

Strato limite incompressibile

Capitolo 10

Strato limite incompressibile

Come detto le condizioni di flusso a $Re \rightarrow \infty$ sono tali per cui è possibile in molti problemi applicativi separare lo studio del campo di velocità complessivo nel modo seguente:

1. Flusso esterno potenziale
2. Flusso interno viscoso

Come si vedrà lo studio del problema 'flusso interno' è fortemente semplificato grazie alla teoria dello strato limite, nel caso in cui non si abbiano distacchi o ricircolazioni quali si verificano ad esempio in presenza di stallo o di corpi tozzi.

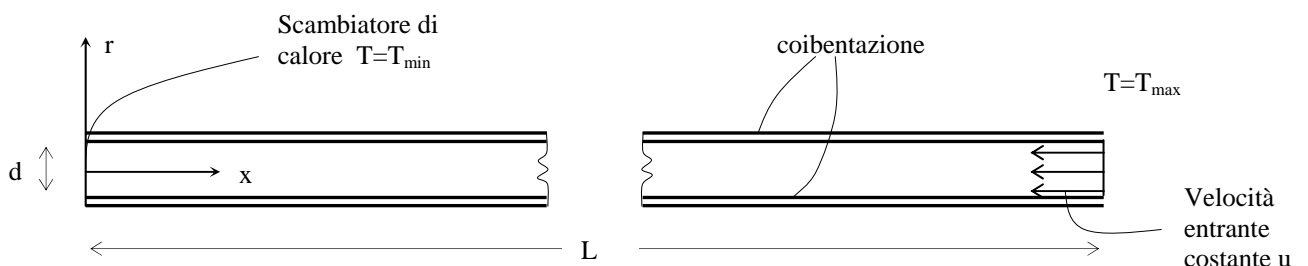
In presenza di strato limite la soluzione esterna può in prima approssimazione essere condotta separatamente dalla soluzione interna mentre quest'ultima dipende in modo rilevante dalle soluzioni esterne .

Per capire il significato matematico del processo di limite per Re che tende all'infinito, nelle equazioni di governo dei campi fluidodinamici si usa il metodo della perturbazione singolare.

Per ridurre la complessità matematica mantenendo gli aspetti concettuali dei principi fondamentali della teoria dello strato limite si considera, a titolo di esempio, l'equazione di conservazione dell'energia termica in condizione stazionaria, in presenza di conduzione, convezione, e sorgenti volumetriche di calore .

10.1 Metodo della perturbazione singolare applicato allo strato limite termico in situazione di flusso incompressibile, stazionario, monodimensionale (1D)

Consideriamo il problema fisico di un tubo di lunghezza $L \gg d$ (diametro), ad esempio $L=1000m$, $d=0.2m$.

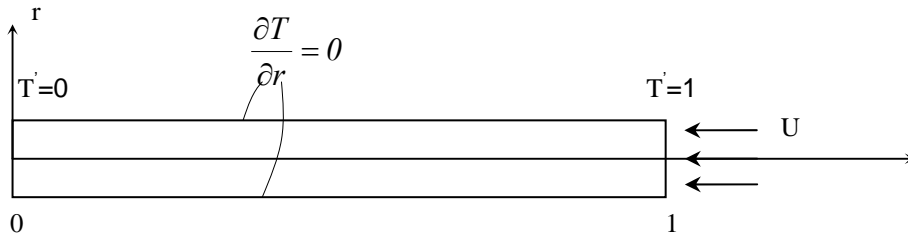


Se le pareti sono adiabatiche, possiamo ipotizzare che valga un modello monodimensionale (1D):

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dx} = 0$$

$$u_2 = u_3 = 0 \quad \text{o} \quad u_r = 0$$

cioè l'area della sezione non varia.



L'equazione dell'energia termica in termini di temperatura (3.51) sotto le ipotesi dette e per $Ec \ll 1$ ed ipotizzando si tratti di un liquido ($c_v = c$), si riduce a :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \rho q \quad (10.1)$$

Si consideri il caso stazionario $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0; St \rightarrow \infty \right)$:

quindi :

$$\rho c_p \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = k \nabla^2 T + \rho q \quad (10.2)$$

che nel caso monodimensionale si riduce a:

$$-\rho c_p u \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} = \rho q$$

cioè rendendola in forma adimensionale :

$$\frac{dT'}{dx'} + \frac{k}{\rho c_p u L} \frac{d^2 T'}{dx'^2} = -\frac{qL}{c_p u T} \quad \text{avendo usato} \quad T' = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}} = \frac{T - T_{min}}{\Delta T}; \quad x' = \frac{x}{L}$$

Definendo il numero di Peclet (Pe), come:

$$Pe = Pr \times Re = \frac{c_p \mu}{k} \frac{uL\rho}{\mu} \quad (10.3)$$

e come secondo numero adimensionale:

$$q' = \frac{qL}{c_p u T} \quad (10.4)$$

si ottiene (togliendo gli apici per semplificare la notazione):

$$L(T) = \frac{dT}{dx} + \frac{1}{Pe} \frac{d^2T}{dx^2} = -q \quad (10.5)$$

avendo definito l'operatore differenziale $L(T) = \frac{d}{dx} + \frac{1}{Pe} \frac{d^2}{dx^2}$

con le condizioni al contorno :

$$\begin{cases} x = 0, T = 0 \\ x = 1, T = 1 \end{cases} \quad (10.6)$$

Si possono ottenere due formulazioni asintotiche, la prima per $Pe \rightarrow 0$ ($Re \rightarrow 0$)¹, e la seconda per $Pe \rightarrow \infty$ ($Re \rightarrow \infty$). Come già detto, la teoria dello strato limite si introduce per $Re \rightarrow \infty$. Si ha cioè:

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} L(T) = \frac{dT}{dx} = -q \quad (10.9)$$

che dà la soluzione:

$$T(x) = -qx + \text{cost} = (1+q) - qx \quad (10.10)$$

avendo imposto le condizioni al contorno (10.6.b)

Si noti che questa soluzione dà per i valori al contorno $\begin{cases} x = 0 \rightarrow T = 1+q \\ x = 1 \rightarrow T = 1 \end{cases}$ e pertanto

la (10.6) per $x=0$ non è rispettata, il che dimostra la necessità di studiare la soluzione per $x=0$ in maggiore dettaglio.

