PROVA INTERCORSO N°1 del 24.04.2001: ESERCIZIO A

Traccia

Con riferimento alla struttura in c.a. rappresentata in figura, sollecitata da un carico uniformemente ripartito il cui valore di calcolo (incluso il peso proprio della trave) è pari a $p_d = 50$ kN/m :

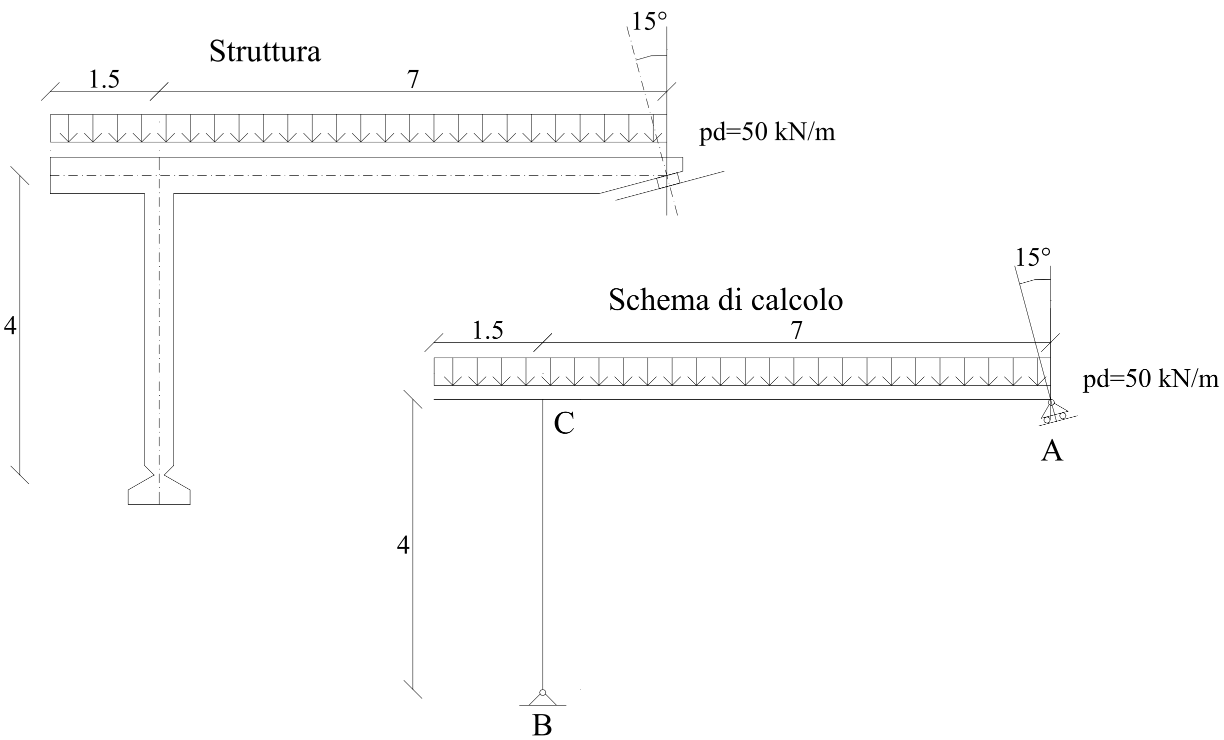
1) determinare le reazioni vincolari e disegnare i diagrammi di sollecitazione (N, T, M);
2) progettare (a semplice armatura) le armature longitudinali a flessione della trave per le sezioni più sollecitate, trascurando lo sforzo normale e considerando una sezione di:
   larghezza b = 40 cm *altezza* h = 50 cm *copriferro di calcolo* d'= 3 cm
3) Verificare, a doppia armatura, la sezione della trave immediatamente a destra del nodo trave-pilastro, considerando un'armatura al lembo inferiore compresso in grado di assorbire uno sforzo di trazione pari al taglio e trascurando sempre lo sforzo normale;

