



**COLLANA DEL  
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA**

**ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA FORMA DELLE CURVE  
DI DOMANDA E OFFERTA DI CAPITALE**

Saverio M. Fratini

---

Working Paper n° 96, 2008

- I “Working Papers” del Dipartimento di Economia svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali. La loro pubblicazione è soggetta all’approvazione del Comitato Scientifico.
- Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall’art. 1 del D.L.L. 31.8.1945, n. 660 e successive modifiche.
- Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione.

**REDAZIONE:**

Dipartimento di Economia  
Università degli Studi Roma Tre  
Via Silvio D'Amico, 77 - 00145 Roma  
Tel. 0039-06-57335655 fax 0039-06-57335771  
E-mail: dip\_eco@uniroma3.it



**DIPARTIMENTO DI ECONOMIA**

**ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA FORMA DELLE CURVE  
DI DOMANDA E OFFERTA DI CAPITALE**

Saverio M. Fratini\*

*Comitato Scientifico:*  
*Proff. G. Bloise*  
*R. Cioccone*

\* *Dipartimento di Economia, Università degli Studi "Roma Tre"*

## ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA FORMA DELLE CURVE DI DOMANDA E OFFERTA DI CAPITALE

Saverio M. Fratini  
Dipartimento di Economia  
Università degli Studi Roma Tre

### ABSTRACT

**Some Remarks on the Shape of the Capital Demand and Supply Curves.** The present paper is aimed at discussing some results concerning the choice of techniques and the capital theory in order to shed some light on aspects that might cause, and sometimes caused, a misunderstanding. We will show, in particular, that the shape of the demand for capital schedule does not, in general, reveal the presence (or the lack) of phenomena like reverse capital deepening and reswitching.

The erroneous belief that the shape of the demand for capital schedule alone were sufficient to foresee possible instability problems seems to come from a conception of capital supply as a given value magnitude, as it is in Wicksell. Therefore, we will argue for the advisability of keeping the difficulties concerning the demand for capital side apart from those concerning its supply side. A method allowing this separation is also provided.

**Alcune Osservazioni sulla Forma delle Curva di Domanda e Offerta di Capitale.** In questo scritto si discutono alcuni risultati riguardanti la scelta delle tecniche e la teoria del capitale con lo scopo di far chiarezza su certi aspetti che potrebbero prestarsi, e talvolta si sono prestati, a fraintendimenti. Si mostrerà, in particolare, che la forma della curva della domanda di capitale in valore non è, in generale, rivelatrice della presenza o meno dei fenomeni di inversione dell'intensità capitalistica e ritorno delle tecniche.

L'erroneo convincimento che il solo andamento della curva di domanda di capitale sia sufficiente per prevedere possibili problemi di instabilità sembra derivare da una concezione dell'offerta di capitale come un dato ammontare di valore, come in Wicksell. Così, si sosterrà l'opportunità di tenere distinte le difficoltà riguardanti il lato della domanda di capitale, da quelle riguardanti il lato dell'offerta. Si proporrà inoltre un metodo che consenta di isolare le prime.

JEL: B21, D33, D46.

## INDICE

Introduzione	p. 3
I. L'effetto Wicksell	p. 4
II. La curva di domanda di capitale in valore crescente e l'effetto Wicksell di prezzo	p. 7
III. La curva di domanda di capitale in valore decrescente e l'effetto Wicksell reale	p. 9
IV. L'offerta di capitale: parte prima	p. 13
V. L'offerta di capitale: parte seconda	p. 17
VI. Conclusioni	p. 20
Appendice 1: la curva di domanda di capitale fisico	p. 22
Appendice 2: Il ritorno delle tecniche e la curva di domanda di capitale decrescente	p. 23
Bibliografia	p. 27

“Capital theory is the central difficulty  
in any attempt at a rigorous  
formulation of economic relationships  
and processes.”  
Frank H. Knight (1944)

## **ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA FORMA DELLE CURVE DI DOMANDA E OFFERTA DI CAPITALE**

Saverio M. Fratini\*  
(Università degli Studi Roma Tre)

### INTRODUZIONE

**1.** Per un secolo circa, la teoria del capitale è stata al centro dei dibattiti di teoria economica. Tra gli anni '60 e '70 del XX secolo molti importanti risultati sono stati ottenuti e si è così aperta una fase dedicata alla discussione del significato e delle implicazioni di questi risultati. Questa fase è attualmente ancora in corso, e la distanza delle posizioni non lascia facilmente intravedere una sua prossima conclusione. Il nostro scopo, con questo scritto, non è di passare in rassegna le diverse posizioni, ma piuttosto quello di richiamare l'attenzione su alcuni aspetti che, essendo rimasti in ombra, potrebbero prestarsi a fraintendimenti.

Cercheremo, in primo luogo, di argomentare che i problemi riguardanti la scelta delle tecniche e la conseguente domanda di capitale non possono essere colti semplicemente osservando la forma della curva di domanda di capitale in valore. Nella sez. II, in particolare, si mostrerà un caso in cui l'andamento monotono crescente della curva di domanda di capitale in valore non si accompagna ad alcun problema di scelta delle tecniche o di instabilità dell'equilibrio<sup>1</sup>. Mentre, nella sez. III (e nella appendice 2), si considererà un caso con inversione dell'intensità

---

\* Per i commenti ricevuti e le stimolanti discussioni su una precedente versione del presente scritto, desidero ringraziare G. Bloise, R. Ciccone, E.S. Levrero e P. Potestio. La responsabilità per ogni eventuale errore o mancanza resta chiaramente solo mia.

<sup>1</sup> In questo scritto, salvo diversa specificazione, le espressioni “equilibrio” e “stabilità” si intendono riferite al sistema dinamico:  $\dot{r} = h[k(r) - k^s(r)]$ , in cui  $h(\cdot)$  è una funzione “sign preserving”,  $k$  e  $k^s$  sono la domanda e l'offerta di capitale per lavoratore espresse in valore e  $r$  è il tasso dell'interesse.

capitalistica (intesa come l'adozione, al crescere del tasso dell'interesse, di tecniche con un maggior prodotto netto per lavoratore) e possibile instabilità, nonostante l'andamento monotono decrescente della curva di domanda di capitale in valore.

In secondo luogo, nelle sez. IV e V, si discuteranno alcune questioni riguardanti essenzialmente il lato dell'offerta di capitale, ma che hanno finito, talvolta, per sovrapporsi alla discussione dei problemi di scelta delle tecniche e inversione dell'intensità capitalistica. Qui il nostro tentativo sarà quello di evidenziare le distinzioni tra i problemi legati alla concezione dell'offerta di capitale e quelli derivanti dalla possibile inversione dell'intensità capitalistica (discussi nella sez. III).

## I. L'EFFETTO WICKSELL

2. Tradizionalmente, la teoria marginalista della distribuzione è introdotta trattando, da principio, il caso con produzione senza capitale; ad esempio, così fanno Jevons, Walras, Wicksteed e Wicksell, per citare alcuni importanti autori. Facendo riferimento, in particolare, a Wicksell, egli nelle *Lectures* inizia considerando una economia in cui l'unico bene di consumo è ottenuto attraverso l'impiego di terra e di lavoro secondo una data funzione della produzione con rendimenti costanti di scala. Siano  $y$  e  $t$  rispettivamente il prodotto e l'impiego di terra per unità di lavoro, la tecnologia può essere espressa attraverso la funzione  $y = f(t)$ , che si assume monotona crescente almeno in un certo intervallo  $(0, T)$ . Questa rappresentazione della tecnologia, come è noto, implica la presenza di infinite tecniche di produzione del bene di consumo, una per ogni possibile rapporto terra/lavoro  $t$ .

Siano  $w$  e  $\rho$  il saggio del salario ed il saggio della rendita espressi in termini del bene di consumo, ciascuna impresa impiegherà terra e lavoro nella proporzione che rende massimo l'ammontare degli extraprofiti  $\pi = f(t) - w - \rho t$ . Come è noto, la condizione del primo ordine di questo problema di massimo è l'uguaglianza tra il prodotto marginale della terra ed il saggio della rendita e la condizione del secondo ordine è che il prodotto marginale della terra sia decrescente all'aumentare di  $t$ .

Pertanto, il principio della produttività marginale decrescente implica sia l'uguaglianza, in equilibrio, tra il prodotto marginale della terra e la rendita; sia l'andamento monotono decrescente (o, quantomeno, non crescente) della domanda di terra per unità lavoro.

