

PROVA DI RECUPERO DEL 20.12.1999: ESERCIZIO N°1

**Traccia**

Per la trave in c.a. rappresentata in figura, progettare allo stato limite ultimo e disegnare le armature a flessione e a taglio, tenendo conto che la sezione trasversale è costante e ha dimensioni:

$$b=40\text{cm} \quad h=60\text{cm}$$

Assumere per i materiali le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$\begin{aligned} &\text{calcestruzzo } R_{ck}=30\text{kN/mm}^2 \\ &\text{acciaio FeB38k } (f_{yk}=375\text{N/mm}^2) \end{aligned}$$

I carichi indicati in figura includono il peso proprio della trave e vanno intesi come valori di calcolo (carichi ottenuti da quelli caratteristici amplificandoli per i corrispondenti coefficienti  $\gamma$ ).

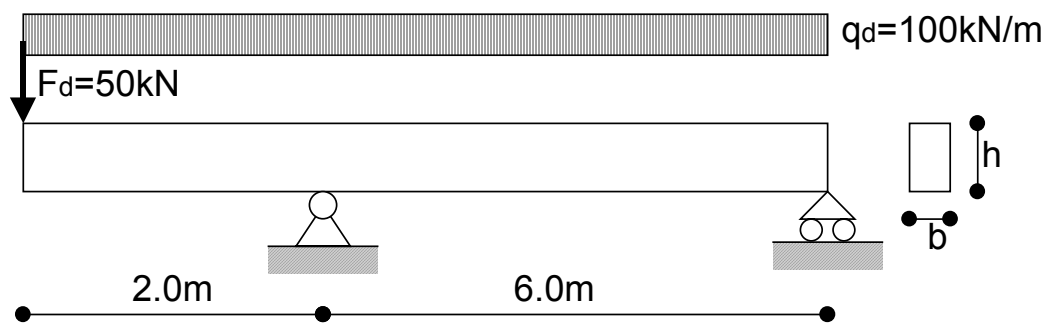
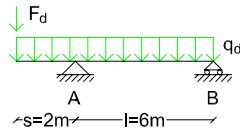


Figura 1: schema della struttura

PROVA DI RECUPERO DEL 20.12.1999: ESERCIZIO N°1

**Soluzione**

Calcolo delle reazioni vincolari in corrispondenza degli appoggi A e B



$$R_A + R_B - F_d - q_d \times (s + l) = R_A + R_B - 50 - 800 = 0$$

$$6R_B + 50 \times 2 + 100 \times 2 \times 1 - 100 \times 6 \times 3 = 0$$

$$R_B = \frac{1800 - 100 - 200}{6} = 250 \text{ kN}$$

$$R_A = 600 \text{ kN}$$

Il momento flettente in corrispondenza dell'appoggio A vale :

$$M_A = -F_d \times s - \frac{q_d \times s^2}{2} = -50 \times 2 - \frac{100 \times 2^2}{2} = -300 \text{ kN}$$

Nel tratto AB il momento flettente vale :

$$M(z) = M_A \times \frac{1-z}{l} + \frac{q_d}{2} \times (lz - z^2)$$

L'espressione del taglio, come derivata prima del momento rispetto a z, è :

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = -\frac{M_A}{l} + \frac{q_d}{2} \times (1 - 2z)$$

L'ascissa  $\bar{z}$  in cui il taglio è nullo si ottiene da :

$$T(\bar{z}) = 0 \Rightarrow \frac{q_d}{2} \times (1 - 2\bar{z}) = \frac{M_A}{l}$$

$$(1 - 2\bar{z}) = \frac{2 \times M_A}{l \times q_d}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{M_A}{l \times q_d} = \frac{6}{2} - \frac{300}{100 \times 6} = 3.5 \text{ m}$$

Per  $z = \bar{z}$  si ottiene il momento massimo in campata che vale :

$$M_{\max} = M(\bar{z}) = M_A \times \frac{1-\bar{z}}{l} + \frac{q_d}{2} \times (l\bar{z} - \bar{z}^2) = -300 \times \frac{6-3.5}{6} + \frac{100}{2} \times (6 \times 3.5 - 3.5^2) = 312.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Valutazione delle resistenze di calcolo dei materiali

$$f_{cd} = \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83 \times 30}{1.6} = 15.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{f}_{cd} = 0.85 \times \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \times \frac{0.83 \times 30}{1.6} = 13.23 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{375}{1.15} = 326.1 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times 0.27 \times \sqrt[3]{R_{ck}^2}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times 0.27 \times \sqrt[3]{30^2}}{1.6} = 1.14 \text{ N/mm}^2$$

## 1) Progetto delle armature a flessione

Considerando un copriferro  $d' = 3 \text{ cm}$  ed un'altezza utile  $d = 57 \text{ cm}$  l'armatura strettamente necessaria in campata risulta :

$$A_s = \frac{M_{\max}}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{312.5 \times 10^6}{0.9 \times 570 \times 326.1} = 1868 \text{ mm}^2 = 18.68 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 6\phi 20 = 6 \times 3.14 = 18.85 \text{ cm}^2$$