4a) **[solo laboratorio A e C]** progettare le armature a taglio della trave (escluso il tratto a sezione variabile), adottando staffe verticali;

4b) **[solo laboratorio B]** verificare a pressoflessione la sezione più sollecitata del pilastro considerando una sezione di:
   larghezza b = 40 cm *altezza* h = 40 cm *copriferro di calcolo* d'= 3 cm *armature* As = As' = 3 ϕ 20

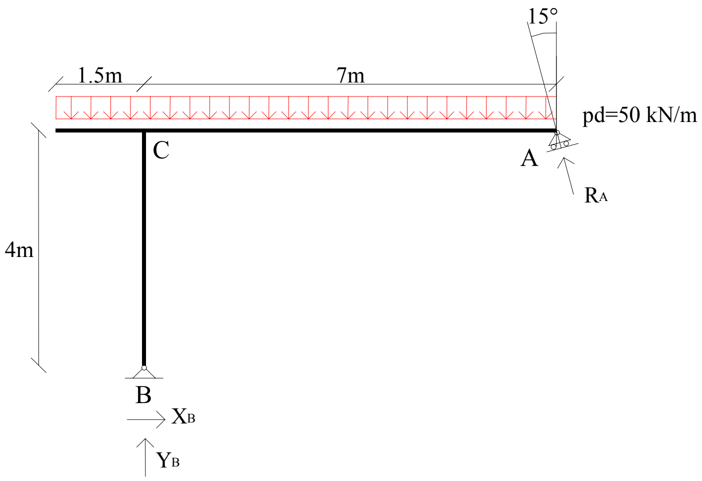
5) **[opzionale]** Disegnare il tracciato delle armature della trave **[solo a flessione per il lab. B, a flessione e taglio per il lab. A e C]** ed il relativo momento resistente.

Si assumano le seguenti caratteristiche dei materiali:
acciaio: FeB 44 k
calcestruzzo RcK 30 Mpa



Soluzione

1) Reazioni vincolari e diagrammi di sollecitazione:



Acciaio: FeB 44K
Cls: RcK 30Mpa

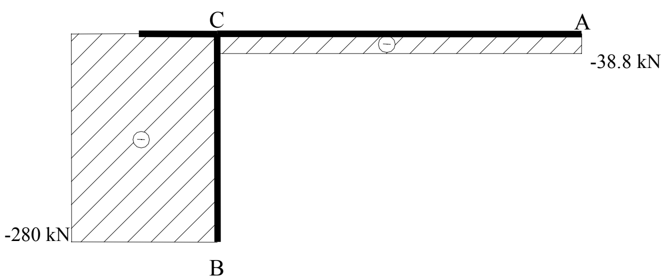
Equilibrio intorno a B:

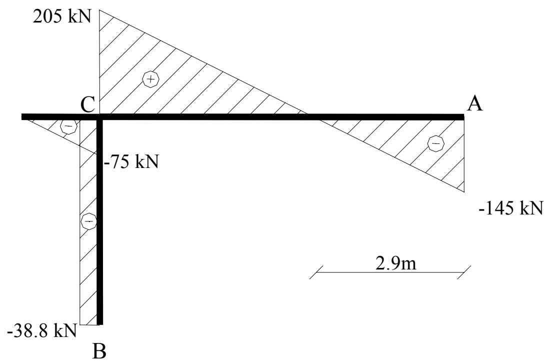
$$P_d \times \left(\frac{1.5^2}{2} - \frac{7^2}{2}\right) + R_A \times \cos 15^0 \times 7 + R_A \times \mathrm{sen}15^0 \times 4 = 0$$

$$R_A = \frac{50 \times \left(\frac{7^2}{2} - \frac{1.5^2}{2}\right)}{\cos 15^0 \times 7 + \mathrm{sen}15^0 \times A} = 150KN$$

$$X_B = X_A = R_A \times \mathrm{sen}15^0 = 150 \times \mathrm{sen}15^0 = 38.8KN$$

$$X_B = P_d \times (7 + 1.5) - R_A \times \cos 15^0 = 50 \times 8.5 - 150\cos 15^0 = 280KN$$