Cerchiamo ora, quale riferimento, la **soluzione generale analitica** per Pe qualunque.

Cerchiamo prima la soluzione generale dell'omogenea associata:

$$T_g(x) = e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda x} + \frac{1}{Pe} \lambda^2 e^{\lambda x} = 0$$

¹ La formulazione asintotica per $Pe \rightarrow 0$ ($Re \rightarrow 0$) dà:

$$\lim_{Pe \rightarrow 0} L(T) = \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (10.7)$$

avente come soluzione asintotica:

$$T(x)=x \quad (10.8)$$

cioè $\lambda=0$, $\lambda=-Pe$

$$T_g(x) = C_1 + C_2 e^{-Pe x} \quad (10.11)$$

Cerchiamo quindi la soluzione particolare:

$$T_p(x) = -q x \quad (10.12)$$

Definiamo i valori delle costanti sulla base delle condizioni al contorno (10.6):

$$\begin{cases} T(x) = C_1 + C_2 e^{-\lambda Pe} - qx \\ x = 0, T = 0 \\ x = 1, T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 e^{-Pe} - q = 1 \\ C_2 \left(1 - \frac{1}{e^{Pe}}\right) + q = 1 \end{cases}$$

Così :

$$C_2 = -\frac{(1+q)}{(1-e^{-Pe})} \quad C_1 = \frac{1+q}{(1-e^{-Pe})} ,$$

La soluzione della (10.5) con le condizioni al contorno (10.6), sarà :

$$T(x) = \frac{(1+q)}{(1-e^{-Pe})} (1 - e^{-xPe}) - q x \quad (10.13)$$

Verifichiamo che il valore asintotico della soluzione generale (10.13) uguagli le soluzioni delle formulazioni asintotiche². Per quanto riguarda il $\lim_{Pe \rightarrow \infty}$, si ha:

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} T(x) = (1+q) - qx \quad (10.14)$$

² Per $Pe \rightarrow 0$ (soluzione diffusiva o conduttiva) si ottiene (applicando l'Hopital per la forma indeterminata): $\lim_{Pe \rightarrow 0} T(x) = (1+q)x - qx = x$ che uguaglia la (10.8)

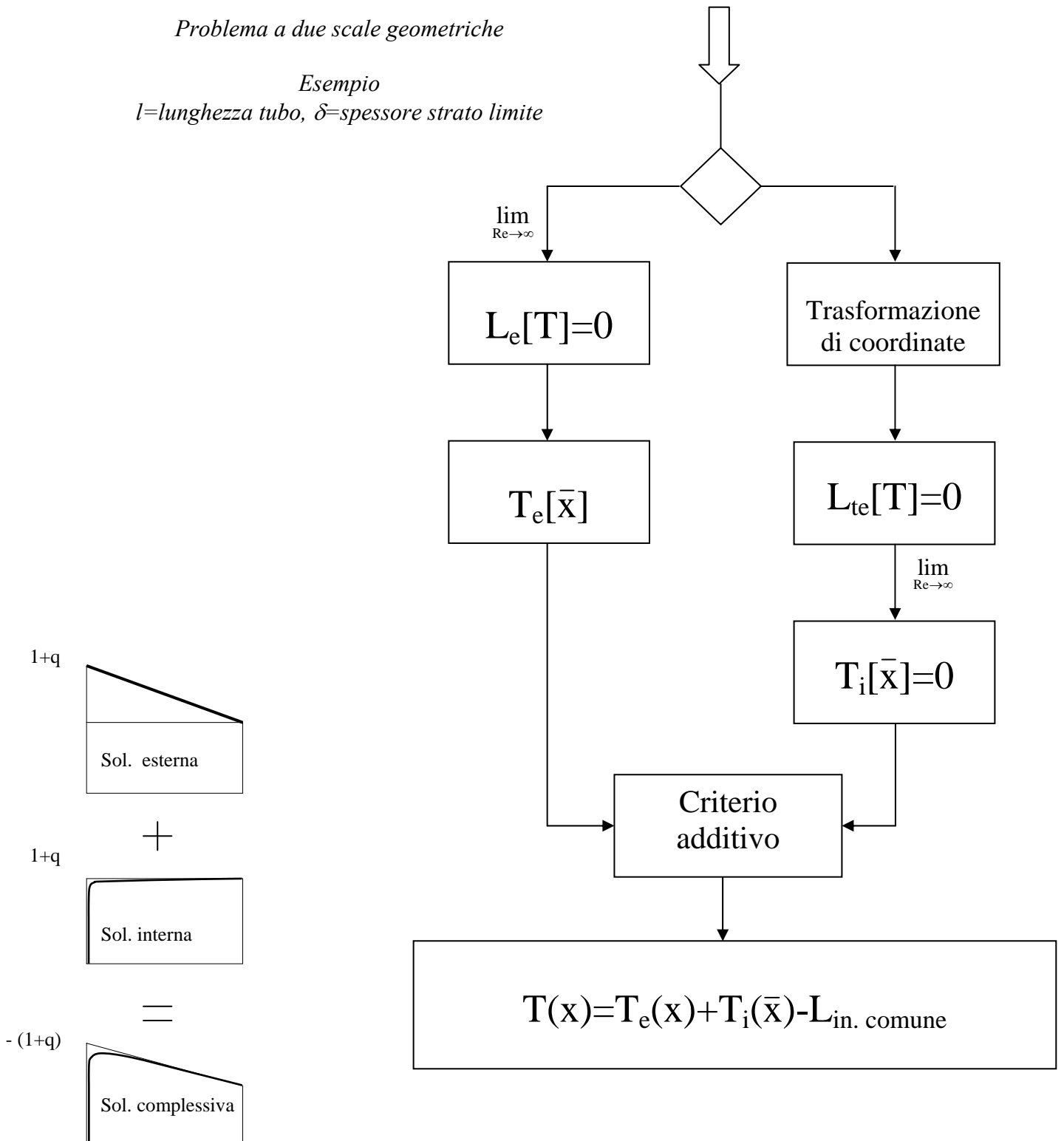
Problema fisico con incognita

$$T(x) \leftarrow L[(T), Re] = 0$$

Problema a due scale geometriche

Esempio

l =lunghezza tubo, δ =spessore strato limite



che, come atteso, è uguale alla (10.10) e non soddisfa le (10.6) ad $x=0$.

