1 La Geometria delle Masse

1.1 Baricentri e Momenti Statici

Due sistemi di forze vengono detti *equivalenti* quando generano la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi. Dato, quindi, un sistema di forze parallele tra loro f_i, il sistema equivalente più semplice è quello che prevede di sostituire il sistema di partenza con una sola forza pari alla risultante $R = \Sigma f_i$ applicata lungo l'asse (*asse centrale*) rispetto al quale la somma dei momenti delle f_i è nulla (Figura 1).

Un principio analogo può essere applicato anche alle geometria delle aree o, più in generale, ad un sistema discreto di masse. Sia dato nel piano un sistema di punti nei quali si pensano concentrate delle masse generiche, ma omogenee, m_1, m_2, m_3...In ogni punto è applicata una forza proporzionale alla massa, che ne misura, in qualche modo, l'entità. Tutte queste forze, parallele tra loro, possono essere ridotte alla loro risultante applicata lungo l'asse centrale del sistema. Se le forze ruotano attorno ai loro punti di applicazione, mantenendosi sempre parallele, anche l'asse centrale ruota assieme a loro intorno ad un punto G del piano detto c*entro delle forze parallele* o, più in generale, *baricentro* del sistema di masse (Figura 1).

Per individuare le coordinate del baricentro di un sistema di masse, è necessario introdurre il concetto di *momento statico*.

Data una retta n nel piano delle masse e misurate le distanze y_1, y_2, y_3... secondo una prefissata direzione y, si definisce come momento statico del sistema di masse rispetto a n la somma dei prodotti delle masse per le rispettive distanze (momento del primo ordine).

$$S_n = \sum m_i y_i \tag{1}$$

Esso dipende, naturalmente, dalla direzione y (Figura 2). Il momento statico S_{np} calcolato con distanze valutate perpendicolarmente ad n è legato ad S_n da $S_{np} = S_n sen\alpha$. Inoltre, il momento statico può risultare positivo, negativo o nullo poichè, anche nel caso in cui tutte le masse siano positive, ogni termine

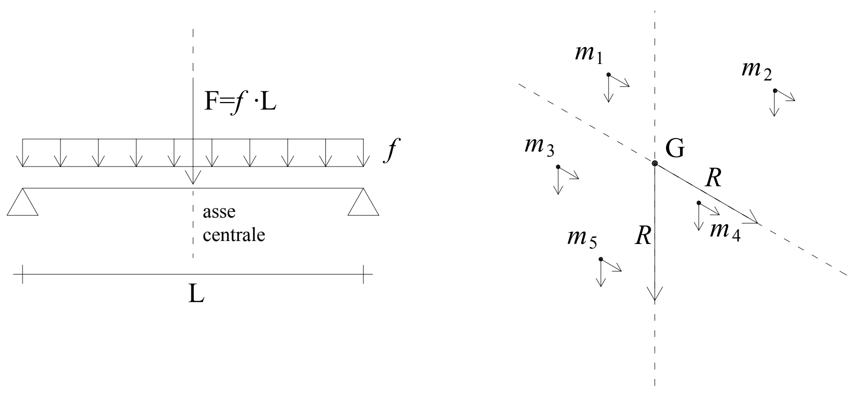

Figura 1:

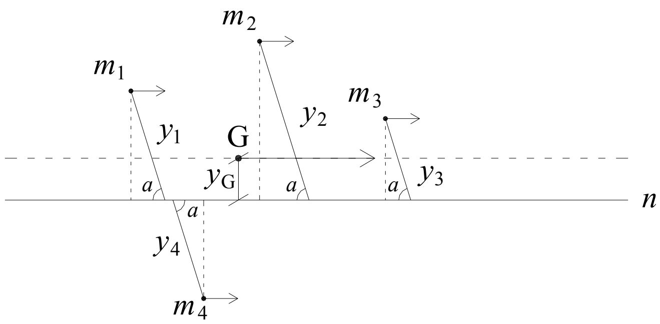

Figura 2: Momento Statico di un sistema di masse

della somma ha il segno dipendente dalla distanza che può essere negativa o positiva a seconda che la massa si trovi da una parte o dall'altra di n.