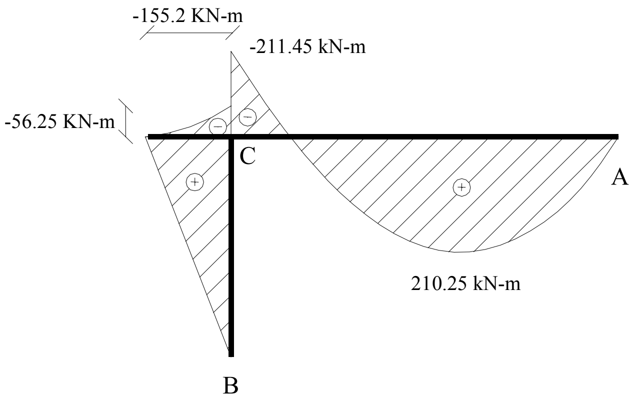


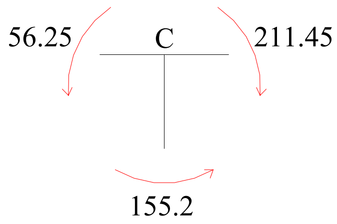
$$T_c^{sin} = -P_d \times 1.5 = -50 \times 1.5 = -75KN$$

$$T_c^{dex} = -T_c^{sin} + y_B = -75 + 280 = 205KN$$

$$T_A = R_A \times \cos 15^0 = 150 \times \cos 15^0 = 145KN$$

$$x_0 = \frac{T_A}{p_d} = \frac{145}{50} = 2.9m$$





$$M_c^{sin} = P_d \frac{1.5^2}{2} = 50 \times \frac{1.5^2}{2} = -56.25KN - m$$

$$\rightarrow M_c^{dex} = 56.25 + 155.2 = 211.45KN - m$$

$$M_c^{inf} = T_B \times 4 = 38.8 \times 4 = 155.2KN - m$$

Momento massimo in campata:

$$M(x_0) = T_A \times x_0 - p_d \frac{x_0^2}{2} = 145 \times 2.9 - 50 \times \frac{(2.9)^2}{2} = 210.25KN - m$$

2) Progetto delle armature longitudinali per le sezioni più sollecitate:

Tensioni di calcolo dei materiali:

$$FeB44K \rightarrow f_{yk} = 430\, N/mm^2 \rightarrow f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{430}{1.15} = 374\, N/mm^2$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{374}{206000} = 1.816\,‰$$

$$R_{ck} = 30MP_a \rightarrow \quad f_{cd} = \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83 \times 30}{1.6} = 15.56\, N/mm^2$$

$$\overline{f_{cd}} = 0.85 \times \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \times \frac{0.83 \times 30}{1.6} = 13.23\, N/mm^2$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times 0.27 \times \sqrt[3]{R_{ck}^2}}{\gamma_c} = \frac{0.7 \times 0.27 \times \sqrt[3]{30^2}}{1.6} = 1.14\, N/mm^2$$

Progetto armatura a flessione (d = h-d′ =47cm)

sezione C a sinistra:

$$A_s^{str.nec} = \frac{M_c^{sin}}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{56.25 \times 10^6}{0.9 \times 470 \times 374} = 356\, mm^2 = 3.56\, cm^2 \rightarrow \text{ad es.} 2\phi 16 = 4.02cm^2$$