Per superare il problema del non soddisfacimento della condizione al contorno sulla parete ($x=0$) si introduce la teoria dello strato limite che, matematicamente, corrisponde al metodo della perturbazione singolare. Tale metodologia si basa su una trasformazione di coordinate che mediante un ingrandimento locale vicino alla parete, verifica il comportamento locale, lo modifica per soddisfare localmente la condizione al contorno (soluzione interna) senza incidere significativamente sulla soluzione complessiva (detta soluzione esterna).

■ Soluzione esterna

La soluzione esterna è data dalle (10.14). Per $x=0$ e per $T(x)=(1+q)-qx$ si ha il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} T_e(x) = 1 + q \quad (10.15)$$

■ Soluzione interna

Operiamo un passaggio di coordinate:

$$x'' = x Pe \quad (10.16)$$

così da avere un ingrandimento locale vicino alla parete:

$$Pe \frac{dT}{dx''} + Pe \frac{d^2T}{dx''^2} = -q \quad (10.17)$$

Per $Pe \rightarrow \infty$

$$\frac{dT}{dx''} + \frac{d^2T}{dx''^2} = 0 \quad (10.18)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} x' = 0 \rightarrow T_i(x') = 0 \\ \lim_{x'' \rightarrow Pe} T_i(x') = \lim_{x \rightarrow 0} T_e(x) \end{cases} \quad (10.19)$$

cioè si utilizza una condizione di raccordo che mi dice che il limite esterno della soluzione interna è uguale al limite interno della soluzione esterna, essendo la soluzione:

$$\begin{aligned} T(x) &= e^{\lambda x''} \\ \Rightarrow \lambda e^{\lambda x''} + \lambda^2 e^{\lambda x''} &= 0 \end{aligned} \quad (10.20)$$

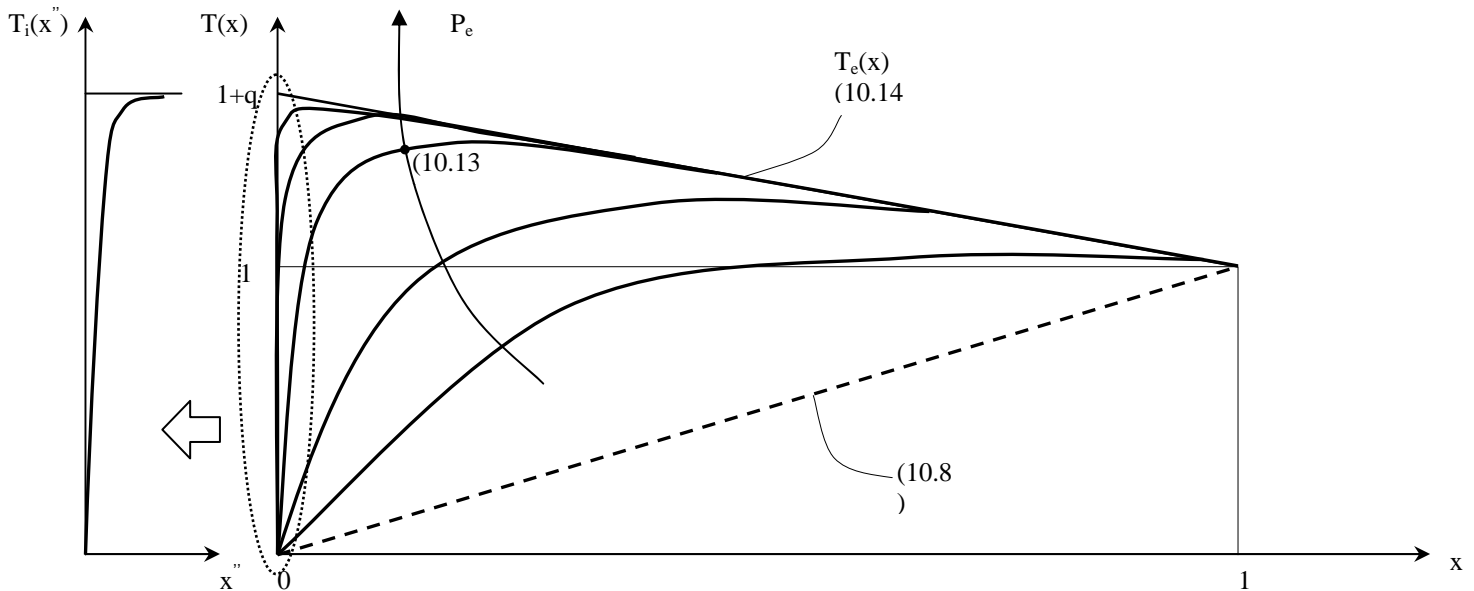
$$\begin{cases} T(x) = C_1 + C_2 e^{-x''} \\ x'' = 0, T(x') = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0; C_2 = -C_1 \end{cases} \quad (10.21)$$

La soluzione intera è: $T_i(x'') = C_1(1 - e^{-x''})$

In cui la costante C_1 si determina con la condizione al contorno (10.19b):

$$\begin{cases} T_i(x) = \frac{1+q}{1-e^{-Pe}}(1-e^{-xPe}) \\ T_e(x) = 1+q-qx \end{cases} \quad (10.22)$$