3. Quanto appena detto a proposito della produzione senza capitale può essere esattamente replicato, *mutatis mutandi*, nel caso di produzione capitalistica immaginato da Solow (1956); il caso, cioè, in cui il bene di consumo viene usato anche nella produzione come unico bene capitale da impiegare insieme al lavoro.

Infatti, siano  $y$  e  $k$  il prodotto netto ed il capitale impiegato per lavoratore, con  $y = f(k)$ , e siano  $w$  e  $r$  il saggio del salario in termini del bene di consumo ed il tasso dell'interesse, ciascuna impresa sceglierà la tecnica di produzione, ovvero  $k$ , in modo tale da massimizzare:  $\pi = f(k) - w - rk$ .

Come in precedenza, il principio della produttività marginale decrescente implica sia l'uguaglianza, in equilibrio, tra il prodotto marginale del capitale e il tasso dell'interesse; sia l'andamento monotono decrescente (o, quantomeno, non crescente) della domanda di capitale per unità lavoro.

4. Nelle *Lectures*, Wicksell osserva che in generale – cioè nei casi diversi da quello immaginario in cui il capitale ed il prodotto netto sono fisicamente la stessa merce – non vi è uguaglianza, in equilibrio, tra il prodotto marginale del capitale ed il tasso dell'interesse. Questo fatto fu chiamato da Uhr (1951) “Wicksell’s effect” e può essere esposto in maniera molto semplice.

Continuiamo ad assumere la presenza di un solo bene di consumo, ed indichiamo ancora con  $y$  il prodotto netto per lavoratore, assumendo che esso sia costituito fisicamente dal solo bene di consumo. Indichiamo poi con  $k$  il valore del capitale impiegato per lavoratore espresso in termini del bene di consumo. Pur essendo  $k$  ancora una certa quantità del bene di consumo, essa ora rappresenta un valore e non più il capitale fisico, il quale sarà in generale un complesso di merci diverse, prese in proporzioni che cambiano al variare della tecnica in uso.

Per l'ipotesi di assenza di extraprofiti in equilibrio, si deve avere:

$$(1) \quad y = w + rk .$$

Differenziando la (1) rispetto al tasso dell'interesse  $r$  si ottiene:

$$(2) \quad \frac{dy}{dr} = \frac{dw}{dr} + k + r \frac{dk}{dr} .$$

Da cui segue che il prodotto marginale del capitale, definito come  $dy/dk$ , può essere pari al tasso dell'interesse  $r$  se e solo se  $dw/dr + k = 0$ ; e questa condizione, come vedremo, in generale non è soddisfatta.

5. Il modo più semplice per verificare che in generale  $dw/dr + k \neq 0$  è quello di considerare il caso in cui il capitale consiste fisicamente di una



singola merce, che è però diversa dal bene di consumo. Ad esempio, riprendendo Swan (1956), si può assumere che il capitale sia fisicamente composto da “scatole del meccano”.

Indichiamo con  $m$  la quantità di scatole del meccano impiegate nell'economia per lavoratore ed assumiamo  $y = f(m)$ . Sia  $p$  il prezzo delle scatole del meccano in termini del bene di consumo, ciascuna impresa sceglierà la tecnica di produzione in modo tale da massimizzare:  $\pi = f(m) - w - rpm$ . Di conseguenza, il principio della produttività marginale decrescente delle scatole del meccano implica che in equilibrio:

$$(3) \quad \frac{dy}{dm} = rp.$$

Inoltre, per via dell'assenza di extraprofiti, si ha che:

$$(4) \quad y = w + rpm,$$

da cui segue che:

$$(5) \quad \frac{dy}{dr} = \frac{dw}{dr} + mp + rp \frac{dm}{dr} + rm \frac{dp}{dr}.$$

Utilizzando la (3) nella (5) e osservando che  $pm = k$ , otteniamo:

$$(6) \quad \frac{dw}{dr} + k = -rm \frac{dp}{dr}.$$

Quindi, per  $r$  ed  $m$  entrambi strettamente positivi, affinché la condizione  $dw/dr + k = 0$  sia soddisfatta occorre che il prezzo delle scatole del meccano non cambi al variare del tasso dell'interesse – e di conseguenza del saggio del salario – e ciò potrebbe accadere soltanto se, per ciascuna tecnica, la produzione di scatole del meccano e quella del bene di consumo impiegassero sempre beni capitali e lavoro nella stessa proporzione. Ma questo implicherebbe, di fatto, che il bene di consumo e le scatole del meccano siano la stessa merce, e quindi sarebbe in contraddizione con la nostra ipotesi iniziale.

**6.** Nelle analisi riguardanti il capitale ricorrono le espressioni “effetto Wicksell di prezzo” ed “effetto Wicksell reale”, che sono in parte derivanti da quanto fin qui mostrato, ma hanno ormai assunto significato specifico proprio.

In particolare, continuando a far riferimento al caso di Swan, la variazione del valore del capitale per lavoratore (al variare di  $r$ ) è, per definizione, la somma dell'effetto della variazione del prezzo e dell'effetto della variazione della quantità di scatole del meccano. Ovvero:

$$(7) \quad dk = dp \cdot m + p \cdot dm.$$

Così, dei due addendi della (7), il primo rappresenta l'effetto Wicksell di prezzo ed il secondo quello reale.

Inoltre, la (3) implica che l'effetto Wicksell reale lo si può esprimere anche nel modo seguente:

$$(8) \quad \frac{1}{r} \cdot dy = p \cdot dm .$$

Mentre per la (6), l'effetto di prezzo può essere posto nella forma:

$$(9) \quad -\frac{1}{r}(dw + k) = dp \cdot m .$$

## II. LA CURVA DI DOMANDA DI CAPITALE IN VALORE CRESCENTE E L'EFFETTO WICKSELL DI PREZZO

7. Tanto l'effetto Wicksell reale quanto quello di prezzo influenzano l'andamento della domanda di capitale in valore al variare del tasso dell'interesse, e ciascuno di essi può essere sia positivo che negativo. Si può così avere una curva di domanda di capitale crescente nonostante l'effetto reale sia negativo, così come si può avere una curva di domanda di capitale decrescente nonostante l'effetto reale sia positivo.

Il primo caso sarà discusso in questa sezione, nella quale si vedrà pure che esso è sostanzialmente innocuo per la spiegazione del tasso dell'interesse sulla base dell'equilibrio tra domanda ed offerta di capitale. L'altro caso, sarà discusso nella prossima sezione.

8. Continuando a far riferimento al caso in cui il solo bene capitale sono le scatole del meccano, la (3) può essere riscritta nel modo seguente:

$$(3') \quad \frac{dy}{dr} = rp \frac{dm}{dr} .$$

Da ciò segue che, per valori strettamente positivi di  $r$  e  $p$ , al variare del tasso dell'interesse il prodotto netto per lavoratore e l'impiego di scatole del meccano per lavoratore devono cambiare nella stessa direzione. Ovvero, un maggiore impiego di macchine per lavoratore deve generare un maggior prodotto netto per lavoratore.

Inoltre, assumiamo che al crescere del tasso dell'interesse l'effetto Wicksell di prezzo sia positivo, cioè il prezzo di una scatola del meccano in termini del bene di consumo aumenti al crescere del tasso dell'interesse:  $dp/dr > 0$ . In questo caso, si ha per certo che  $rp$  – cioè l'ammontare degli interessi che occorre pagare, in termini del bene di consumo, per l'impiego

di una unità del bene capitale – aumenta al crescere di  $r$ . Di conseguenza, per la (3), il principio della produttività marginale decrescente implica che l'impiego di beni capitale per lavoratore deve diminuire al crescere di  $r$ , ovvero  $dm/dr < 0$ . In altri termini, nel caso che stiamo considerando, la domanda di capitale fisico è una curva decrescente<sup>2</sup>.

**9.** Essendo l'effetto Wicksell di prezzo positivo, nonostante l'andamento decrescente della curva di domanda di capitale fisico, la domanda di capitale in valore potrebbe benissimo avere un andamento crescente. Riprendiamo, infatti, l'equazione (2), che possiamo riscrivere nel modo seguente:

$$(2') \quad \frac{dk}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r} \left( \frac{dw}{dr} + k \right).$$

Nel caso che stiamo considerando l'effetto Wicksell reale e di prezzo hanno segno contrapposto: il primo negativo e l'altro positivo. Così, nonostante la diminuzione del prodotto netto per lavoratore all'aumentare<sup>3</sup> di  $r$ , l'incremento del prezzo del bene capitale al crescere di  $r$  – che implica  $-dw/dr - k > 0$  – potrebbe essere tale da determinare un andamento crescente della curva di domanda di capitale in valore.