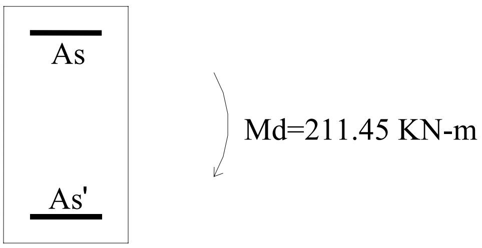
sezione C a destra:

$$A_s^{str.nec} = \frac{M_c^{dex}}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{211.45 \times 10^6}{0.9 \times 470 \times 374} = 1337 mm^2 = 13.37\ cm^2 \rightarrow \text{ad es.} 7\phi 16 = 14.07 cm^2$$

sezione M^{max} in campata :

$$A_s^{str.nec} = \frac{M(x_0)}{0.9 \times d \times f_{yd}} = \frac{210.25 \times 10^6}{0.9 \times 470 \times 374} = 1329\ mm^2 = 13.29\ cm^2 \rightarrow \text{ad es.}\ 7\phi 16 = 14.07 cm^2$$

3) Verifica a flessione (doppia armatura)



$$A_s = 7\phi 16 = 14.07 cm^2$$

$$A'_s = \frac{T_c^{dex}}{f_{yd}} = \frac{205 \times 10^3}{374} = 548 mm^2 = 5.48 cm^2 \rightarrow 3\phi 16 = 6.03 cm^2$$

$$\mu_s = \frac{A_s \times f_{yd}}{b \times d \times f_{cd}} = \frac{1407 \times 374}{400 \times 470 \times 13.23} = 0.212 \triangleleft \mu_s^{(2)} = 0.21 + \mu'_s \frac{\sigma_s(\varepsilon'_s)}{f_{yd}}$$

$$\mu'_s = \frac{A'_s \times f_{yd}}{b \times d \times f_{cd}} = \frac{603 \times 374}{400 \times 470 \times 13.23} = 0.091$$

<u>rottura in regione 3</u>

Ipotizzando che l'armatura compressa sia snervata, si ha :

$$K = \frac{0.212 - 0.091}{0.81} = 0.149$$

Verifica che l'ipotesi assunta sia corretta :

$$\varepsilon_s^{'} = 10 \times 10^{-3} \times \frac{K - \delta}{1 - K} = 10 \times 10^{-3} \times \frac{0.149 - 0.064}{1 - 0.149} = 0.01 \times \frac{0.085}{0.851} = 0.001 \rightarrow 1.0\%_{0} < \varepsilon_{yd} = 1.82\%_{0}$$

$$\delta = \frac{3}{47} = 0.064$$

L'ipotesi non e' verificata quindi ricalcolo K tenendo conto che l'armatura compressa e' ancora in fase elastica :

$$0.81K^2 - \left(0.81 + \mu_s + \mu_s^{'}\alpha_1\right)K + \left(\mu_s + \delta\mu_s^{'}\alpha_1\right) = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_{sl}}{\varepsilon_{yd}} = \frac{10 \times 10^{-3}}{1.82 \times 10^{-3}} = 5.49$$

$$0.81K^2 - (1.82 + 0.212 + 0.499)K + (0.212 + 0.0319) = 0$$

$$0.81K^2 - 1.521K + 0.2439 = 0$$

$$K = \frac{+1.521 \pm \sqrt{2.3134 - 0.79}}{1.62} = \frac{1.521 \pm 1.234}{1.62} = \begin{cases} 2.755 \\ 0.177 \end{cases}$$

Dato che K deve essere compreso tra 0 e 1 la soluzione esatta e' $K = 0.177$

Calcolo il valore effettivo della deformazione dell'armatura compressa ε'_s

$$\varepsilon'_s = 10 \times 10^{-3} \times \frac{0.177 - 0.064}{1 - 0.177} = \frac{0.103}{0.823} \times 0.01 = 0.00125 \rightarrow 1.25\%_{0}$$