Pertanto, ricordando le (10.8), (10.13) e le (10.22) si ha il risultato riportato in figura:



Bisogna ora individuare un criterio per combinare le soluzioni T_i e T_e (10.22) in modo da avere un solo $T(x)$ che poi confronteremo con la soluzione analitica (10.13). Esistono due criteri, uno additivo ed uno moltiplicativo:

■ Criterio additivo

La soluzione completa è data da :

$$T(x) = T_e(x) + T_i(x) - \text{limite comune}$$

cioè :

$$\begin{aligned} T(x) &= (1+q) - qx + \frac{1+q}{1-e^{-Pe}}(1-e^{-xPe}) - (1+q) \\ \Rightarrow T_A(x) &= \frac{1+q}{1-e^{-Pe}}(1-e^{-xPe}) - qx \end{aligned} \quad (10.23)$$

Che, nel presente caso lineare, coincide con la soluzione esatta (10.13) nel caso lineare e pertanto ritengo pienamente soddisfacente.

■ Criterio moltiplicativo

$$T_M(x) = \frac{T_e(x) \cdot T_i(x)}{\text{limite comune}} = \left[\frac{1+q}{1-e^{-Pe}} (1-e^{-xPe}) \right] \frac{[(1+q)-qx]}{1+q} \quad (10.24)$$

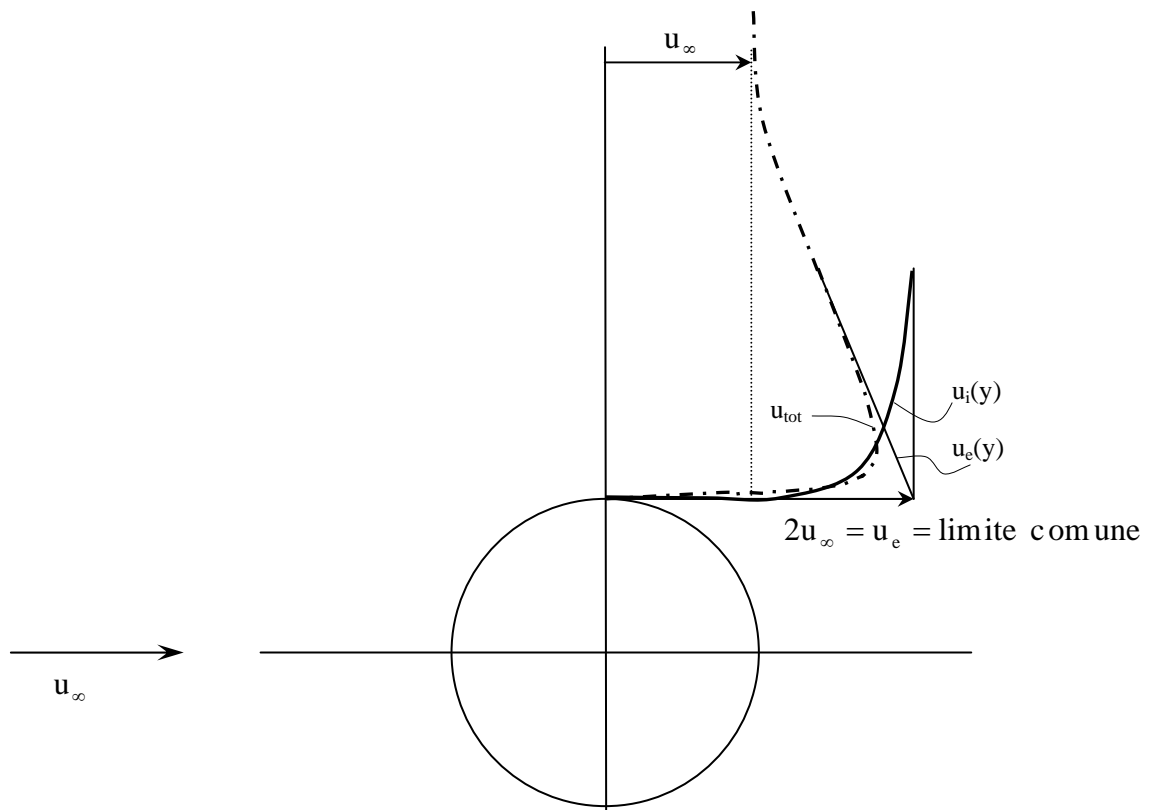
cioè:

$$T_M(x) = \frac{1+q}{1-e^{-Pe}} (1-e^{-xPe}) - qx \frac{1-e^{-xPe}}{1-e^{-Pe}} \quad (10.25)$$

$$T_M = (1+q - qx) \left(\frac{1-e^{-xPe}}{1-e^{-Pe}} \right) \quad (10.26)$$

che però nel presente caso non sembra andare troppo bene.

Vediamo ora come quanto detto può estendersi allo strato limite cinematico. Ad esempio per il cilindro :