Calcolare il momento statico di un sistema di masse rispetto ad un generico asse n, con distanze misurate in direzione perpendicolare all'asse stesso, equivale a calcolare il momento di un sistema di forze sostituite alle masse e parallele a n (Figura 2). Quindi, equivale anche a calcolare il momento della risultante del sistema di forze rispetto allo stesso asse e poichè la risultante passa per il baricentro G del sistema, il momento cercato risulta uguale alla somma delle forze, ossia delle masse, moltiplicata per la distanza y_G del baricentro dalla retta n:

$$S_n = y_G \sum m_i \tag{2}$$

In sintesi, quindi, si può affermare che: *il momento statico di un sistema di masse rispetto ad una retta non cambia se si concentra la massa totale nel baricentro.*

Appare evidente, inoltre, grazie alla (2), che *il momento statico rispetto ad una retta baricentrica deve essere necessariamente nullo.* Di conseguenza, si può affermare anche che *il baricentro di un sistema di masse è il punto d'intersezione di tutte le rette rispetto alle quali il momento statico è nullo.*

Se si assumono due assi coordinati x e y, e si misurano le distanze da ciascuno di essi parallelamente all'altro, possono essere ottenute le coordinate del baricentro di un sistema di masse uguagliando la (1) con la (2):

$$y_G = \frac{S_x}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \tag{3a}$$

$$x_G = \frac{S_y}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \tag{3b}$$

Si immagini, adesso, di dover calcolare il momento statico e il baricentro non di un sistema discreto di masse, ma di un sistema continuo, costituito, ad esempio, da una superficie piana di data geometria. Al posto delle masse, quindi, ci sono porzioni infinitesimali di area (Figura 3), per cui la (1) e le (3b) diventano:

$$S_x = \int_A y dA \qquad ; \qquad S_y = \int_A x dA \tag{4a}$$

$$y_G = \frac{S_x}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A} \qquad ; \qquad x_G = \frac{S_y}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A} \tag{4b}$$

In linea di massima, per superfici piane semplici, non è assolutamente necessario dover ricorrere alle integrazioni. E' noto, infatti, che se un'area ha un asse di simmetria retta o obliqua (come le mediane del triangolo), il baricentro è su questo; se ne ha due, è nel loro incrocio. In caso di figura complessa, questa può essere, il più delle volte, decomposta in porzioni geometricamente semplici aventi baricentri noti nei quali si pensano concentrate le aree delle porzioni stesse. Il baricentro complessivo della figura, quindi, viene calcolato trasformando il sistema continuo in un sistema discreto (Figura 4).

1.2 Momenti d'Inerzia

1.2.1 Definizioni

Si chiama *momento d'inerzia* di un sistema piano di masse rispetto ad una retta n del piano la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle rispettive distanze y da n, misurate secondo una direzione prefissata (momento del secondo ordine):

$$J_n = \sum m_i (y_i)^2 \tag{5}$$

Anche in questo caso, il momento d'inerzia J_{np} con distanze valutate perpendicolarmente a n è legato a J_n da $J_{np} = J_n sen^2\alpha$.

Se consideriamo le masse sempre positive, il momento d'inerzia sarà anch'esso sempre positivo poichè calcolato su una distanza elevata al quadrato. Inoltre, se si divide J_n per la massa complessiva, si ottiene la distanza ρ_n alla quale bisognerebbe concentrare tale risultante per avere lo stesso momento d'inerzia rispetto alla retta n:

$$\frac{J_n}{\sum m_i} = \rho_n^2 \tag{6}$$

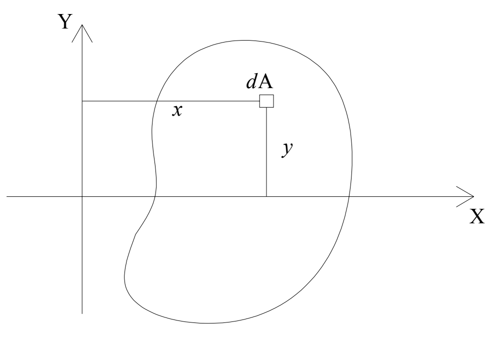

Figura 3:

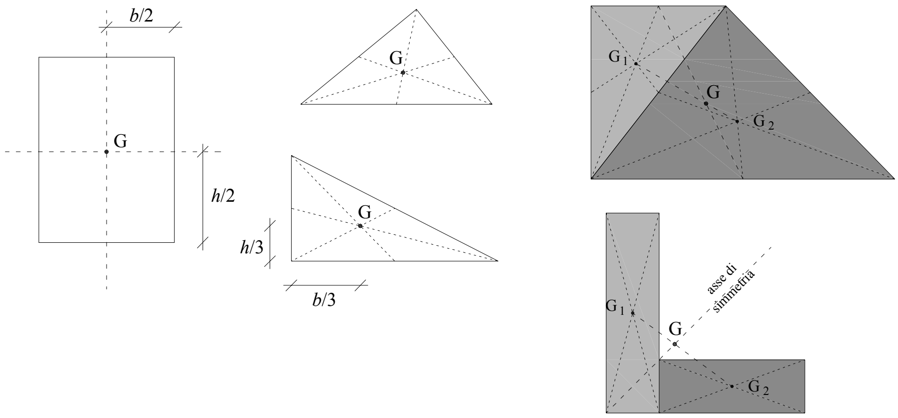

Figura 4: Baricentri di figure piane

ρ_n viene detto *raggio d'inerzia* rispetto alla retta n.

Oltre al momento d'inerzia assiale, possono essere definiti anche altri due tipi di momenti del secondo ordine.

Il *momento centrifugo* rispetto a due rette nel piano è dato dalla somma dei prodotti delle masse per le rispettive distanze dalle due rette valutate secondo direzioni prefissate (Figura 5 b):

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i \tag{7}$$

Considerando che le distanze possono essere positive o negative a seconda della regione del piano in cui si trova la massa, il momento centrifugo può essere positivo, negativo o addirittura nullo.

il *momento d'inerzia polare* ottenuto come somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle rispettive distanze da un punto P del piano (Figura 5 b):

$$J_p = \sum m_i r_i^2 \tag{8}$$

Se, ad esempio, sul punto P si pone l'origine del sistema di assi cartesiani x e y, si ha che $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ e quindi la (8) può essere riscritta:

$$J_p = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = J_x + J_y \tag{9}$$

Il momento d'inerzia polare rispetto ad un punto P è dunque *uguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a due rette ortogonali qualsiasi passanti per* P, valutati con distanze normali.

1.2.2 Teorema di Trasposizione

Si consideri, adesso la retta baricentrica n_0 parallela ad n (Figura 5 a). La distanza di ogni massa da n può essere calcolata come somma tra la distanza

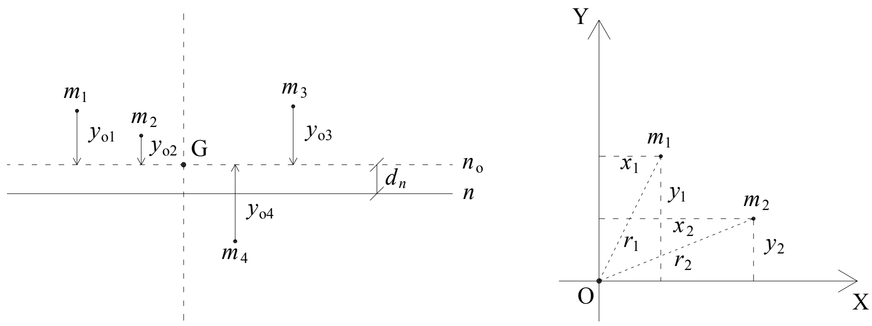

Figura 5: a) Momento d'Inerzia Assiale - b) Momenti d'Inerzia Centrifugo e Polare

y_{0i} di m_i da n_0, e la distanza d_n di n_0 da n. Il momento d'inerzia del sistema di masse rispetto ad n, quindi, può essere espresso come :

$$\begin{aligned} J_n &= \sum m_i(y_{0i}+d_n)^2 = \sum m_i(y_{0i}^2 + d_n^2 + 2y_{0i}d_n) \\ &= \sum m_i y_{0i}^2 + d_n^2 \sum m_i + 2d_n \sum m_i y_{0i} = J_{n_0} + d_n^2 \sum m_i \end{aligned} \tag{10}$$

dato che $\sum m_i y_{0i}$ è il momento statico del sistema rispetto ad un asse baricentrico e come tale è un termine nullo.