Calcolo il valore della tensione nell'acciaio compresso e la posizione dell'asse neutro rispetto al lembo superiore della sezione :

$$\sigma_s^{'} = \varepsilon_s^{'} \times E = 0.00125 \times 2.05 \times 10^5 = 256 \text{Mpa}$$

$$y_c = K \times d = 8.319 \text{ cm}$$

Il valore del momento ultimo e':

$$\begin{aligned} Mu &= A_s \times f_{yd} \times (d - 0.416y_c) + A_s^{'} \times \sigma_s^{'} \times (0.416y_c - d') = \\ &= 1407 \times 374 \times (470 - 0.416 \times 83.19) + 603 \times 256(0.416 \times 83.19 - 30) \\ &= 526218 \times (470 - 34.607) + 154.368 \times (4.607) \\ &= 229111633 + 711179 \\ &= 229822806 \text{N\_m} \\ &= 229.8 \text{KN\_m} \end{aligned}$$

$229.8\text{KN\_m} > 211.45\text{KN\_m} \rightarrow$ SEZIONE VERIFICATA

4a) Progetto armatura a taglio:

Il taglio massimo si ha in corrispondenza del nodo C → Vd=205KN

Verifica biella cls. compressa:

$$V_u = 0.3 f_{cd} \times b_w \times d = 0.3 \times 15.56 \times 400 \times 470 = 878000N = 878KN > 205KN \qquad \text{VERIFICATO}$$

Taglio assorbito dal solo cls.:

$$V_{cu} = 0.60 f_{ctd} \times b_w \times d = 0.60 \times 1.14 \times 400 \times 470 = 129000N = 129KN$$

$$\text{armatura minima}: \left(\frac{A_{sw}}{s}\right)^{min} = 0.10\left(1+0.15\frac{d}{b}\right)\times b = 0.10\left(1+0.15\times\frac{47}{40}\right)\times 40 = 4.705\,cm^2/m$$

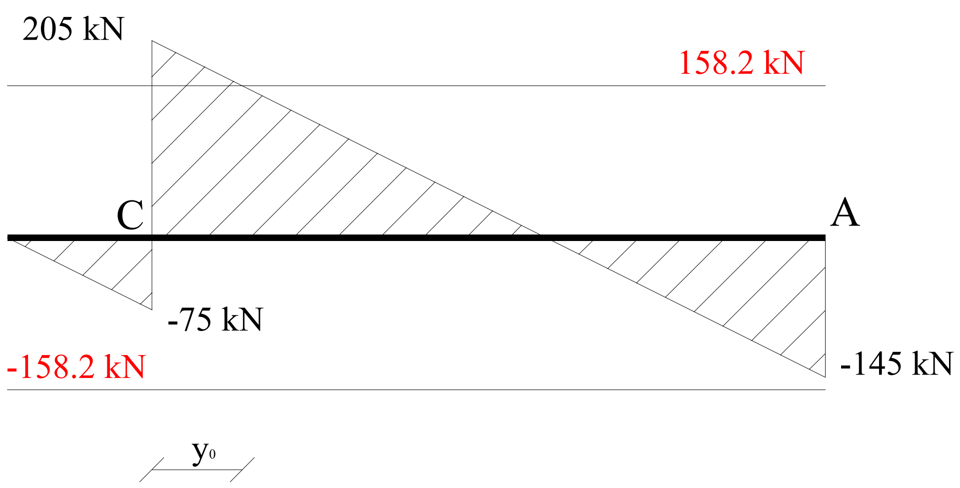
$$\text{si adotta}: \left(\frac{A_{sw}}{s}\right)^{min} = 1\,\text{staffa}\ \phi 8\ \text{a 2 bracci}/20cm = 5\,cm^2/m$$

Taglio assorbito dall'armatura minima:

$$V_{su} = \left(\frac{A_{sw}}{s}\right)^{min} \times f_{yd} \times 0.9 \times d = \frac{500mm^2}{1000mm} \times 374 \times 0.9 \times 470 = 79000N = 79.1KN$$