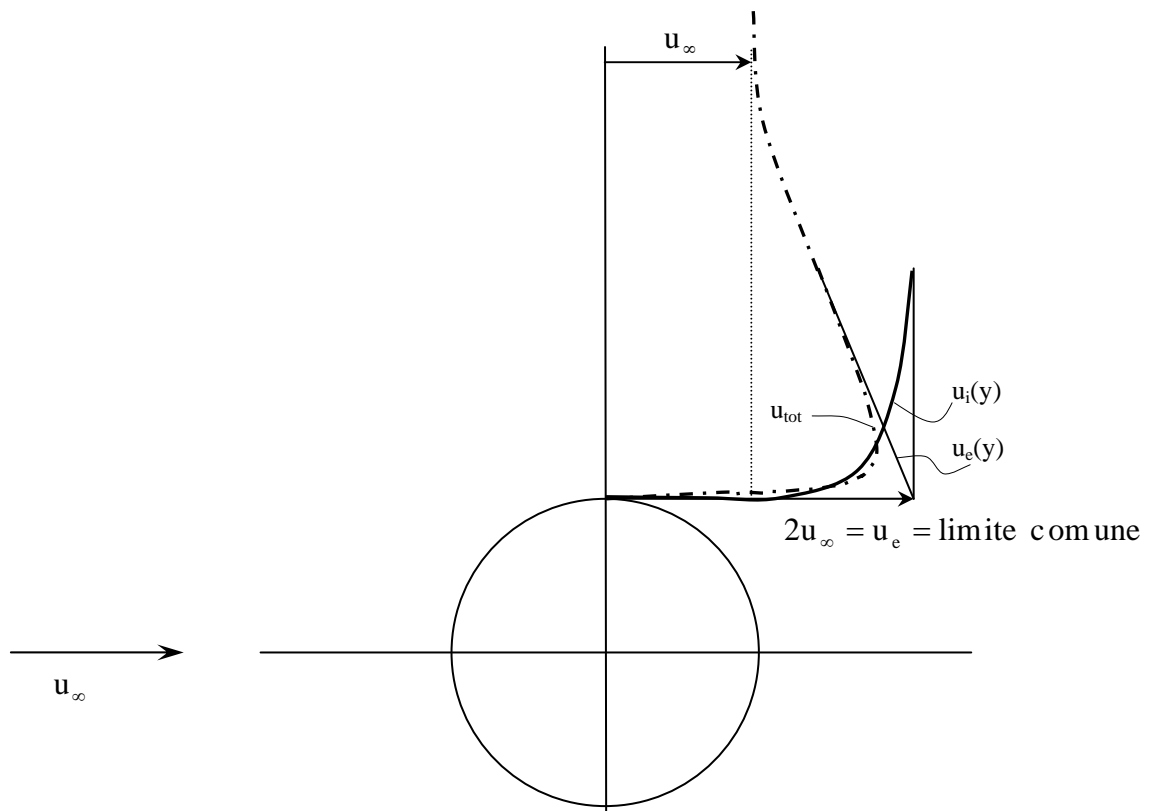


Si può scrivere : $u_{tot} = u_i + u_e - \text{limite comune}$
 $v_{tot} = v_i + v_e - \text{limite comune} = v_i$

Il problema è non lineare, bisogna utilizzare un metodo iterativo essendo $\bar{u}_e = \bar{\nabla} \varphi$ e $v_e = 0$ come il limite comune per la condizione di impermeabilità.

10.2 Strato limite cinematico (o dinamico) bidimensionale di un flusso incompressibile, stazionario

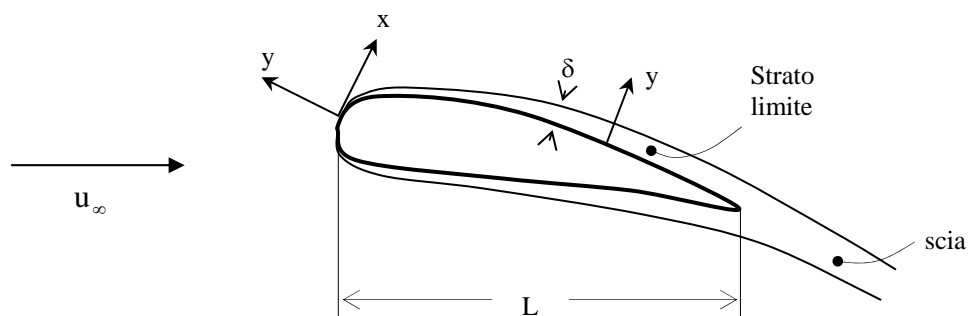
Vediamo come le considerazioni fatte in questo semplice esempio possono essere estese allo strato limite (SL) cinematico (dinamico) 2D che per la sua natura fisica è retto da equazioni non lineari. Prendiamo ad esempio un cilindro circolare la cui soluzione è stata presentata al 4.10.3. Per $g = \frac{\pi}{2}$, $r = a$, $u_\theta = 2u_\infty$ e per quanto visto al



10.1

Per la teoria allo strato limite, ci si pone ($x'' = R_e x'$) molto vicino alla parete e quindi le equazioni sono scritte in coordinate cartesiane di parete (locali). In questo sistema di coordinate si ha:

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes 2D per flussi incompressibili :



$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} \right) \end{array} \right. \quad (10.27.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} \right) \end{array} \right. \quad (10.27.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad (10.27.c)$$

Poiché le scale geometriche, una legata a L (corda del profilo) ed una legata allo spessore dello strato limite δ , sono molto diverse (problema a due scale), le equazioni come vedremo nel seguito, devono essere scritte in forma adimensionale utilizzando le due diverse scale. Sulla base delle considerazioni fisiche e matematiche si può affermare che per Re alti :

1. In prossimità della parete i gradienti normali della velocità tangente $u_\tau = u_1$ devono essere molto elevati in quanto la velocità deve comunque annullarsi sulla parete e la

$$\tau = \mu \frac{\partial u_1}{\partial n}$$

dovrà essere finita. La regione dove i gradienti sono elevati e si risente dell'influenza della viscosità è detta **strato limite** (SL) (in inglese Boundary Layer)

2. In tutta la regione esterna l'effetto della viscosità è trascurabile e pertanto in tale regione il flusso è generalmente irrotazionale e potenziale.

Per adimensionalizzare le (10.27) poniamo :

$$x' = \frac{x_1}{L}; y'' = \frac{x_2}{\delta}; v'' = \frac{u_2}{V}; u' = \frac{u_1}{U} \quad (10.28)$$

essendo δ lo spessore convenzionale dello SL alla distanza dal bordo d'attacco pari alla lunghezza di riferimento L .