**10.** In questo caso, tuttavia, l'andamento anche monotono crescente della curva di domanda di capitale in valore non genera alcun problema di molteplicità o instabilità.

Sia infatti  $\bar{m}$  la quantità di scatole del meccano disponibili, la pendenza dell'eccesso di domanda di capitale in valore, in equilibrio, sarà:

$$(10) \quad \frac{dk}{dr} - \bar{m} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{dm}{dr} \cdot p.$$

Quindi, il segno della pendenza dell'eccesso di domanda di capitale in valore è determinato esclusivamente dal segno dell'effetto Wicksell reale e questo, nel caso che stiamo considerando, è sempre negativo.

Si può quindi affermare che la forma crescente della curva di domanda di capitale in valore non implica, di per sé, una difficoltà della teoria. Nel caso qui trattato infatti, dato che l'andamento crescente proviene dal solo effetto Wicksell di prezzo, esso non ha rilevanza per la possibilità

<sup>2</sup> Nella appendice 1 si dimostra che se il capitale consiste fisicamente di una merce soltanto, allora la domanda di capitale fisico ha sempre un andamento decrescente al crescere del tasso dell'interesse, qualunque sia il segno dell'effetto Wicksell di prezzo. Una diversa dimostrazione della stessa proposizione si trova in Bloise e Reichlin (2009).

<sup>3</sup> Per quanto detto in precedenza,  $dm/dr < 0$  implica  $dy/dr < 0$ .

di equilibri multipli e instabili, poiché tanto la domanda quanto l'offerta di capitale in valore risultano influenzate dall'effetto di prezzo in egual misura.

### III. LA CURVA DI DOMANDA DI CAPITALE IN VALORE DECRESCENTE E L'EFFETTO WICKSELL REALE

**11.** Si è appena discusso il caso in cui l'effetto Wicksell di prezzo determina una curva di domanda di capitale in valore crescente, nonostante l'effetto reale sia negativo. Qui prenderemo in esame il caso opposto, cioè quello di una curva di domanda di capitale in valore monotona decrescente nonostante l'effetto Wicksell reale sia positivo. E' questo un caso che non ci sembra aver ricevuto molta attenzione nella letteratura esistente.

Continuiamo ad assumere che nell'economia ci sia un solo bene di consumo, mentre assumiamo che vi siano due o più beni capitale.

Assumiamo inoltre che:

- (a) la tecnologia di produzione comprenda un continuo di tecniche alternative;
- (b) a ciascuna tecnica sia associato un diverso livello del prodotto netto per lavoratore (ovvero non ci sono due tecniche che danno lo stesso prodotto netto per lavoratore);
- (c) per ciascuna tecnica, il valore del capitale impiegato per lavoratore diminuisca al crescere del tasso dell'interesse, ovvero che l'effetto Wicksell di prezzo sia sempre negativo (ciò implica, come è noto, che la curva salario-interesse associata a ciascuna tecnica sia convessa verso l'origine);
- (d) dato un livello del tasso dell'interesse  $r$  compreso in un certo intervallo, vi sia una ed una sola tecnica che minimizza i costi per quel livello del tasso dell'interesse;
- (e) all'interno di un certo intervallo, ogni cambiamento del livello del tasso dell'interesse, per quanto piccolo, generi un cambiamento della tecnica in uso (ovvero della tecnica che minimizza il costo della produzione del bene di consumo).

Per le ipotesi (d) e (e) la frontiera salario-interesse, cioè l'involuppo esterno delle curve salario-interesse di tutte le tecniche, su un certo intervallo, è una curva differenziabile, la cui derivata, in un punto, è pari alla pendenza della curva salario-interesse associata alla tecnica in uso in quel punto.

**12.** Data una certa tecnica, ad esempio la tecnica  $\theta$ , indichiamo con  $w^\theta(r)$  e  $k^\theta(r)$  rispettivamente il saggio del salario ed il valore del capitale per lavoratore tali che, in corrispondenza di un qualsiasi livello del tasso dell'interesse  $r$  in un certo intervallo, la tecnica  $\theta$  comporti extraprofitti nulli in tutte le industrie.

Sia  $y^\theta$  il prodotto netto per lavoratore con la tecnica  $\theta$ , si avrà:

$$(11) \quad y^\theta = w^\theta(0);$$

e

$$(12) \quad k^\theta(r) = \frac{y^\theta - w^\theta(r)}{r} = \frac{w^\theta(0) - w^\theta(r)}{r}.$$

Siccome, per l'ipotesi (c), la funzione  $w^\theta(r)$  è convessa, si deve avere:

$$(13) \quad \frac{dw^\theta}{dr} r > w^\theta(r) - w^\theta(0);$$

che, per la (12), implica:

$$(14) \quad \frac{dw^\theta}{dr} + k^\theta(r) > 0.$$

Poiché questo è vero per qualunque tecnica  $\theta$ , e ricordando che quando  $\theta$  è la tecnica in uso  $dw^\theta/dr = dw/dr$  e  $k = k^\theta$ , dalla (14) segue che:

$$(15) \quad \frac{dw}{dr} + k(r) > 0.$$

Quindi, se per ogni tecnica  $\theta$  l'effetto Wicksell di prezzo, calcolato sulla rispettiva curva salario-interesse  $w^\theta(r)$ , è negativo, allora anche l'effetto di prezzo<sup>4</sup> calcolato sulla frontiera delle curve salario-interesse sarà negativo<sup>5</sup>.

---

<sup>4</sup> Ricordiamo che, con l'equazione (9), abbiamo stabilito che l'effetto di prezzo può essere espresso come:  $-\frac{1}{r} \left( \frac{dw}{dr} + k(r) \right)$ .

<sup>5</sup> Questo risultato è stato ottenuto sulla base delle ipotesi (c), (d) e (e).

**13.** Stabilito che l'effetto di prezzo è negativo, rimane da studiare l'effetto reale<sup>6</sup>. Cominciamo ricordando che, per la "golden rule", almeno inizialmente, cioè per tassi dell'interesse prossimi allo zero, il prodotto netto per lavoratore deve avere un andamento decrescente all'aumentare di  $r$ . Quindi l'effetto Wicksell reale deve essere, inizialmente, negativo<sup>7</sup>.

Inoltre, dato che, nel caso che stiamo considerando, il prodotto netto per lavoratore è una funzione "smooth" di  $r$ , la curva del prodotto netto può diventare crescente soltanto dopo essere passata per un tasso dell'interesse  $\tilde{r}$  tale per cui  $dy/dr = 0$ .

Per tassi dell'interesse superiori a  $\tilde{r}$ , il prodotto netto per lavoratore avrà un andamento crescente. Tuttavia, almeno inizialmente, l'effetto Wicksell reale sarà molto piccolo, prossimo allo zero, e, pertanto, la pendenza della curva del valore del capitale impiegato per lavoratore rimarrà negativa, essendo di fatto ancora determinata dal segno dell'effetto di prezzo.

Cosa accadrà facendo crescere ulteriormente il tasso dell'interesse non è possibile stabilirlo in generale. La crescita del prodotto netto per lavoratore potrebbe diventare così rapida da generare un effetto reale che sovrasti quello di prezzo (preso in valore assoluto), nel qual caso la curva di domanda di capitale in valore diventerà crescente. Oppure, la crescita del prodotto netto per lavoratore può rimanere molto lenta, così che la pendenza della curva del valore del capitale impiegato per lavoratore può continuare ad essere negativa<sup>8</sup>. La prima possibilità è documentata dall'esempio

---

<sup>6</sup> Ricordiamo che, con l'equazione (8), abbiamo stabilito che l'effetto reale può essere espresso come:  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dr}$ .

<sup>7</sup> La "golden rule" infatti implica – nell'economia stazionaria che stiamo considerando – che per il tasso dell'interesse  $r = 0$  la tecnica in uso sia quella che consente di ottenere il maggior prodotto netto per lavoratore. Di conseguenza, all'aumentare di  $r$  partendo da zero, entreranno inizialmente in uso tecniche con un minor prodotto netto per lavoratore, e quindi l'effetto reale deve essere inizialmente negativo.

<sup>8</sup> Occorre notare che se le tecniche di produzione alternative fossero in numero finito – e cioè se si abbandonasse l'ipotesi (a) del continuo di tecniche – allora ogni cambiamento della tecnica tale da far aumentare il prodotto netto per lavoratore, farebbe necessariamente crescere anche il valore del capitale impiegato per lavoratore.

