

**LABORATORI DI COSTRUZIONE DELL'ARCHITETTURA 2 (A – B – C)**

**Prima Prova in Corso d'Anno**

Giovedì 11 aprile 2002

Si consideri la trave in figura con una campata di luce  $L=8\text{m}$  ed uno sbalzo di luce  $S=3\text{m}$ , con sezione  $b=35\text{ cm}$ ,  $h=50\text{ cm}$ ,  $d'=3\text{ cm}$ , calcestruzzo di classe  $R_{c_k}=30\text{ N/mm}^2$ , Acciaio FeB 44k, sottoposta ad un carico permanente uniformemente ripartito il cui valore caratteristico, incluso il peso proprio, è pari a  $G_k = 30\text{ kN/m}$ .

**Si richiede di:**

- 1) costruire i diagrammi della sollecitazione per il carico di progetto  $G_d = \gamma_g G_k$
- 2) progettare (e disegnare) le armature longitudinali della trave;
- 3) verificare allo stato limite ultimo la sezione di momento massimo in campata (tenendo conto della doppia armatura);
- 4) progettare e verificare l'armatura a taglio utilizzando staffe a due braccia;
- 5) calcolare, per la sezione già verificata allo stato limite ultimo, i valori della tensione massima nel calcestruzzo  $\sigma_{c\_max}$  e la tensione nelle armature  $\sigma_s, \sigma_s'$  in condizioni di esercizio ( $\gamma_g=1$ ).

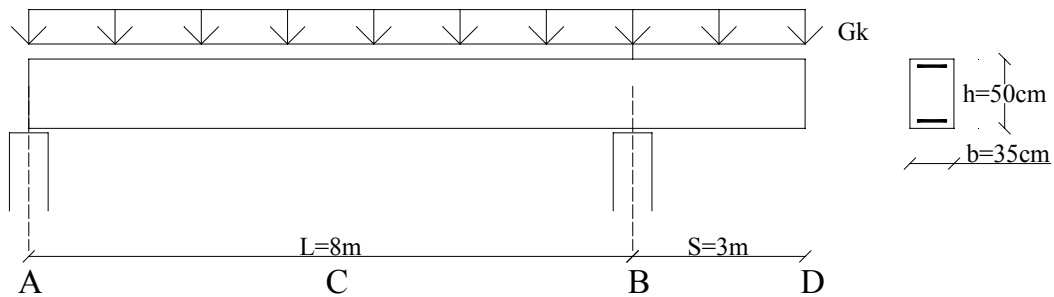
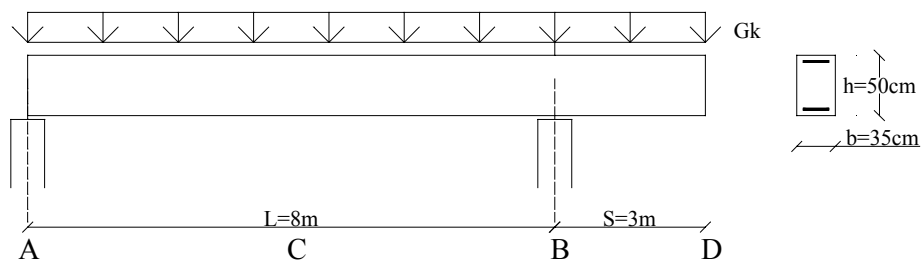


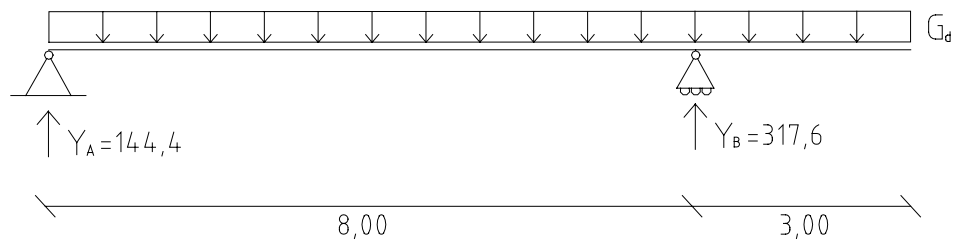
Figura. Schema della struttura



1) costruire i diagrammi della sollecitazione per il carico di progetto

Valore del carico di progetto

$$G_d = 1,4 \times G_k = 42 \text{ kN/m}$$



Reazioni vincolari :

$$\Sigma Y = Y_A + Y_B - G_d \times (l + s) = 0$$

$$\Sigma M_B = -Y_A \times 8 + 42 \times \frac{8^2}{2} - 42 \times \frac{3^2}{2} = 0$$