- Conservazione della massa

$$\begin{aligned} \frac{U}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v''}{\partial y''} &= 0 \\ \frac{U}{V} \cdot \frac{\delta}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} &= 0 \end{aligned} \quad (10.29)$$

e quindi affinché i due termini delle 10.29 si possano bilanciare

$$\frac{V}{U} = o\left(\frac{\delta}{L}\right), \text{ cioè } \quad \frac{U}{V} \frac{\delta}{L} = 1 \quad (10.30)$$

L'equazione di conservazione della massa nel nuovo sistema di coordinate (x', y'') diventa:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \quad (10.31)$$

- Quantità di moto

Consideriamo l'equazione secondo la tangente alla parete (10.27.a).

$$\rho \frac{U^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho \frac{VU}{\delta} v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = \frac{P_0}{L} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu U}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \right) \quad (10.32)$$

che possiamo scrivere come $L(\bar{u}) = 0$ con L operatore differenziale.

Facendo il limite $\lim_{Re \rightarrow \infty} L(\bar{u})$ bisogna imporre che compaia almeno un termine viscoso dell'ordine di 1 per bilanciare i termini d'inerzia³ e portare la velocità a zero sulla parete.

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} L(\bar{u}) = u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} + \frac{1}{Ru} \frac{\partial P'}{\partial x'} - \frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} = 0 \quad (10.33)$$

con $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ definito nel modo usuale, consegue che

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{1}{Re} = o(1) \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} = \frac{1}{Re} \quad (10.34)$$

e quindi

$$\delta = o\left(\frac{L}{\sqrt{Re}}\right) \quad (10.35)$$

$$\delta \propto \frac{L}{\sqrt{Re}} \Rightarrow V \propto \frac{U}{\sqrt{Re}} \quad (10.36)$$

$$\text{Quindi : } y'' = x_2 \frac{\sqrt{Re}}{L}; v'' = u_2 \frac{\sqrt{Re}}{U} \quad (10.37)$$

quindi mediante l'analisi dimensionale della prima equazione di Navier-Stokes abbiamo determinato le scale di ingrandimento delle ordinate (y) e delle velocità normali (v) affinché i valori adimensionali siano dell'ordine di 1.

³ Si assume nel seguito $Ru=1$ cioè $P_0 = \rho U^2$ che è quanto deriva dal flusso potenziale esterno.

Formalmente la (10.32) risulterebbe:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{v''}{\sqrt{Re}} \frac{\partial u'}{\partial y''} \sqrt{Re} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} Re \right)$$

Prendo il limite per Re che tende all'infinito ed ottengo :

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \quad (10.38)$$

Analogamente, dalla seconda equazione (componente normale alla parete) :

$$\begin{aligned} \frac{u'}{\sqrt{Re}} \frac{\partial v''}{\partial x'} + \frac{v''}{\sqrt{Re}} \frac{\partial v''}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial y''} \sqrt{Re} + \\ + \left(\frac{1}{Re^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 v''}{\partial x'^2} + \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2} \right) \end{aligned} \quad (10.39)$$

Dividendo ambo i membri della precedente con $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ si ha:

$$\frac{u'}{Re} \frac{\partial v''}{\partial x'} + \frac{v''}{Re} \frac{\partial v''}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial y''} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v''}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2} \quad (10.39 \text{ bis})$$

Facendo il limite per $Re \rightarrow \infty$ si avrebbe $\frac{\partial P'}{\partial y''} = o\left(\frac{1}{Re}\right)$ cioè il salto di pressione

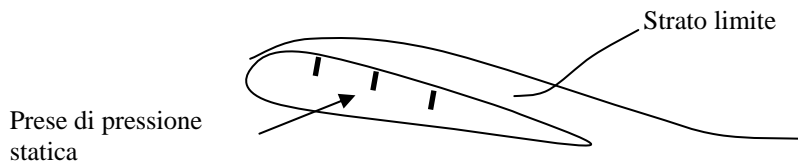
nello strato limite è dell'ordine di $\int_0^{\delta/L} \frac{\partial P'}{\partial y''} dy''$ e quindi in termini adimensionali

$P\left(\frac{\delta}{L}\right) - P(0) \cong \frac{1}{Re^{3/2}}$. Ciò ha una fondamentale importanza sia teorico-matematica

che pratica. Infatti dal punto di vista teorico-matematico si ottiene il risultato che

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP_e}{dx}$ cioè la pressione non è più incognita e l'equazione (10.39) è

soddisfatta con notevoli semplificazioni. Inoltre nella sperimentazione le prese di pressione statica possono essere posizionate sulla superficie del corpo (profilo), cioè dentro lo strato limite invece che all'esterno dello strato limite.



Per avere un'idea delle variazioni di P con y'' poniamo

$Re \cdot Ru^{-1} = o(1)$ nelle (10.33)

$$\frac{P_0}{\rho U^2} \frac{LU\rho}{\mu} \approx o(1) \text{ e ricaviamo } P_0 = \frac{\mu U}{L}$$

ad esempio per aria a 10 m/s $P_0 = o(10^{-4})pasc$ e $P_0 = o(10^2)pasc$. e quindi la variazione di pressione nello strato limite è dell'ordine di 10^{-6} rispetto alla pressione dinamica locale (errore certamente accettabile sulla misura).

Pertanto il sistema (10.27) in forma adimensionale e con le scale assunte, si riduce a:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = - \frac{d P_e'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \end{array} \right. \quad (10.40)$$

che è parabolico in quanto evolve in x' .