Ciò può essere facilmente dimostrato considerando il caso con soltanto due tecniche, che indicheremo con  $a$  e  $b$ . In questo caso, per la distribuzione del reddito a cui avviene il cambiamento, entrambe le tecniche possono essere simultaneamente in uso. Ovvero, per quella coppia  $(w, r)$ , entrambe le tecniche danno extraprofiti nulli.

Ne segue che nel punto di cambiamento della tecnica si deve avere:

$$y^a - w - rk^a = y^b - w - rk^b;$$

numerico in appendice a Garegnani (1970), mentre il secondo dall'esempio numerico nella nostra appendice 2.

**14.** Sta di fatto che l'andamento monotono decrescente della curva di domanda di capitale in valore può benissimo accompagnarsi con un effetto Wicksell reale positivo, cioè con l'adozione, al crescere di  $r$ , di tecniche che danno un prodotto netto per lavoratore sempre maggiore. In questo caso, nonostante l'apparente forma well-behaved della curva di domanda di capitale, potrebbero comunque sorgere problemi di instabilità degli equilibri legati al segno dell'effetto Wicksell reale.

Al fine di isolare l'influenza dell'effetto Wicksell reale sulla stabilità, separandola da quella di altri effetti che potrebbero derivare dalla concezione e dall'andamento dell'offerta di capitale (problemi dei quali ci occuperemo, almeno in parte, nelle sez. IV e V), cominciamo osservando che – potendo il capitale mutare di composizione fisica – l'equilibrio richiede non soltanto che la domanda di capitale in valore eguagli l'offerta, ma anche che la composizione fisica della domanda di capitale sia pari a quella dell'offerta<sup>9</sup>. Così, indicando la domanda di beni capitali al tasso dell'interesse  $r$  con il vettore (riga)  $v(r)$ , al tasso dell'interesse di equilibrio  $r^*$ , tanto la domanda quanto l'offerta di capitale avranno composizione fisica  $v^* = v(r^*)$ .

Di conseguenza, differenziando<sup>10</sup> l'eccesso di domanda di capitale in un intorno del tasso di interesse di equilibrio  $r^*$ , otteniamo:

e quindi:

$$(y^a - y^b) = r(k^a - k^b).$$

Si vede pertanto che ogni cambiamento della tecnica che genera un salto verso l'alto del prodotto netto per lavoratore, genera pure un salto verso l'alto del valore del capitale per lavoratore.

<sup>9</sup> Ciò risulta particolarmente chiaro nei modelli di equilibrio intertemporale, in cui – assumendo, come stiamo facendo dall'inizio, che il capitale sia interamente circolante – i beni capitali disponibili all'inizio di ciascun processo produttivo sono quelli ottenuti al termine del processo produttivo precedente. In questi casi, infatti, come mostrato in Garegnani (2003), in equilibrio si deve avere sia l'uguaglianza tra domanda ed offerta di capitale in valore, cioè tra investimenti e risparmi di ciascun periodo, sia l'uguaglianza tra la composizione fisica della domanda di capitale e quella dell'offerta, cioè i beni capitali resi disponibili in ciascun periodo attraverso le decisioni di risparmio.

<sup>10</sup> Adottando una notazione usuale, indichiamo con  $D_r v$  il vettore che ha come componenti le derivate rispetto ad  $r$  delle quantità domandate dei beni capitali, e con  $D_r p$  il vettore delle derivate dei loro prezzi.

$$(16) \quad \frac{dk}{dr} - \frac{dk^s}{dr} = D_r v \cdot p + v^* \cdot D_r p - v^* \cdot D_r p = D_r v \cdot p.$$

Così, se l'effetto reale è positivo al tasso dell'interesse  $r^*$ , l'equilibrio sarà localmente instabile nonostante l'andamento decrescente della curva di domanda di capitale in valore. Questo perché l'effetto di prezzo, che sulla curva di domanda di capitale è parzialmente compensato da un effetto reale positivo, influenza senza alcuna compensazione l'andamento della curva di offerta di capitale in valore. Di conseguenza, al crescere di  $r$  in un intorno di  $r^*$ , l'offerta di capitale in valore diminuirà più rapidamente rispetto alla domanda.

Naturalmente, questa conclusione si basa sull'ipotesi che, almeno in un intorno di  $r^*$ , la variazione  $v^* \cdot D_r p$  spieghi per intero la variazione dell'offerta di capitale in valore al mutare del tasso dell'interesse, cioè che in  $r^*$   $dk^s/dr = v^* \cdot D_r p$ . Questa ipotesi infatti ci ha consentito di isolare i problemi di stabilità che possono sorgere sul lato della domanda – e legati alla scelta della tecnica – da fenomeni che invece possono sorgere sul lato dell'offerta.

Questi ultimi, ove rilevanti, potrebbero aggiungersi ai primi modificando le conclusioni circa il segno della pendenza dell'eccesso di domanda di capitale. Potrebbe perfino accadere che problemi di natura diversa finiscano per compensarsi l'un l'altro. Ciò non toglie tuttavia, che quand'anche nascosta o addirittura sopraffatta da altri fenomeni, vi sia una tendenza all'instabilità associata all'effetto Wicksell reale positivo.

#### IV. L'OFFERTA DI CAPITALE: PARTE PRIMA

**15.** Nei due casi considerati fin qui, abbiamo cercato di esaminare i problemi legati alla scelta della tecnica, e quindi alla domanda di capitale, tenendoli distinti da quelli che possono sorgere con riferimento all'offerta di capitale. Ciò è stato fatto trattando quest'ultima, almeno nell'intorno dell'equilibrio, come il valore di certi beni capitali fisicamente specificati. Non è tuttavia in questo modo che l'offerta di capitale fu concepita nella maggior parte (o quasi totalità) delle versioni iniziali della teoria marginalista. Poiché tale questione è stata più volte ricostruita, esaminata e discussa, qui ci limiteremo all'essenziale.

I beni capitali, in generale, sono input altamente specializzati: sono inventati e prodotti per svolgere un compito specifico in un modo specifico.



Di conseguenza, cambiare la tecnica per passare ad una che dia un più alto o più basso prodotto per lavoratore significa, in generale, cambiare il tipo di beni capitali utilizzati. In altri termini, se il tipo di beni capitali utilizzati non potesse cambiare, anche la tecnica di produzione non potrebbe essere mutata.

La spiegazione della distribuzione sulla base del prodotto marginale dei fattori richiede, quindi, che il capitale sia concepito in modo tale da poter cambiare di forma fisica, rimanendo però fermo come ammontare<sup>11</sup>. Così, Jevons, Böhm-Bawerk, J.B. Clark e diversi altri economisti tentarono di costruire una teoria marginalista della distribuzione adottando una concezione del capitale basata sul periodo medio di produzione. Ciò sembrava consentire, da un lato, la possibilità dell'aggiustamento della composizione fisica del capitale in uso e, dall'altro lato, una misurazione dell'ammontare di capitale comunque indipendente dai prezzi e dalla distribuzione del reddito.

Questa strada fu inizialmente seguita anche da Wicksell in *Valore, Capitale e Rendita* ([1893] 1954), ma fu abbandonata nelle *Lezioni* ([1901] 1934) in conseguenza delle fortissime restrizioni che essa richiedeva. Infatti, è noto (cf. Garegnani 1960) che la misurazione del capitale in termini di periodo medio di produzione richiede: i) la capitalizzazione semplice degli interessi; ii) la presenza di un solo fattore produttivo primario (o lavoro, o terra); iii) l'assenza di capitale fisso.

Così, nella analisi dei problemi della teoria marginalista del capitale si fa (e si è fatto) spesso riferimento a Wicksell perché essendo la sua teoria del capitale esente da alcuni difetti – quelli legati al periodo medio di produzione – consente di mettere meglio in luce gli altri.

**16.** Abbandonato il periodo medio di produzione, a Wicksell non rimase altra possibilità<sup>12</sup> che prendere il capitale come un ammontare di valore.

---

<sup>11</sup> Essendo, ad esempio, il prodotto marginale del lavoro definito come l'incremento del prodotto derivante dall'impiego di una unità in più di lavoro ferme restando le quantità impiegate degli altri fattori, è chiaro che la quantità di capitale che resta ferma non può essere concepita come la quantità dei singoli beni capitali, poiché altrimenti non si avrebbe alcuna variazione né della tecnica, né della quantità prodotta.