L'armatura strettamente necessaria all'appoggio A risulta :

$$A_s = \frac{|M_A|}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{300 \times 10^6}{0.9 \times 570 \times 326.1} = 1793 \text{ mm}^2 = 17.93 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 6\phi 20 = 6 \times 3.14 = 18.85 \text{ cm}^2$$

## 2) Progetto dell'armatura a taglio

– In corrispondenza degli appoggi

Il taglio massimo si ha in corrispondenza dell'appoggio A  $\Rightarrow V_d = 350 \text{ kN}$

Verifica del conglomerato: la resistenza delle bielle compresse deve essere maggiore del taglio di calcolo  $V_d$

$$V_d \leq 0.3 \times f_{ctd} \times b \times d \leq 0.3 \times 15.6 \times 400 \times 570 \leq 1067 \times 10^3 \text{ N} = 1067 \text{ kN} \Rightarrow \text{Verificato}$$

Il taglio assorbito dal conglomerato vale:

$$V_{cu} = 0.60 f_{ctd} \times b \times d \times \delta = 0.60 \times 1.14 \times 400 \times 570 = 156 \text{ kN}$$

Poiché risulta

$$V_{cu} < V_d / 2$$

si deve progettare l'armatura in modo che sopporti le forze di taglio eccedenti quelle equilibrate dal calcestruzzo

$$V_{su} = V_d - V_{cu} = 350 - 156 = 194 \text{ kN}$$

$$V_{su} = A_{sw} \times f_{yd} \times (0.9d/s)$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{su}}{f_{yd} \times 0.9d} = \frac{194 \times 10^3}{326.1 \times 0.9 \times 570} = 1.160 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} = 11.60 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Il quantitativo minimo di armatura previsto dalla normativa risulta :

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{\min} = 0.10 \left( 1 + 0.15 \frac{d}{b} \right) \times b = 0.10 \left( 1 + 0.15 \times \frac{57}{40} \times 40 \right) = 4.86 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} > \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{\min}$$

Scegliendo ferri  $\phi 10$  si ha :

$$A_t = 0.79 \text{ cm}^2$$

Il passo delle staffe che si ottiene adottando ferri  $\phi 10$  è :

$$s = \frac{2A_t}{A_{sw}/s} = \frac{2 \times 0.79}{11.60} = 0.136 \text{ m} = 13.6 \text{ cm}$$

Il passo minimo previsto dalla normativa vale :

$$s_{norm} = \min(33 \text{ cm}, 0.8d) = \min(33 \text{ cm}, 45.6 \text{ cm}) = 33 \text{ cm}$$

$$s < s_{norm} \Rightarrow \text{Verificato}$$

Per una distanza pari a  $d = 57 \text{ cm}$  dagli appoggi si deve avere

$$s < 12\phi = 12 \times 2 = 24 \text{ cm} \Rightarrow \text{Verificato}$$

Si possono adottare 8 staffe  $\phi 10$  a due bracci per metro = 1 staffa  $\phi 10/12.5 \text{ cm} = 12.64 \text{ cm}^2/\text{m}$

– In campata

$$\left(\frac{A_{sw}}{s}\right)_{min} = 4.86 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \Rightarrow 1 \text{ staffa } \phi 8 \text{ a due bracci}/20 \text{ cm} = 5.00 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Il taglio assorbito dall'armatura minima prevista dalla normativa è :

$$V_{su, min} = A_{sw, min} \times f_{yd} \times \frac{0.9d}{s} = 2 \times 50 \times 326.1 \times \frac{0.9 \times 570}{200} = 83644 \text{ N} = 83.6 \text{ kN}$$

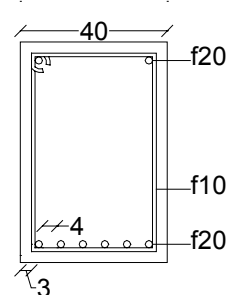
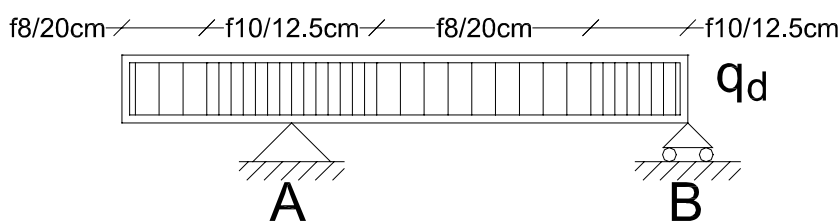
$V_{R, min}$  = taglio resistente minimo della trave

$$V_{R, min} = V_{cu} + V_{su, min} = 156 + 83.6 = 239.6 \text{ kN}$$

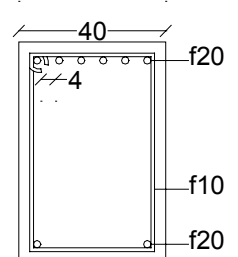
Dove il taglio di calcolo risulta maggiore di  $V_{R, min}$  l'armatura minima di normativa non è sufficiente; ciò avviene a partire da una distanza  $x$  dagli appoggi pari a :

$$V_{R, min} = V_d - q_d \times x$$

$$x = \frac{V_d - V_{R, min}}{q_d} = \frac{350 - 239.6}{100} = 1.1 \text{ m}$$



Sezione in campata



Sezione in corrispondenza dell'appoggio