Sono necessarie le condizioni al contorno ($y''=0$ e $y''=\infty$) e le condizioni iniziali a $x=x_0'$

$$u' = v'' = 0 \quad \text{sul corpo } (y''=0)$$

$$u' = U'_e \quad \text{all'esterno dello strato limite } (y'' \rightarrow \infty \text{ cioè } y'' = 6 \div 7)$$

$$u' = \tilde{u}'(y'') \quad \text{per } x' = x_0'$$

che si trasforma in

$$\left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = U'_e \frac{\partial U'_e}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \\ u' = v'' = 0 \text{ per } y'' = 0 \\ u' = U'_e \text{ per } y'' \rightarrow \infty \\ u' = \tilde{u}'(y'') \text{ per } x' = x_0' \end{array} \right. \quad (10.41)$$

Tenendo conto che U_e è nota dalla soluzione esterna potenziale e che:

- scritta fuori dello strato limite la (10.40) rispetta Bernouilli: infatti, per Bernouilli imposto all'esterno :

$$P_e + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = cost$$

$$\frac{dP_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$$

ed in termini adimensionali $\frac{dP'_e}{dx'} = -U'_e \frac{dU'_e}{dx'}$

che può anche essere ottenuta dalla (10.40) scritta fuori dello strato limite: pertanto può essere sostituita nella (10.40) dando le (10.41)

$$\frac{dP'_e}{dx'} = -U'_e \frac{dU'_e}{dx'} \quad (10.42)$$

Nelle (10.41) U'_e è la componente della velocità del flusso esterna lungo la tangente al corpo. Si noti che queste equazioni (10.41) non dipendono dal Re e poiché anche l'equazione del potenziale non dipende dal Re si può affermare che per $Re \rightarrow \infty$ sia la soluzione esterna (potenziale) che la soluzione interna (strato limite) non dipendono dal Re. Pertanto gli unici gruppi adimensionali che potranno comparire sono quelli a carattere geometrico (allungamento, rugosità relativa, ecc.)⁴.

- scritta sul corpo ($y''=0$ e $u'=v''=0$) la (10.40) dà:

$$\left. \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right|_{wall} = \frac{dP'_e}{dx'} \quad (10.43)$$

⁴ Le equazioni dello strato limite in forma dimensionale risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u = v = 0 \text{ sul corpo } (y = 0) \\ u = U_e \text{ all' esterno dello strato limite (per } y \rightarrow \delta) \\ \bar{u} = \bar{u}(y) \text{ per } x = x_0 \end{array} \right. \quad (10.44)$$

10.3 Equazioni dello strato limite in termini di ψ (funzione di corrente)

Essendo le equazioni dello strato limite bidimensionali ed incompressibili (campo solenoidale) si può introdurre la funzione di corrente:

$\psi'(x', y'')$ tale che:

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y''} \quad v'' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (10.48)$$

La condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (10.31) è ovviamente identicamente soddisfatta dalle (10.48). La quantità di moto in x' dà:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y''} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y''} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y''^2} = \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y''^3} + U'_e \frac{dU'_e}{dx'} \quad (10.49)$$

da completare con le condizioni al contorno:

$$\text{Impermeabilità} \quad \rightarrow \quad v'' = 0 \Rightarrow \psi' \Big|_{\text{wall}} = 0$$

$$\text{Non scorrimento} \quad \rightarrow \quad u' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi'}{\partial y''} \Big|_{\text{wall}} = 0 \quad (10.50)$$

$$\text{Velocità all}'\infty \quad \rightarrow \quad u' = U_e \Rightarrow \frac{\partial \psi'}{\partial y''} \Big|_e = U_e$$

più la condizione iniziale

$$\text{per } x' = 0 \rightarrow \psi'(y'') = \tilde{\psi}'(y'') \quad (10.51)$$

profilo di ψ' o di u' assegnato.

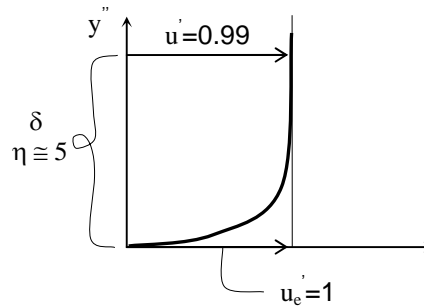
L'equazione (10.49) con le condizioni al contorno (10.50) e (10.51) è un'equazione differenziale del III° ordine alle derivate parziali nell'unica incognita ψ' e può quindi essere integrata con metodi *numerici alle differenze* (DF=differenze finite, VF=volumi finiti, EF=elementi finiti, ecc.). Altre metodologie applicabili in situazioni particolari sono quelle delle *soluzioni simili* e i *metodi integrali* che vedremo nel seguito.

10.4 Metodi integrali per lo strato limite (equazione di Von Karmann-Pholhausen)

10.4.1 Spessore dello strato limite

Sono possibili diverse definizioni di spessore dello SL:

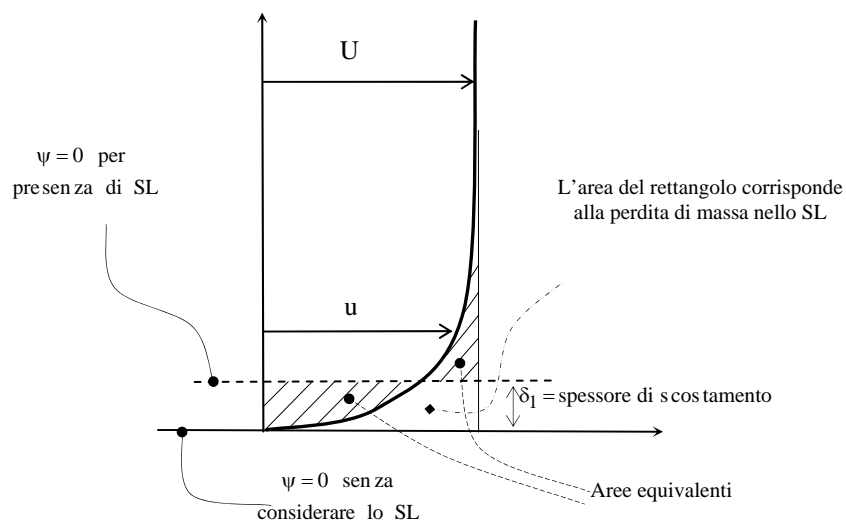
- Blasius ha definito come spessore δ convenzionalmente la distanza per la quale $u'_s = u'/U'_e = u/U_e = 0.99$,



Si trova $\eta \cong 5$ e corrispondentemente:

$$\delta_B = 5\delta(1)\xi^{1/2} = \frac{5L}{\sqrt{Re_L}} \xi^{1/2} = 5\sqrt{\frac{L\mu}{U\rho}} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (10.122)$$

