cinetica turbolenta siano in equilibrio il che porta alla relazione $\nu_T = C\Delta^2 \sqrt{(\mathbf{E})^2}$.

Vista la struttura del tutto identica tra la modellistica LES e quella RANS è lecito domandarsi perchè la prima sia preferibile alla seconda, anche in considerazione del fatto che dovendo simulare le scale del modo fino al range inerziale il costo computazionale per una simulazione LES è notevolmente più elevato di una RANS. La risposta è nel fatto che nel range inerziale avviene essenzialmente un trasferimento di energia verso le scale dissipative e questo trasferimento ha un carattere universale. In questo caso è sufficiente che i termini modellati nelle (1.52) sottraggano la giusta quantità di energia al campo medio indipendentemente dal meccanismo particolare che sottrae questa energia.

Prima di concludere questa breve panoramica, vogliamo sottolineare che in prossimità di pareti tutte le stime appena fornite vengono severamente modificate dal fatto che non esiste più una netta separazione tra grandi e piccole scale. In particolare, riconsiderando la relazione (1.39) nell'ottica delle scale del moto, si intuisce che in prossimità di pareti, la scala integrale L del moto dipende dalla distanza stessa dalla parete e diminuisce inesorabilmente con la distanza dalla superficie stessa. In questo scenario è evidente che tutti i modelli di turbolenza diventano esosi in termine di richieste computazionali che cessano di essere indipendenti dal numero di Reynolds ma, al contrario, crescono all'aumentare di questo parametro. Questa osservazione introduce la questione della modellistica specifica della turbolenza di parete che, sebbene non sia stata trattata in queste note, riveste un'importanza applicativa almeno pari a quella della turbolenza omogenea.