<sup>12</sup> La strada seguita da Walras di trattare il capitale direttamente in termini fisici comportava, come è anche noto (cf. Garegnani 1990), due diversi problemi. In primo luogo, se il capitale fisico è dato arbitrariamente ed i prezzi sono spiegati sulla base dell'equilibrio tra domanda ed offerta, ciò risulta in generale incompatibile con la determinazione di un saggio del profitto uniforme sul prezzo d'offerta dei beni capitali e, quindi, con l'equilibrio "normale", caratterizzato dalla persistenza dei prezzi relativi nel tempo. In secondo luogo, per le ragioni accennate nel testo, la trattazione del capitale come un complesso di beni

Dalla concezione, in Wicksell, dell'offerta di capitale come un dato ammontare di valore sono scaturiti, ci sembra, due falsi convincimenti. Il primo di essi, sostenuto da Negishi, Sandelin, L. Samuelson e Malinvaud, consiste nel ritenere che nella teoria di Wicksell vi sia una "equazione mancante"<sup>13</sup>. L'assenza di questa equazione, secondo gli economisti citati, avrebbe spinto Wicksell a trattare una delle incognite come data esogenamente, e la sua scelta di prendere come data proprio l'offerta di capitale in valore fu, scrive Malinvaud, particolarmente infelice.

Come emerge chiaramente nel contributo di Malinvaud (2003), la tesi della equazione mancante si fonda sull'idea che la nozione di equilibrio che troviamo in Wicksell sia quella dell'equilibrio intertemporale stazionario. Infatti, nell'equilibrio intertemporale stazionario, la distribuzione del reddito deve essere tale da rendere nulle le decisioni di risparmio al netto della reintegrazione del capitale consumato; così che l'offerta di capitale per lavoratore deve essere determinata endogenamente in modo tale da generare proprio quella distribuzione del reddito.

In realtà però, la nozione di equilibrio che si trova in Wicksell non è questa, ma quella dell'equilibrio normale, concepito come la posizione teorica attorno alla quale i prezzi effettivi (cioè quelli che Smith chiama "prezzi di mercato") oscillano o verso cui tendono in media<sup>14</sup>. E, a meno di eccezionali drastici mutamenti, il capitale esistente, inteso come fondo di valore, è soggetto a cambiamenti assai lenti e gradualmente, cioè è approssimativamente costante pur in presenza di risparmi netti non nulli. In altri termini, Wicksell non era interessato ad individuare il tasso dell'interesse per il quale i risparmi netti cadono a zero, ma piuttosto il tasso dell'interesse generato dall'ammontare di capitale esistente<sup>15</sup>.

---

eterogenei fa venir meno la possibilità di fondare le funzioni di domanda dei fattori (e del lavoro in particolare) sulla loro produttività marginale. Ciò non significa, naturalmente, che non si possano costruire comunque delle funzioni di domanda dei fattori, significa però che non si può più utilizzare la legge della produttività marginale decrescente per avanzare qualche previsione circa l'andamento di queste funzioni.

<sup>13</sup> Per una panoramica del dibattito sulla equazione mancante di Wicksell si veda Kurz (2000).

<sup>14</sup> "It never happen in the real world that the selling price of any given product is absolutely equal to the cost of the productive services that enter into that product, or that the effective demand and supply of services or products are absolutely equal. Yet equilibrium is the normal state, in the sense that it is the state towards which things spontaneously tend under a regime of free competition in exchange and in production." (Walras 1954, pp. 224, 225).

<sup>15</sup> A proposito della condizione di risparmi netti pari a zero, l'opinione di Wicksell è che essa non offra alcun contributo alla determinazione del tasso dell'interesse. Scrive infatti Wicksell: "Walras' formula for interest, as may be easily seen, reduces itself, on the

Così, da un lato, come scrive Kurz (2000): “[t]here is no equation missing in Wicksell’s theory” (p. 766), e, dall’altro lato, Wicksell non aveva altra scelta che prendere come data la quantità di capitale in valore, avendo egli scartato, perché inappropriate, sia la strada del periodo medio di produzione presa da Böhm-Bawerk, sia quella dei beni capitali fisicamente specificati presa da Walras.

**17.** Il secondo fraintendimento che può derivare dalla data quantità di capitale in valore che troviamo in Wicksell, consiste nel ritenere che la forma della sola curva di domanda di capitale in valore possa essere sufficiente per giungere a conclusioni circa la molteplicità o l’instabilità degli equilibri.

I dibattiti sul capitale post-1960 sono stati prevalentemente rivolti a confutare l’idea, affermata anche in Wicksell, secondo cui la diminuzione del tasso dell’interesse comporti l’adozione di tecniche a minore intensità di capitale; cioè l’attenzione è stata rivolta prevalentemente al lato della domanda di capitale. Così, i risultati emersi da questi dibattiti sono talvolta stati letti, impropriamente, nel modo seguente: “se pure concedessimo a Wicksell di poter prendere come data la quantità disponibile di capitale in valore, la possibilità di una curva di domanda di capitale crescente, almeno in un tratto, condurrebbe alla possibilità di posizioni di equilibrio instabile”.

Una affermazione di questo tipo si espone a due obiezioni. Innanzitutto, come si è cercato di chiarire nelle due precedenti sezioni, l’andamento crescente della curva di domanda di capitale in valore non implica, di per sé, l’instabilità degli equilibri (cfr. sez. II), mentre l’instabilità derivante dalla inversione dell’intensità capitalistica può benissimo manifestarsi anche nel caso di una curva di domanda di capitale monotona decrescente (cfr. sez. III e appendice 2).

Inoltre, concedere una ipotesi favorevole alla teoria che si intende criticare rafforza evidentemente la critica, ma concedere la possibilità di prendere come data la quantità di capitale in valore non equivale a concedere una ipotesi favorevole. Qui si sta piuttosto trascurando un difetto logico che sarebbe, di per sé, letale per la teoria: non è possibile determinare

---

assumption of stationary conditions, simply to the equation  $F(i)=0$ , in which  $F(i)$  is the amount of annual savings conceived as a function of the rate of interest  $i$ . In other words, it expresses the truism that, in the *stationary* state, the inducement to net savings must have ceased; but it affords no answer to the question why a given amount of existing social capital gives rise to a certain rate of interest, neither higher nor lower.” (Wicksell, *Lectures*, p. 171).

il valore del capitale prima di aver determinato i prezzi e, in quella teoria, i prezzi si possono determinare solo prendendo tra i dati il valore del capitale.

Così, come è stato argomentato in Potestio (1999), comunque si interpreti quel dato ammontare di capitale in valore – cioè o come indipendente dal numerario scelto o come incorporante la scelta del numerario – il significato economico dell’equilibrio con esso determinato risulta compromesso.

Ciò tuttavia condanna la teoria di Wicksell ed un certo modo di interpretare la critica alla teoria marginalista del capitale, ma non intacca la rilevanza del fenomeno della inversione della intensità capitalistica correttamente interpretato, come si è visto con l’argomento di instabilità presentato nella sez. III.

## V. L’OFFERTA DI CAPITALE: PARTE SECONDA

**18.** In un lavoro di prossima pubblicazione, Bloise e Reichlin (2009) hanno mostrato la presenza di un problema di statica comparata facendo riferimento ad un caso di equilibrio intertemporale stazionario con generazioni sovrapposte.

In questo caso – così come in Fratini (2007) – l’offerta di capitale proviene dalle decisioni dei giovani di risparmiare una parte dei salari percepiti al fine di garantirsi certi consumi in futuro, quando cioè si saranno ritirati dal lavoro. Nella analisi di statica comparata di Bloise e Reichlin si confrontano due situazioni che differiscono con riferimento alla propensione (media) per il risparmio. Il “paradosso della parsimonia” che i due autori pongono in luce consiste nella possibilità che l’economia con la più alta propensione al risparmio abbia, in condizioni di equilibrio stazionario, un tasso dell’interesse più alto e quindi, se l’effetto Wicksell reale è negativo, un minore prodotto netto per lavoratore.

Bloise e Reichlin mostrano che il manifestarsi di questo paradosso è associato alla presenza di una “intersezione perversa” tra la curva di domanda e la curva di offerta di capitale in valore – cioè alla maggior pendenza della curva di domanda rispetto a quella di offerta nel loro punto di intersezione – purché essa non sia generata da un effetto Wicksell reale positivo<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Di contro, se l’effetto Wicksell reale è positivo, il paradosso di Bloise e Reichlin si manifesta in corrispondenza di una intersezione non perversa.