Taglio ultimo corrispondente all'armatura minima:

$$V_u^{min} = \min(V_{cu} + V_{su},\ 2V_{su}) = \min(129 + 79.1,\ 2 \times 79.1) = 158.2KN$$



$$Y_0 = \frac{205 - 158.2}{50} = 0.936m$$

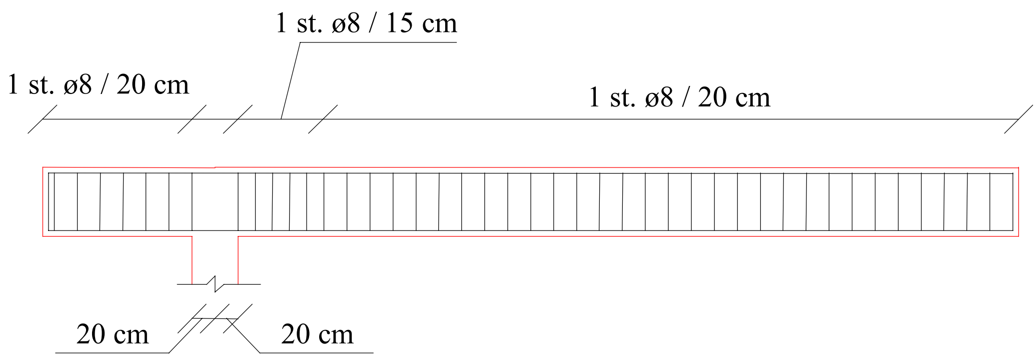
Dal grafico di confronto risulta che e' necessario infittire le staffe a destra del nodo C:

A destra del nodo C:

$$V_d = 205KN \rightarrow V_{su} = \max\left(V_d - V_{cu}, \frac{V_d}{2}\right) = \max\left(205 - 129, \frac{205}{2}\right) = 102.5KN$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{su}}{0.9 \times f_{yd} \times d} = \frac{102500}{0.9 \times 470 \times 374} = 0.648\,mm^2/mm = 6.48\,cm^2/m$$

si adotta 1 staffa $\phi 8$ a 2 bracci/15cm $= 6.67\,cm^2/m$



Ipotizzando di adottare $\phi 16$ per l'armatura longitudinale, in prossimita' degli appoggi:

$$S^{min} = 12\phi_l^{min} = 12 \times 1.6 = 19.2cm$$

4b)Verifica a pressoflessione del pilastro

Calcolo delle armature e delle relative percentuali meccaniche:

$$A_s = 3 \cdot 3.14 = 9.42\ cm^2$$

$$\mu = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot \overline{f_{cd}}} = \frac{942 \cdot 374}{400 \cdot 370 \cdot 13.23} = 0.18$$

$$\mu' = \mu = 0.18$$

Riconoscimento della regione di appartenenza della sezione attraverso il valore adimensionale della forza normale

$$n = \frac{N_d}{b \times d \times \overline{f_{cd}}} = \frac{280 \times 10^3}{400 \times 370 \times 13.23} = 0.14$$

Determinazione del valore adimensionale n in corrispondenza della retta di confine tra le regioni di rottura 2 e 3

$$n^{2-3} = 0.81K + \mu'_s \cdot \frac{\sigma'_{(\varepsilon_s')}}{f_{yd}} - \mu_s \qquad \text{con} \qquad K = \frac{3.5‰}{3.5‰ + 10‰} = 0.259$$

controllo il valore della deformazione dell'acciaio compresso

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{K - \delta}{K} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0.259 - 0.08}{0.259} = 2.419‰ > 1.816‰ \qquad \text{con} \qquad \delta = \frac{d'}{d} = 0.08$$

l'acciaio è snervato quindi $\sigma'_s = f_{yd}$:

$$n^{2-3} = 0.81 \cdot 0.259 = 0.209$$

$n < n^{2\text{-}3}$ $\Rightarrow$ Rottura in Regione 3

Equilibrio alla traslazione, ipotizzando che l'acciaio compresso A'_s sia snervato

$$\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'(\varepsilon'_s) = f_{yd}$$

$$0.8 \times y_c \times b \times \overline{f_{cd}} + A'_s \times f_{yd} - A_s \times f_{yd} = N_d$$