La (10) esprime il *teorema di trasposizione* per il quale: *il momento d'inerzia rispetto ad un asse n è uguale a quello rispetto all'asse baricentrico e parallelo n_0, più la massa totale moltiplicata per il quadrato della distanza tra le due rette.* Poichè l'aggiunta è sempre positiva, risulta evidente che fra tutte le rette aventi una data direzione, il momento d'inerzia rispetto a quella baricentrica è il più piccolo fra tutti.

In maniera analoga può essere ottenuto anche il raggio d'inerzia ρ_n. Se si divide la (10) per $\sum m_i$ si ha:

$$\rho_n^2 = \frac{J_n}{\sum m_i} = \frac{J_{n_0} + d_n^2 \sum m_i}{\sum m_i} = \rho_{n_0}^2 + d_n^2 \tag{11}$$

Teoremi analoghi possono essere applicati anche agli altri momenti d'inerzia. In particolare, per il momento d'inerzia centrifugo si ha:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_i(y_{0i}+d_x)(x_{0i}+d_y) = \sum m_i(y_{0i}^2 + d_n^2 + 2y_{0i}d_n) \\ &= \sum m_i y_{0i} x_{0i} + d_y \sum m_i y_{0i} + d_x \sum m_i x_{0i} + d_y d_x \sum m_i = \\ &= J_{x_0 y_0} + d_x d_y \sum m_i \end{aligned} \tag{12}$$

dove x_0 e y_0 sono assi baricentrici mentre x e y, sono due assi qualsiasi a loro paralleli distanti d_x e d_y.

Ovviamente, anche in questo caso, il passaggio dai sistemi discreti ai sistemi continui è immediato. In particolare, per quanto riguarda le superfici piane si

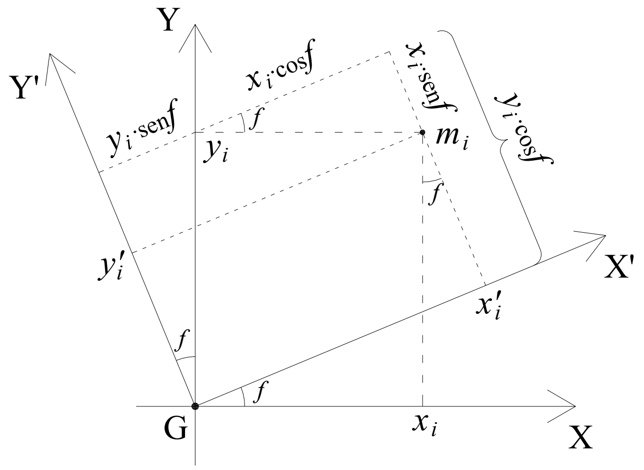

Figura 6: Rotazione degli assi coordinati

ha:

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_A y^2 dA \qquad ; \qquad \rho_n^2 = \frac{J_n}{A} \\
J_{xy} &= \int_A xy dA \qquad ; \qquad J_p = \int_A r^2 dA \\
J_n &= J_{n_0} + A \cdot d_n^2 \\
J_{xy} &= J_{x_0 y_0} + A \cdot d_x d_y
\end{aligned}
$$

1.2.3 Assi e Momenti Principali d'Inerzia

Si immagini di avere il solito sistema piano di masse, di porre l'origine degli assi coordinati x e y nel baricentro e di calcolare i momenti d'inerzia J_x e J_y e J_{xy}. Come varieranno i valori dei momenti se gli assi coordinati cominciano a ruotare intorno al baricentro?