Questo paradosso ha quindi caratteristiche e, come argomenteremo, cause decisamente diverse dal problema di instabilità discusso nella sez. III, che si manifesta invece nel caso di una intersezione perversa generata esclusivamente dalla presenza di un effetto Wicksell reale positivo. In particolare, mostreremo di seguito che nel caso di modelli con generazioni sovrapposte, l'intersezione perversa del tipo considerato da Bloise e Reichlin può aversi anche assumendo che vi sia un solo prodotto, e cioè che il capitale ed il bene di consumo siano la stessa merce (come in Solow). Poiché l'omogeneità fisica tra il capitale ed il bene di consumo impedisce qualsiasi problema sul lato della domanda di capitale (cfr. sez. I), ciò sembra sufficiente per dimostrare che il problema da cui scaturisce il paradosso risiede sul lato dell'offerta.

**19.** Consideriamo una economia in cui 1 quintale di grano può essere prodotto attraverso l'impiego di  $g_g$  quintali di grano (che si assume essere capitale circolante) ed  $l_g$  unità di lavoro.

Da questa rappresentazione assai semplice del lato della produzione segue che, continuando ad indicare con  $w$  e  $r$  il saggio del salario e quello dell'interesse, la relazione tra queste variabili è:

$$(17) \quad w(r) = \frac{1}{l_g} - \frac{g_g}{l_g}(1+r);$$

mentre l'impiego di capitale per lavoratore è:

$$(18) \quad k^d = \frac{g_g}{l_g}.$$

Per quanto riguarda il lato del consumo, assumiamo che vi siano individui di generazioni sovrapposte. In ciascun periodo nasce un individuo che vive per due periodi e, alla nascita, dispone esclusivamente di una unità di lavoro da svolgere durante il suo primo periodo di vita; di conseguenza, per consumare anche durante il secondo periodo dovrà risparmiare una parte del salario percepito nel primo. Tutti gli individui hanno identiche preferenze.

Sotto queste ipotesi, l'offerta di risparmi da parte di un individuo sarà:

$$(19) \quad k^s(w, r, \rho) = w \cdot s(r, \rho);$$

in cui  $s(\cdot)$  rappresenta la propensione media al risparmio dei lavoratori<sup>17</sup> (cioè dei giovani) espressa come funzione del tasso dell'interesse  $r$  e del tasso di preferenza intertemporale dell'individuo  $\rho$ .

Con riferimento alla funzione  $s(\cdot)$  si assume che:

- i)  $\partial s / \partial r \geq 0$ ;
- ii)  $\partial s / \partial \rho < 0$ ;
- iii)  $\lim_{r \rightarrow \infty} s(r, \rho) = 1$ .

**20.** Sostituendo la (17) nella (19), abbiamo che, preso  $\rho$  per dato, all'aumentare del tasso dell'interesse  $r$ , l'andamento dell'offerta di risparmi per lavoratore sarà il risultato di due tendenze contrapposte. Da un lato, l'incremento di  $r$  genererà un aumento della propensione media al consumo; dall'altro, genererà una diminuzione del saggio del salario a cui la propensione media è applicata.

Ora si noti che almeno per un certo tratto, la seconda tendenza deve prevalere sulla prima. Infatti, nell'economia che stiamo considerando vi è un livello massimo del tasso dell'interesse, che risulta pari al saggio proprio di riproduzione del grano  $(1 - g_g) / g_g$ . Quando il tasso dell'interesse raggiunge questo massimo, il saggio del salario si annulla, rendendo nulla anche l'offerta di risparmi. Quindi, se assumiamo che i risparmi siano strettamente positivi per ogni livello del tasso dell'interesse inferiore a quello massimo, la curva dei risparmi deve necessariamente avere almeno un tratto finale decrescente.

Pertanto, i casi sono due: o la curva dei risparmi ha un andamento sempre decrescente, e cioè il primo effetto non prevale mai sul secondo; oppure essa ha una forma a campana (o a U rovesciata).

Data la finalità del nostro ragionamento, possiamo limitarci a considerare soltanto il secondo caso. Se la curva dei risparmi ha una forma a campana, o non esiste alcun livello di  $r$  per cui  $k^d = k^s$ , oppure, genericamente, ce ne sono due: uno sul tratto crescente della curva dei

<sup>17</sup> Nel caso di una funzione di utilità CES, ovvero:  $u_t(c_1, c_2) = \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ ; la funzione della propensione media al risparmio sarà (cfr. Fratini 2007, p. 45):

$$s(r, \rho) = \frac{\frac{1-\sigma}{(1+r)^\sigma}}{\frac{1}{(1+\rho)^\sigma} + \frac{1-\sigma}{(1+r)^\sigma}}.$$

risparmi ed uno su quello decrescente. Quindi, se esiste almeno un equilibrio, si ha sempre sia una intersezione “ortodossa”, sia una intersezione “perversa”. Infatti, visto che la curva di domanda di capitale ha sempre pendenza nulla, l’intersezione sarà ortodossa o perversa a seconda del segno della derivata della curva dei risparmi.

Così, facendo diminuire  $\rho$  in modo da far aumentare la propensione media per il risparmio a parità di tasso dell’interesse, i risultati della statica comparata saranno diversi a seconda che si consideri il primo o il secondo equilibrio stazionario. In ogni caso, ed è questo ciò che ci interessava dimostrare, l’intersezione perversa che è alla base del paradosso della parsimonia evidenziato da Bloise e Reichlin può verificarsi anche in un modello in cui, evidentemente, non sussiste alcun problema dal lato della domanda di capitale.

## VI. CONCLUSIONI

**21.** Nella sez. I abbiamo ripreso i concetti di effetto Wicksell reale e di prezzo, dalla cui somma dipende l’andamento della curva di domanda di capitale in valore.

Si è quindi mostrato (sez. II e III) che, siccome l’effetto di prezzo influenza allo stesso modo tanto l’offerta che la domanda di capitale<sup>18</sup>, solo l’effetto Wicksell reale può comportare l’instabilità dell’equilibrio<sup>19</sup>. Così, poiché l’effetto Wicksell reale può avere segno opposto all’effetto di prezzo, e quest’ultimo può, in valore assoluto, prevalere sul primo, la pendenza della curva di domanda di capitale non offre informazioni certe sulla stabilità o instabilità dell’equilibrio. In particolare, come si è visto (sez. III), l’andamento monotono decrescente della curva di domanda di capitale può benissimo aversi nonostante l’effetto Wicksell reale sia positivo e l’equilibrio risulti, di conseguenza, instabile.

**22.** L’idea, infondata, che la forma della curva di domanda di capitale sia rivelatrice della presenza di problemi di instabilità sembra derivare dalla concezione dell’offerta di capitale come una dato ammontare di valore. Ma,

---

<sup>18</sup> Come si è sottolineato, ciò è vero almeno nell’intorno dell’equilibrio, dal momento che in equilibrio la domanda e l’offerta di capitale devono avere la stessa composizione fisica.

<sup>19</sup> Naturalmente altri problemi, anche di instabilità, possono sorgere indipendentemente dai due tipi di effetto Wicksell. Come ad esempio quello del “paradosso della parsimonia” di Bloise e Reichlin trattato nella sez. V.

come si è visto (sez. IV), ciò conduce a sommare due problemi che sarebbe opportuno tenere distinti: cioè il problema della inversione della intensità capitalistica, ovvero dell'effetto Wicksell reale positivo, e quello del ragionamento circolare che sorge quando un ammontare di valore deve essere preso come dato al fine della determinazione della distribuzione e dei prezzi<sup>20</sup>. Infatti, da un lato, l'emergere del problema della inversione della intensità capitalistica, e l'instabilità che esso implica, non richiede affatto che l'offerta di capitale sia concepita come un dato ammontare di valore, anzi una tale concezione dell'offerta di capitale finirebbe perfino per nascondere il problema discusso nella sez. III. Dall'altro lato, dover prendere come dato un ammontare di valore al fine della determinazione dei prezzi, è un difetto logico di per sé sufficiente per invalidare la teoria di Wicksell.

**23.** Infine, quello evidenziato per la teoria di Wicksell non è il solo problema che può sorgere con riferimento all'offerta di capitale. Vi possono infatti essere altre difficoltà che, riguardando la concezione e/o la forma della curva di offerta di capitale in valore, risultano indipendenti dai problemi di scelta delle tecniche e di inversione dell'intensità capitalistica.

Uno di questi, recentemente discusso da Bloise e Reichlin (2009), concerne la possibilità che, in un modello con generazioni sovrapposte, un incremento della propensione media al risparmio dei giovani conduca ad un aumento del tasso dell'interesse di equilibrio e quindi, nel caso di effetto Wicksell reale negativo, all'adozione di tecniche che danno un minor prodotto netto per lavoratore.