Dall'equazione si ottiene la posizione dell'asse neutro della sezione:

$$y_c = \frac{N_d}{0.8 \times b \times \overline{f_{cd}}} = \frac{280 \times 10^3}{0.8 \times 400 \times 13.23} = 66.13\ mm = 6.613\ cm$$

Verifica della deformazione dell'acciaio compresso, che si ottiene dalla proporzione:

$$\varepsilon'_s : (y_c - d') = \varepsilon_{sl} : (d - y_c)$$

$$\varepsilon'_s = \frac{(y_c - d') \times \varepsilon_{sl}}{(d - y_c)} = \frac{(6.613 - 3) \times 10°/_{oo}}{(37 - 6.613)} = 1.18°/_{oo} < \varepsilon_{yd} = 1.816°/_{oo} \Rightarrow \text{Non verificato}$$

E' necessario correggere l'equazione di equilibrio alla traslazione considerando $\sigma'(\varepsilon'_s) = E_s \times \varepsilon'_s$

$$\overline{f_{cd}} \times b \times 0.8y_c - A_s \times f_{yd} + A'_s \times E_s \times \frac{(y_c - d') \times \varepsilon_{sl}}{d - y_c} = N_d$$

$$\overline{f_{cd}} \times b \times 0.8y_c \times (d - y_c) - A_s \times f_{yd} \times (d - y_c) + A'_s \times E_s \times \varepsilon_{sl} \times (y_c - d') = N_d \times (d - y_c)$$

$$-\overline{f_{cd}} \times b \times 0.8 \times y_c^2 + (\overline{f_{cd}} \times b \times 0.8d + A_s \times f_{yd} + A'_s \times E_s \times \varepsilon_{sl} + N_d)y_c - A_s \times f_{yd} \times d - A'_s \times E_s \times d' \times \varepsilon_{sl} +$$

$$- N_d \times d = 0$$

$$-4233.6y_c^2 + 4139260y_c - 292169560 = 0 \qquad \Rightarrow y_{c1} = 76.58\text{ mm}$$

$$y_{c2} = 901\text{ mm}$$

Poiché si deve avere $0 \le y_c \le 400$, la soluzione $y_{c2}=901$ non è accettabile e pertanto $y_c=y_{c1}=76.58$ mm

La deformazione dell'acciaio compresso è pari a :

$$\varepsilon'_s = \frac{(y_c - d') \times \varepsilon_{sl}}{(d - y_c)} = \frac{(7.658 - 3) \times 10°/_{oo}}{(37 - 7.658)} = 1.58°/_o$$

Il momento ultimo si ottiene dall'equilibrio alla rotazione intorno al centro della sezione:

$$M_u = A'_s \times \left(\frac{h}{2} - d'\right) \times E_s \times \varepsilon'_s + 0.8y_c \times b \times \overline{f_{cd}} \times \left(\frac{h}{2} - 0.4y_c\right) + A_s \times \left(d - \frac{h}{2}\right) \times f_{yd} =$$

$$= 942 \times (200 - 30) \times 206 \times 10^3 \times 1.58 \times 10^{-3} + 0.8 \times 76.58 \times 400 \times 13.23 \times (200 - 0.4 \times 76.58) +$$

$$+ 942 \times 374 \times (370 - 200) = 166.92 \times 10^6 \text{ N-mm} = 166.92 \text{ kN-m}$$

$$M_u > M_d = 155.2 \text{ kN-m} \quad \Rightarrow \quad \text{Verificato}$$