

PROVA DI RECUPERO DEL 10.02.2000: ESERCIZIO N°1

**Traccia**

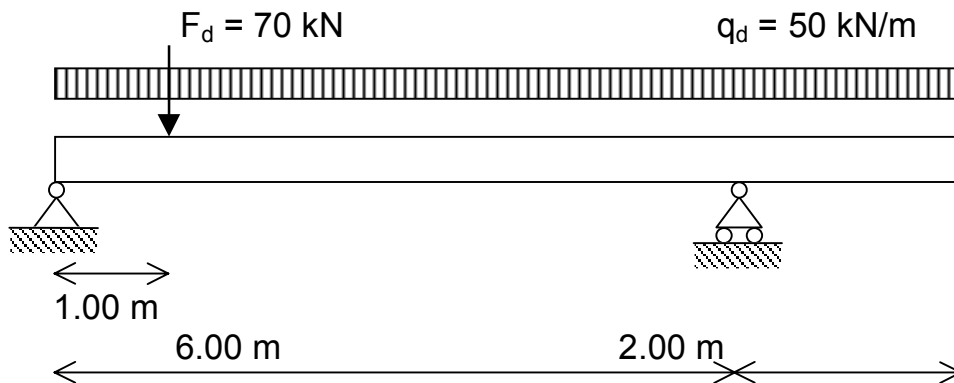
Per la trave in c.a. schematizzata in figura, assumendo una sezione

$$b = 0.30 mh = 0.60 \text{ m}$$

progettare allo stato limite ultimo le armature di flessione e taglio ed eseguire le relative verifiche assumendo per i materiali le seguenti caratteristiche meccaniche:

calcestruzzo  $R_{ck}=30\text{kN/mm}^2$   
acciaio FeB44k

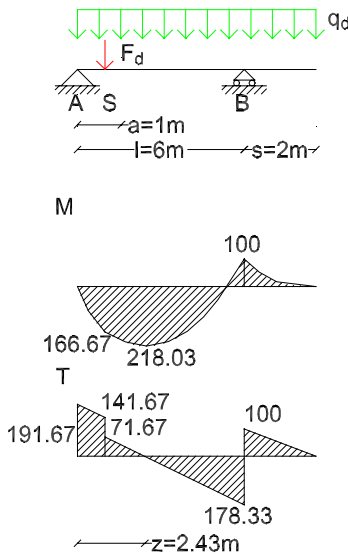
I carichi indicati in figura sono quelli relativi allo stato ultimo.



*Figura 1: Schema della struttura*

PROVA DI RECUPERO DEL 10.02.2000: ESERCIZIO N°1

**Soluzione**



Calcolo delle reazioni vincolari in corrispondenza degli appoggi A e B

$$R_A + R_B - F_d - q_d \times (s + l) = R_A + R_B - 70 - 400 = 0$$

$$6R_B - 70 \times 1 - 50 \times 8 \times 4 = 0$$

$$R_B = \frac{70 + 1600}{6} = 278.33 \text{ kN}$$

$$R_A = 191.67 \text{ kN}$$

Il momento flettente in corrispondenza dell'appoggio B vale :

$$M_B = -\frac{q_d \times s^2}{2} = -\frac{50 \times 2^2}{2} = -100 \text{ kN}$$

Nel tratto AS, considerando

$$b = l - a = 5 \text{ m}$$

il momento flettente vale :

$$M(z) = F_d \times \frac{b \times z}{1} + \frac{q_d}{2} \times (lz - z^2) + \frac{M_B}{1} \times z$$

L'espressione del taglio, come derivata prima del momento rispetto a z, è :

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = F_d \times \frac{b}{1} + \frac{q_d}{2} \times (1 - 2z) + \frac{M_B}{1}$$

Nel tratto SB il momento flettente vale :

$$M(z) = F_d \times \frac{a}{1} \times (1 - z) + \frac{q_d}{2} \times (lz - z^2) + \frac{M_B}{1} \times z$$

L'espressione del taglio, come derivata prima del momento rispetto a z, è :

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = -F_d \times \frac{a}{1} + \frac{q_d}{2} \times (1 - 2z) + \frac{M_B}{1}$$

L'ascissa  $\bar{z}$  in cui il taglio è nullo si ottiene da :

$$T(\bar{z}) = 0 \Rightarrow \frac{q_d}{2} \times (1 - 2\bar{z}) = F_d \times \frac{a}{1} - \frac{M_B}{1}$$

$$(1 - 2\bar{z}) = \frac{2 \times (F_d \times a - M_B)}{1 \times q_d}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{F_d \times a - M_B}{1 \times q_d} = \frac{6}{2} - \frac{70 \times 1 + 100}{6 \times 50} = 2.43 \text{ m}$$

Per  $z = \bar{z}$  si ottiene il momento massimo in campata che vale :

$$M_{\max} = M(\bar{z}) = F_d \times \frac{a}{1} \times (1 - \bar{z}) + \frac{q_d}{2} \times (l\bar{z} - \bar{z}^2) + \frac{M_B}{1} \times \bar{z} =$$

$$= 70 \times \frac{1}{6}(6 - 2.43) + \frac{50}{2}(6 \times 2.43 - 2.43^2) - \frac{100}{6} \times 2.43 = 218.03 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