Le coordinate x_i,y_i di una generica massa m_i variano con l'angolo d'inclinazione della nuova coppia di assi rispetto a quella originaria seguendo la legge (Figura 6):

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i \cos\varphi + y_i \sin\varphi \\
y_i' &= y_i \cos\varphi - x_i \sin\varphi
\end{aligned} \tag{13}
$$

Sostituendo le (13) nelle espressioni del momento d'inerzia J_x' calcolato rispetto al nuovo asse x' si ottiene:

$$
\begin{aligned}
J_x' &= \sum m_i (y_i')^2 = \sum m_i (y_i \cos\varphi - x_i \sin\varphi)^2 \\
&= \sum m_i (y_i^2 \cos^2\varphi + x_i^2 \sin^2\varphi - 2 x_i y_i \cos\varphi \sin\varphi) \\
&= J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - 2 J_{xy} \cos\varphi \sin\varphi
\end{aligned} \tag{14}
$$

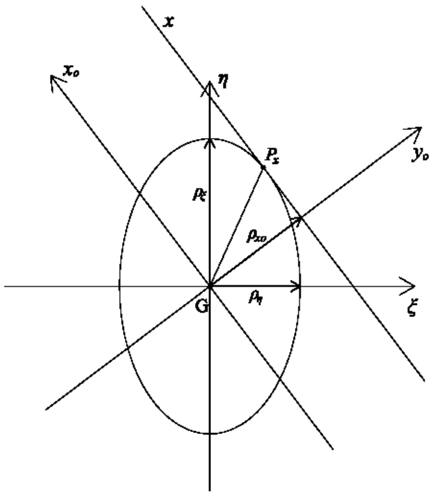

Figura 7: Ellisse Centrale d'Inerzia

In maniera analoga possono essere espressi J'_y e J'_{xy}:

$$\begin{aligned} J'_y &= J_x \sin^2\varphi + J_y \cos^2\varphi + 2J_{xy}\cos\varphi\sin\varphi \\ J'_{xy} &= J_{xy}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

Grazie alle (14) e (15) si possono fare alcune importanti osservazioni. Innanzi tutto se si sommano, membro a membro, J'_x e J'_y, si ottiene $J_x + J_y = J'_x + J'_y$, com'è ovvio dato che questa somma fornisce il momento polare rispetto all'origine degli assi che non cambia al variare dell'angolo φ. In secondo luogo, dividendo la seconda delle (15) per $\cos 2\varphi$, si nota che il momento centrifugo J'_{xy} si annulla se l'angolo 2φ soddisfa l'espressione:

$$\tan 2\varphi = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \tag{16}$$

L'angolo di rotazione, così definito, individua una coppia d'assi ortogonali tra loro ξ e η, detti *assi principali d'inerzia*, rispetto ai quali il momento d'inerzia centrifugo $J_{\xi\eta}$ è nullo, ed i *momenti principali d'inerzia* J_ξ e J_η risultano uno massimo e l'altro minimo.

Grazie a questa proprietà, può essere facilmente calcolato il momento centrifugo di superfici complesse, ma pur sempre scomponibili in figure semplici e simmetriche. Per il teorema del trasporto, infatti, espresso dalla (12), se x_0 e y_0 sono assi principali d'inerzia, la (12) si riduce a:

$$J_{xy} = d_x d_y \sum m_i \tag{17}$$

Per quanto riguarda le figure simmetriche, gli assi principali d'inerzia coincidono sempre con gli assi di simmetria. Infatti, ponendo gli assi con origine sul baricentro e la direzione y sull'asse di simmetria, si osserva che ad ogni punto

p_i di coordinate $+x_i, +y_i$, ne corrisponde uno di coordinate $-x_i, -y_i$. Ne segue che il momento centrifugo è nullo e che y coincide con η.

E' interessante fare anche un'ultima osservazione sulle proprietà dei momenti d'inerzia e in particolare dei raggi d'inerzia. Si può dimostrare che i raggi principali d'inerzia ρ_ξ e ρ_η corrispondono ai semiassi di un'ellisse, detta *ellisse centrale d'inerzia*, di equazione:

$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1$$

Come si può notare grazie alla Figura 7, dato un asse baricentrico x_0, comunque ruotato rispetto agli assi principali, il corrispondente raggio d'inerzia ρ_{x_0} è dato dalla proiezione sull'asse perpendicolare y_0, della distanza $G - P_x$, con P_x punto di tangenza tra l'ellisse e la retta parallela a x_0. D'altra parte, se riprendiamo la definizione data di raggio d'inerzia, l'ellisse centrale d'inerzia risulta essere l'inviluppo di tutte quelle rette lungo le quali è possibile concentrare l'intera massa in maniera da mantenere inalterati i momenti d'inerzia calcolati rispetto agli assi baricentrici paralleli.