- Piu' interessante è lo spessore di scostamento δ_I che rappresenta lo spessore di cui bisogna aumentare lo spessore del corpo per tenere conto di quanto si spostano le linee di corrente per effetto dello SL.



$$U_e \delta_1 = \int_0^{\infty} (U_e - u) dy \quad (10.123)$$

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (10.124)$$

ma

$$u = U_e f' \quad (10.125)$$

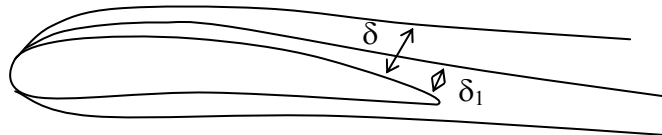
e quindi per Blasius (lastra piana) si ha:

$$\delta_{1B} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} [\eta_{max} - f(\eta_{max})] \quad (10.126)$$

da cui (con la formula di Blasius) si ottiene:

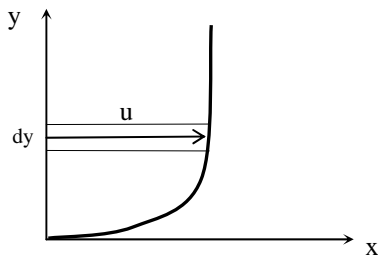
$$\delta_{1B} = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$$

che è circa 1/3 della definizione della (10.122)



- Spessore di quantità di moto δ_2 . Questa quantità misura, analogamente allo spessore di scostamento δ_1 , la distanza di cui si deve aumentare lo spessore del corpo per riequilibrare la perdita di quantità di moto dovuta allo SL.

$$U_e^2 \delta_2 = \int_0^{\infty} u (U_e - u) dy \quad (10.127)$$



La quantità di moto associata alla massa

$$dm = \rho u dy \quad (10.128)$$

sarà, alla velocità esterna U_e :

$$dm \cdot U_e = \rho U_e u dy \quad (10.129)$$

La quantità di moto alla velocità u (alla distanza y), sarà

$$dm \cdot u = \rho u^2 dy \quad (10.130)$$

pertanto la perdita di quantità di moto della massa dm risulta:

$$\rho U_e^2 \delta_2 = \int_0^{\infty} (\rho u U_e - \rho u^2) dy = \rho U_e^2 \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (10.131)$$

La (10.131) uguaglia le perdite della quantità di moto della massa dm alla quantità di moto posseduta dal fluido alla velocità U_e .

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (10.132)$$

Nel caso di lastra piana (Blasius):

$$\delta_2 = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}$$

che è circa 1/8 di δ_B .

10.4.2 Equazione di Von Karmann-Pholhausen

Integriamo l'equazione del moto per lo strato limite in forma dimensionale (10.44) su uno spessore (h) maggiore dello strato limite:

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.133)$$

avendo definito con $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w$ la tensione tangenziale alla parete, ed essendo:

$$\mu \int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^h = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w \quad (10.134)$$

Dall'equazione di conservazione della massa (10.44):

$$v = -\int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \quad (10.135)$$

per cui

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.136)$$

Integrando per parti, si ottiene per il secondo termine a primo membro:

$$\int_{y=0}^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = \left[u \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right]_0^h - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy = U_e \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (10.137)$$

per cui si ottiene:

$$\int_{y=0}^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.138)$$

cambiando di segno e riorganizzando i termini:

$$\int_{y=0}^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] dy + \frac{dU_e}{dx} \int_{y=0}^h (U_e - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.139)$$

ma ricordando le definizioni di δ_1 e δ_2 (par. 10.6) e facendo il limite per $h \rightarrow \infty$, si ha:

$$\frac{d(U_e^2 \delta_2)}{dx} + \delta_1 U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.140)$$

Questa è l'equazione integrale della quantità di moto per uno strato limite bidimensionale, incompressibile e stazionario, detta *equazione di Von Karmann*. È una equazione differenziale alle derivate ordinarie in x (nota $U_e(x)$) negli spessori δ_1 e δ_2 ed in τ_0 . Può anche essere riscritta come:

$$U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1) U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (10.141)$$

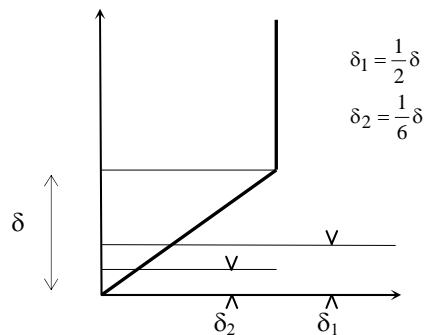
Come si può vedere, fissata la forma di $u(\eta)$, ad esempio lineare:

$$\frac{u}{U_e} = l(\eta) = a\eta + b$$

con condizioni al contorno:

$$\eta = 0 \quad l(0) = 0$$

$$\eta = 5 \quad l(5) = 1$$



o un polinomio del quarto grado (proposta da Polausen)

$$\frac{u}{U_e} = l(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 + e \quad (10.142)$$

per il quarto grado le condizioni sono:

nella parete

$$\eta = y = 0$$

fuori dallo SL

$$\eta \rightarrow \infty \quad y = \delta$$

L'equazione (10.141) si può integrare in x con δ come incognita, e determinare successivamente $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$ e $\tau_w(x)$ (tensione tangenziale alla parete). Ad esempio, per il quarto grado le condizioni sono:

$$1) \quad \eta = y = 0 \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

$$2) \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx}$$

$$3) \quad \eta \rightarrow \infty \quad y = \delta \quad u = U_e$$

$$4) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si consideri che la quantità

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

data la forma, è nota a meno di un fattore di scala $\delta(x)$.

Si noti che nel caso di una lastra piana, si può porre:

$$U_e = U \quad \text{e} \quad \frac{dU_e}{dx} = 0$$

per cui l'equazione (10.141) diventa:

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

e quindi

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta_2}{dx}$$