Come si è argomentato nella sez. V, nei modelli con generazioni sovrapposte, l'andamento della curva di offerta di capitale in valore (cioè dei risparmi dei giovani) è, in generale, non monotono. Così, l'intersezione perversa tra domanda ed offerta di capitale – che i due autori pongono alla base del paradosso della parsimonia da loro evidenziato – può aversi anche nel caso semplicissimo con un solo prodotto, utilizzato sia per il consumo che come bene capitale, cioè il caso nel quale, come è noto, nessun problema può mai sorgere sul lato della domanda di capitale.

---

<sup>20</sup> Si potrebbe, per questo, dire che il sistema di equilibrio di Wicksell non sia il contesto più appropriato nel qual far emergere e studiare i problemi di instabilità del tipo di quello mostrato nella sez. III, cioè problemi essenzialmente legati all'effetto reale positivo. Mentre sembra più appropriato un contesto di equilibrio di tipo Walrasiano o neo-Walrasiano, in cui la domanda e l'offerta di capitale in valore scaturiscono dall'applicazione dei prezzi a vettori di quantità di beni capitali domandati ed offerti, come nei casi studiati recentemente da Garegnani (2003 e 2005b) ed in quelli qui proposti nelle sez. II e III.



## APPENDICE 1: LA CURVA DI DOMANDA DI CAPITALE FISICO

**24.** Si è visto nel testo che nel caso di Solow, cioè di una economia in cui vi è un solo prodotto, utilizzato sia per il consumo che come bene capitale, la curva di domanda di capitale ha un andamento sicuramente monotono decrescente. Qui mostreremo che anche nel caso di Swan, cioè di una economia in cui vi è un solo tipo di bene capitale, ma diverso dal bene di consumo, la curva di domanda di capitale fisico per lavoratore ha sicuramente un andamento decrescente<sup>21</sup>.

Riprendiamo quindi il caso introdotto nella sez. I §5, in cui, lo ricordiamo,  $y$  indica il prodotto netto in termini fisici,  $m$  il numero di scatole del meccano impiegate per lavoratore e  $p$  è il prezzo di una scatola del meccano. Si assume inoltre  $y = f(m)$ , con  $f'(m) > 0$  e  $f''(m) < 0$ .

Poiché il valore del capitale per lavoratore  $k$  è pari, per definizione, a  $pm$ , l'equazione (6) ottenuta nel §5, può essere scritta come segue:

$$(6') \quad -\frac{dw}{dr} = m \left( p + r \frac{dp}{dr} \right).$$

Nella (6'), il termine nella parentesi tonda è la derivata di  $rp$  rispetto ad  $r$ . Di conseguenza questa equazione ci dice che, al variare del tasso dell'interesse, il saggio del salario  $w$  e  $rp$  si muovono in direzioni opposte. Così, dato che un aumento di  $r$  provoca sicuramente una diminuzione di  $w$ , si ha che  $rp$  deve aumentare al crescere di  $r$  (ciò indipendentemente dal segno di  $dp/dr$ ).

**25.** Quindi, se  $r$  aumenta, anche  $rp$  aumenta e, per la (3) – cioè l'uguaglianza tra il prodotto marginale  $f'(m)$  e  $rp$  – anche il prodotto marginale delle scatole del meccano, in equilibrio, deve aumentare. Pertanto, dato che il prodotto marginale delle scatole del meccano è decrescente, ovvero  $f''(m) < 0$ , si ha che l'aumento di  $r$  richiede una diminuzione dell'impiego di scatole del meccano per unità di lavoro. E cioè:  $dm/dr < 0$ .

Inoltre, poiché una diminuzione dell'impiego di scatole del meccano per lavoratore deve accompagnarsi ad una riduzione del prodotto netto per lavoratore, si ha che:  $dy/dr < 0$ .

---

<sup>21</sup> La stessa affermazione è dimostrata anche in Bloise e Reichlin (2009), ma sulla base di un ragionamento diverso da quello qui proposto.

Se ne conclude che, nel caso con un solo tipo di bene capitale, tanto l'impiego di capitale fisico per lavoratore, quanto il prodotto netto fisico per lavoratore diminuiscono al crescere di  $r$ .

## APPENDICE 2: IL RITORNO DELLE TECNICHE E LA CURVA DI DOMANDA DI CAPITALE DECRESCENTE

**26.** Consideriamo, come nel testo, una economia in cui vi è un solo bene di consumo e due o più beni capitali. L'impiego di capitale fisico sarà qui trattato, come in Wicksell, geneticamente, cioè attraverso le quantità di lavoro datate che servono per la sua riproduzione.

Si assume che vi sia un continuo di tecniche alternative di produzione, una per ogni numero reale  $\theta$  nell'intervallo  $[0,1]$ . Di conseguenza, tanto il prodotto netto per lavoratore, quanto le quantità datate di lavoro saranno delle funzioni di  $\theta$ . In particolare, per ogni tecnica  $\theta$ , avremo:

$$(20) \quad y = \frac{10 + \theta}{12 - \theta + \theta^2};$$

$$(21) \quad a_0 = \frac{9 - 8\theta}{12 - \theta + \theta^2};$$

$$(22) \quad a_1 = \frac{10\theta + \theta^2}{12 - \theta + \theta^2};$$

$$(23) \quad a_2 = \frac{3 - 3\theta}{12 - \theta + \theta^2};$$

in cui  $y$ , come al solito, rappresenta il prodotto netto per lavoratore, mentre  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  rappresentano le quote di lavoro impiegate, rispettivamente, nella produzione diretta della quantità  $y$  del bene di consumo, nella produzione diretta dei beni capitali necessari per ottenere una quantità  $y$  del bene di consumo, nella produzione indiretta dei beni capitali necessari per ottenere una quantità  $y$  del bene di consumo (si assume, per semplicità, che non sia necessario andare ulteriormente indietro).

Come si può facilmente verificare, il prodotto netto per lavoratore, sul dominio  $[0,1]$ , è una funzione monotona crescente di  $\theta$ . Ne segue che non ci sono due tecniche diverse in grado di dare esattamente lo stesso prodotto netto per lavoratore.

**27.** Continuando ad indicare con  $r$  il tasso dell'interesse e con  $w$  il saggio del salario, l'assenza di extraprofitti implica che:

$$(24) \quad y = wa_0 + w(1+r)a_1 + w(1+r)^2 a_2;$$

da cui segue che:

$$(25) \quad w = \frac{y}{a_0 + (1+r)a_1 + (1+r)^2 a_2} = \\ = \frac{10 + \theta}{9 - 8\theta + (10\theta + \theta^2)(1+r) + (3 - 3\theta)(1+r)^2}.$$

Possiamo infine esprimere la domanda di capitale per lavoratore, in valore, come funzione di  $w$  e  $r$ . In particolare, avremo che:

$$(26) \quad k = \frac{y - w}{r} = wa_1 + 2wa_2 + wra_2.$$

**28.** Ricordando che, dato un tasso dell'interesse  $r$ , la tecnica ottimale è quella che rende massimo il saggio del salario; per trovare la tecnica in uso per ciascun livello del tasso dell'interesse occorre massimizzare la (25) rispetto a  $\theta$ , sotto il vincolo  $\theta \in [0,1]$ . In questo modo avremo che:

$$(27) \quad \theta(r) = \begin{cases} 1 & \forall r \in \left[0, \frac{55 - \sqrt{2893}}{66}\right] \\ -10 + \sqrt{\frac{89}{(1+r)} + 33(1+r)} & \forall r \in \left(\frac{55 - \sqrt{2893}}{66}, \frac{55 + \sqrt{2893}}{66}\right) \\ 1 & \forall r \in \left[\frac{55 + \sqrt{2893}}{66}, \infty\right) \end{cases}$$

Dalla (27) risulta che nel caso che stiamo considerando si verifica il ritorno delle tecniche. Infatti, per livelli del tasso dell'interesse molto prossimi allo zero, la tecnica in uso è  $\theta = 1$ , cioè la tecnica col più alto prodotto netto per lavoratore. Facendo aumentare il tasso dell'interesse oltre il livello  $(55 - \sqrt{2893})/66$ , la tecnica  $\theta = 1$  viene abbandonata in favore di tecniche associate a livelli di  $\theta$  che sono tanto più bassi quanto più si fa crescere  $r$ . Tutto ciò fino al livello del tasso dell'interesse all'incirca pari al 64,22%; oltrepassato questo livello, infatti, i valori di  $\theta$  associati alle tecniche in uso cresceranno all'aumentare del tasso dell'interesse. Cioè le tecniche che sono state in uso per livelli di  $r$  tra 0 e 64,22%, ritorneranno in uso per qualche livello di  $r$  maggiore di 64,22%.