In corrispondenza del punto S il momento flettente vale :

$$M_S = M(a) = F_d \times \frac{a \times b}{1} + \frac{q_d}{2} \times (1a - a^2) + \frac{M_B}{1} \times a = 70 \times \frac{1 \times 5}{6} + \frac{50}{2} \times (6 \times 1 - 1) - \frac{100}{6} = 166.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Valutazione delle resistenze di calcolo dei materiali

$$f_{cd} = \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83 \times 30}{1.6} = 15.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{f}_{cd} = 0.85 \times \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \times \frac{0.83 \times 30}{1.6} = 13.23 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{430}{1.15} = 373.9 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times 0.27 \times \sqrt[3]{R_{ck}^2}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times 0.27 \times \sqrt[3]{30^2}}{1.6} = 1.14 \text{ N/mm}^2$$

1) Progetto delle armature a flessione

- Considerando un copriferro  $d' = 4 \text{ cm}$  ed un'altezza utile  $d = 56 \text{ cm}$ , l'armatura strettamente necessaria in campata risulta :

$$A_s = \frac{M_{\max}}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{218.03 \times 10^6}{0.9 \times 560 \times 373.9} = 1157 \text{ mm}^2 = 11.57 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 4\phi 20 = 4 \times 3.14 = 12.56 \text{ cm}^2$$

- L'armatura strettamente necessaria all'appoggio B risulta :

$$A_s = \frac{M_B}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{100 \times 10^6}{0.9 \times 560 \times 373.9} = 530.6 \text{ mm}^2 = 5.31 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2\phi 12 + 1\phi 20 = 2 \times 1.12 + 1 \times 3.14 = 5.38 \text{ cm}^2$$

2) Progetto dell'armatura a taglio

- In corrispondenza degli appoggi

Il taglio in A, uguale alla reazione vincolare in A, risulta:

$$T_A = R_A = 191.7 \text{ kN}$$

Verifica del conglomerato: la resistenza delle bielle compresse deve essere maggiore del taglio di calcolo  $T_A$

$$T_A \leq 0.3 \times f_{cd} \times b \times d \leq 0.3 \times 15.6 \times 300 \times 560 \leq 786.2 \times 10^3 \text{ N} = 786.2 \text{ kN} \Rightarrow \text{Verificato}$$

Il taglio assorbito dal conglomerato vale:

$$V_{cu} = 0.60 f_{ctd} \times b \times d \times \delta = 0.60 \times 1.14 \times 300 \times 560 = 114.91 \text{ kN}$$

Poiché risulta

$$V_{cu} > T_A/2$$

Si deve assumere che l'armatura assorba almeno la metà del taglio:

$$V_{su} = T_A/2$$

$$V_{su} = A_{sw} \times f_{yd} \times (0.9d/s) = T_A/2$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_A}{2 \times f_{yd} \times 0.9d} = \frac{191.67 \times 10^3}{2 \times 373.9 \times 0.9 \times 560} = 0.509 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} = 5.09 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Il quantitativo minimo di armatura previsto dalla normativa risulta :

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{min} = 0.10 \left( 1 + 0.15 \frac{d}{b} \right) \times b = 0.10 \left( 1 + 0.15 \times \frac{56}{30} \right) \times 30 = 3.84 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} > \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{min}$$

Scegliendo ferri  $\phi 8$  si ha :

$$A_t = 0.5 \text{ cm}^2$$

Il passo delle staffe che si ottiene adottando ferri  $\phi 8$  è :

$$s = \frac{2A_t}{A_{sw}/s} = \frac{2 \times 0.5}{5.09} = 0.196 \text{ m} = 19.6 \text{ cm}$$

Il passo minimo previsto dalla normativa vale :

$$s_{norm} = \min(33 \text{ cm}, 0.8d) = \min(33 \text{ cm}, 44.8 \text{ cm}) = 33 \text{ cm}$$

$$s < s_{norm} \Rightarrow \text{Verificato}$$

Per una distanza pari a  $d = 56 \text{ cm}$  dagli appoggi si deve avere

$$s < 12\phi = 12 \times 1.2 = 14.4 \text{ cm}$$

Si possono adottare 8 staffe  $\phi 8$  a due bracci per metro = 1 staffa  $\phi 8/12.5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2/\text{m}$

- In campata

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{min} = 3.84 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \Rightarrow 1 \text{ staffa } \phi 8 \text{ a due bracci}/25 \text{ cm} = 4.00 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Il taglio assorbito dall'armatura minima prevista dalla normativa è :

$$V_{su, min} = A_{sw, min} \times f_{yd} \times \frac{0.9d}{s} = 2 \times 50 \times 373.9 \times \frac{0.9 \times 560}{250} = 75378 \text{ N} = 75.38 \text{ kN}$$

$V_{R, min}$  = taglio resistente minimo della trave

Poiché

$$V_{cu} > V_{su, min}$$

il taglio resistente minimo risulta :

$$V_{R, min} = 2 \times V_{su, min} = 2 \times 75.38 = 150.76 \text{ kN}$$

Dove il taglio di calcolo risulta maggiore di  $V_{R, \min}$  l'armatura minima di normativa non è sufficiente e; ciò avviene a partire da una distanza  $x$  dagli appoggi pari a :

$$V_{R, \min} = T_A - q_d \times x$$

$$x = \frac{T_A - V_{R, \min}}{q_d} = \frac{191.67 - 150.76}{50} = 0.82 \text{ m}$$