**29.** Nella tabella 1 (sotto) abbiamo riportato la tecnica in uso ed i livelli del saggio del salario, del prodotto netto per lavoratore e del valore del capitale per lavoratore in corrispondenza di diversi livelli del tasso dell'interesse.

Già dalla tabella si evince che, nel caso che stiamo considerando, tassi dell'interesse più alti implicano sempre valori del capitale per lavoratore più bassi, nonostante il ritorno delle tecniche. Questo fatto, tuttavia, può essere ancora meglio percepito osservando le figure 1 e 2, che mostrano la curva del prodotto netto per lavoratore e quella di domanda di capitale per lavoratore.

Questo esempio numerico, quindi, dimostra quanto già sostenuto nella sez. III, ovvero che il ritorno delle tecniche può essere compatibile con l'andamento monotono decrescente della curva di domanda di capitale in valore.

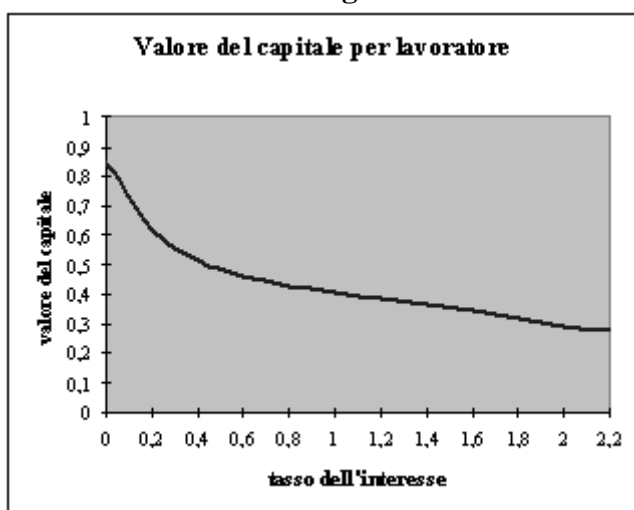
**Tabella 1**

Tasso dell'interesse	Tecnica in uso	Saggio del salario	Prodotto netto per lavoratore	Valore del capitale per lavor.
r	$\theta$	w	y	k
0	1	0,91667	0,91667	0,84028
$\frac{55 - \sqrt{2893}}{66}$	1	0,90147	0,91667	0,82635
0,1	0,82631	0,84183	0,91311	0,71287
0,25	0,60424	0,75579	0,90165	0,58344
0,5	0,43232	0,64643	0,88751	0,48217
$\sqrt{\frac{89}{33}} - 1$	0,41096	0,59476	0,88544	0,45261
0,75	0,42148	0,55939	0,88647	0,43611
1	0,51190	0,48838	0,89462	0,40624
1,25	0,66797	0,43134	0,90574	0,37952
1,5	0,86738	0,38656	0,91438	0,35188
$\frac{55 + \sqrt{2893}}{66}$	1	0,36507	0,91667	0,33465
1,75	1	0,35200	0,91667	0,32267

Figura 1



Figura 2



## BIBLIOGRAFIA

- Bhaduri, A. (1966) 'The Concept of the Marginal Productivity of Capital and the Wicksell Effect', Oxford Economic Paper, pp. 284-288.
- Bloise, G.; Reichlin, P. (2009) 'An Obstrusive Remark on Capital and Comparative Statics', Metroeconomica, in corso di pubblicazione.
- Burmeister, E. (1976) 'Real Wicksell Effects and Regular Economies', in M. Brown, K. Sato, P. Zaremka (eds.): *Essays in Modern Capital Theory*, Amsterdam: North-Holland.
- Clark, J.B. (1891) 'Distribution as Determined by a Law of Rent', Quarterly Journal of Economics, pp. 289-318
- Fratini, S.M. (2007) 'Reswitching of Techniques in an Intertemporal Equilibrium Model with Overlapping Generations', Contributions to Political Economy, 26, pp. 43-59.
- Garegnani, P. (1960) *Il Capitale nelle Teorie della Distribuzione*, Milano: Giuffr .
- Garegnani, P. (1970) 'Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution', Review of Economic Studies, pp. 407-436.
- Garegnani, P. (1976) 'On a change in the notion of equilibrium in recent work on value and distribution', in M. Brown, K. Sato, P. Zaremka (eds.): *Essays in Modern Capital Theory*, Amsterdam: North-Holland.
- Garegnani, P. (1984) 'On Some Illusory Instances of Marginal Products', Metroeconomica, vol. 36, pp.143-160.
- Garegnani, P. (1990) 'Quantity of capital', in J. Eatwell, M. Millgate, P. Newman (eds.) *Capital Theory*, London: Macmillan.
- Garegnani, P. (2003) 'Saving, Investment and the Quantity of Capital in General Intertemporal Equilibrium', in Hahn F. e Petri F. (eds.): *General Equilibrium. Problems and Prospects*, London: Routledge.
- Garegnani, P. (2005, a) 'Capital and Intertemporal Equilibria: A Reply to Mandler', Metroeconomica, pp. 411-437.
- Garegnani, P. (2005, b) 'Further on Capital and Intertemporal Equilibria: A Rejoinder to Mandler', Metroeconomica, pp. 495-502.
- Harcourt, G.C. (1972) *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, Cambridge: CUP.
- Hatta, T. (1976) 'The Paradox in Capital Theory and Complementarity of Inputs', Review of Economic Studies, pp. 127-142.

- Kurz, H.D. (2000) 'Wicksell and the problem of the 'missing equation'', History of Political Economy, vol. 32, pp. 765-788.
- Kurz, H.D.; Salvadori, N. (2001) 'The aggregate neoclassical theory of distribution and the concept of a given value of capital: a reply', Structural Change and Economic Dynamics, vol. 12, 2001, pp. 479-485.
- Malinvaud, E. (1953) 'Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources', Econometrica, pp. 233-268.
- Malinvaud, E. (1986) 'Reflecting on the Theory of Capital and Growth', Oxford Economic Papers, pp. 367-385.
- Malinvaud, E. (2003) 'The Legacy of Knut Wicksell to Capital Theory', Scandinavian Journal of Economics, pp. 507-525.
- Mas-Colell, A (1989) 'Capital Theory Paradoxes: Anything Goes', in G. Feiwel (ed.): *Joan Robinson and Modern Economic Theory*, New York: New York University Press.
- Negishi, T. (1982) 'Wicksell's Missing Equation and the Böhm-Bawek's Three Causes of Interest in a Stationary State', Zeitschrift für Nationalökonomie, pp. 161-174.
- Pasinetti, L.L. (1969) 'Switches of technique and the 'rate of return' in capital theory', Economic Journal, pp. 508-531.
- Potestio, P. (1999) 'The Aggregate Neoclassical Theory of Distribution and the Concept of a Given Value of Capital: Toward a More General Critique', Structural Change and Economic Dynamics, pp. 381-394.
- Potestio, P. (2001) 'The Aggregate Neoclassical Theory of Distribution and the Concept of a Given Value of Capital: a Counter-Reply', Structural Change and Economic Dynamics, pp. 487-490.
- Samuelson, L. (1982) 'On Wicksell's Missing Equation', History of Political Economy, pp. 301-307.
- Samuelson, P.A. (1962) 'Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function', Review of Economic Studies, pp. 193-206.
- Samuelson, P.A. (1966) 'A Summing Up', Quarterly Journal of Economics, pp. 568-583.
- Sandelin, B. (1980) 'Wicksell's Missing Equation, the Production Function, and the Wicksell Effect' History of Political Economy, pp. 29-40.
- Sandelin, B. (1982) 'On Wicksell's Missing Equation: a Comment', History of Political Economy, pp. 308-309.
- Solow, R.M. (1956) 'A Contribution to the Theory of Economic Growth', Quarterly Journal of Economics, pp. 65-94.

- Swan, T.W. (1956) 'Economic Growth and Capital Accumulation', Economic Record, pp. 334-361.
- Uhr, C. (1951) 'Knut Wicksell: A Centennial Evaluation', American Economic Review, pp. 829-860.
- Walras, L. ([1874] 1977) *Elements of Pure Economics*, Fairfield: A.M. Kelley.
- Wicksell, K. ([1893] 1954) *Value, Capital and Rent*, London: Allen and Unwin.
- Wicksell, K. ([1901] 1934) *Lectures of Political Economy*, vol. I, London: Allen & Unwin.