$$Y_A = \frac{1344 - 189}{8} = 144,4 \text{ kN}$$

$$Y_B = 462 - 144,4 = 317 \text{ kN}$$

Taglio

$$V(x)_{AB} = 144,4 - P_d x$$

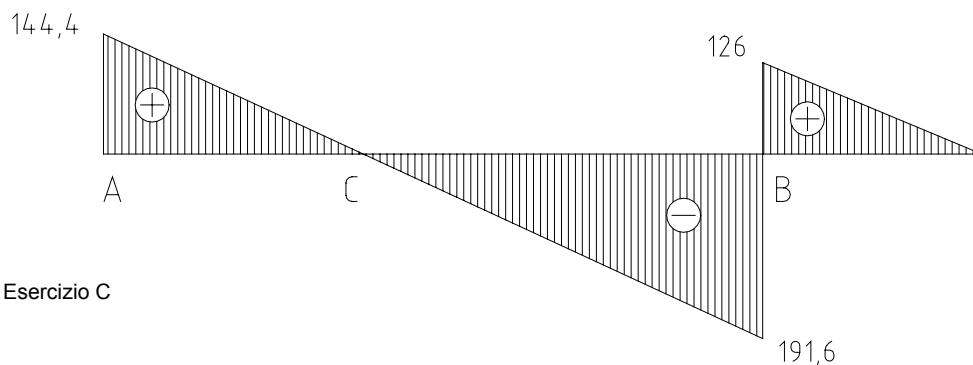
$$V_A = 144,4 \text{ kN}$$

$$V_{Bs} = 144,4 - 42 \times 8 = -191,6 \text{ kN}$$

$$V_{Bd} = -191,6 + 317,6 = 126 \text{ kN}$$

$$V(x)_{AB} = 144,4 - 42x \rightarrow x_C = \frac{144,4}{42} = 3,44 \text{ m}$$

TAGLIO



Esercizio C

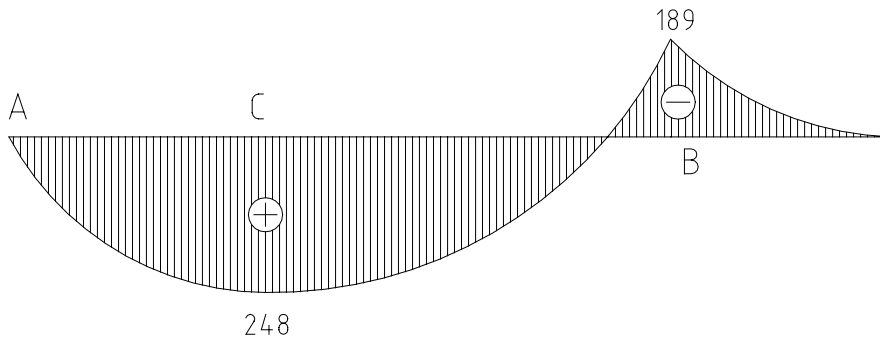
Momento

$$M_B = P_d \times \frac{s^2}{2} = \frac{42}{2} \times 3^2 = 21 \times 9 = 189 \text{ kN-m}$$

$$M_C = V_A x_c - \frac{P_d}{2} x_c^2 = 144,4 \times 3,44 - \frac{42}{2} \times 3,44^2 = 248 \text{ kN-m}$$

$$M_B = 144,4 \times 8 - 21,8^2 \cong 189 \text{ kN-m}$$

MOMENTO



2) Progettare le armature longitudinali della trave

Valori di calcolo delle resistenze

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{430}{1,15} = 374 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{cd} = R_{ck} \times \frac{0,83}{\gamma_c} = 15,56 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\bar{f}_{cd} = 0,85 \times f_{cd} = 13,23 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{ctd} = 0,7 \times 0,27 \times \frac{R_{ck}}{1,6} = 1,14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Area minima di armatura inferiore o superiore necessaria per coprire la sollecitazione di Momento flettente

$$A_{s \min} = \frac{M_d}{0,9 \times d \times f_{yd}}$$

Area minima di armatura inferiore calcolata (come da Norma) per portare in corrispondenza degli appoggiuno sforzo di trazione pari al taglio

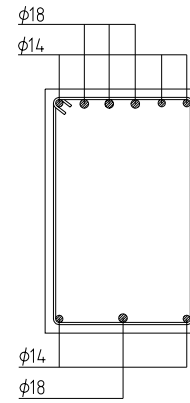
$$A_{s \min} = \frac{V_d}{f_{yd}}$$

	Md (kN-m)	Vd (kN-m)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> )	ϕ	As (cm <sup>2</sup> )
Ainf		144,4	3,86	2ϕ14+1ϕ18	5,58
Cinf	248		15,68	2ϕ14+5ϕ18	15,78
Bsup	-189		11,95	3ϕ14+3ϕ18	12,24
Binfd		-191,6	5,12	2ϕ14+1ϕ18	5,58
Binfs		126	3,37	2ϕ14+1ϕ18	5,58

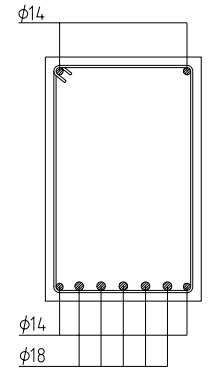
Per le aree si considera :

$$\begin{aligned} \phi 14 : A_s &= 1,54 \text{ cm}^2 & \phi 16 : A_s &= 2 \text{ cm}^2 \\ \phi 18 : A_s &= 2,54 \text{ cm}^2 & \phi 20 : A_s &= 3,14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

SEZ B



SEZ C



Momenti resistenti

$$M_R = A_{\text{eff}} \times 0,9 \times d \times f_{yd}$$

$$M_R(2\phi 14 + 1\phi 18) = 5,58 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 7846 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 78,46 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R(2\phi 14 + 3\phi 18) = 10,66 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 16864 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 168,64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

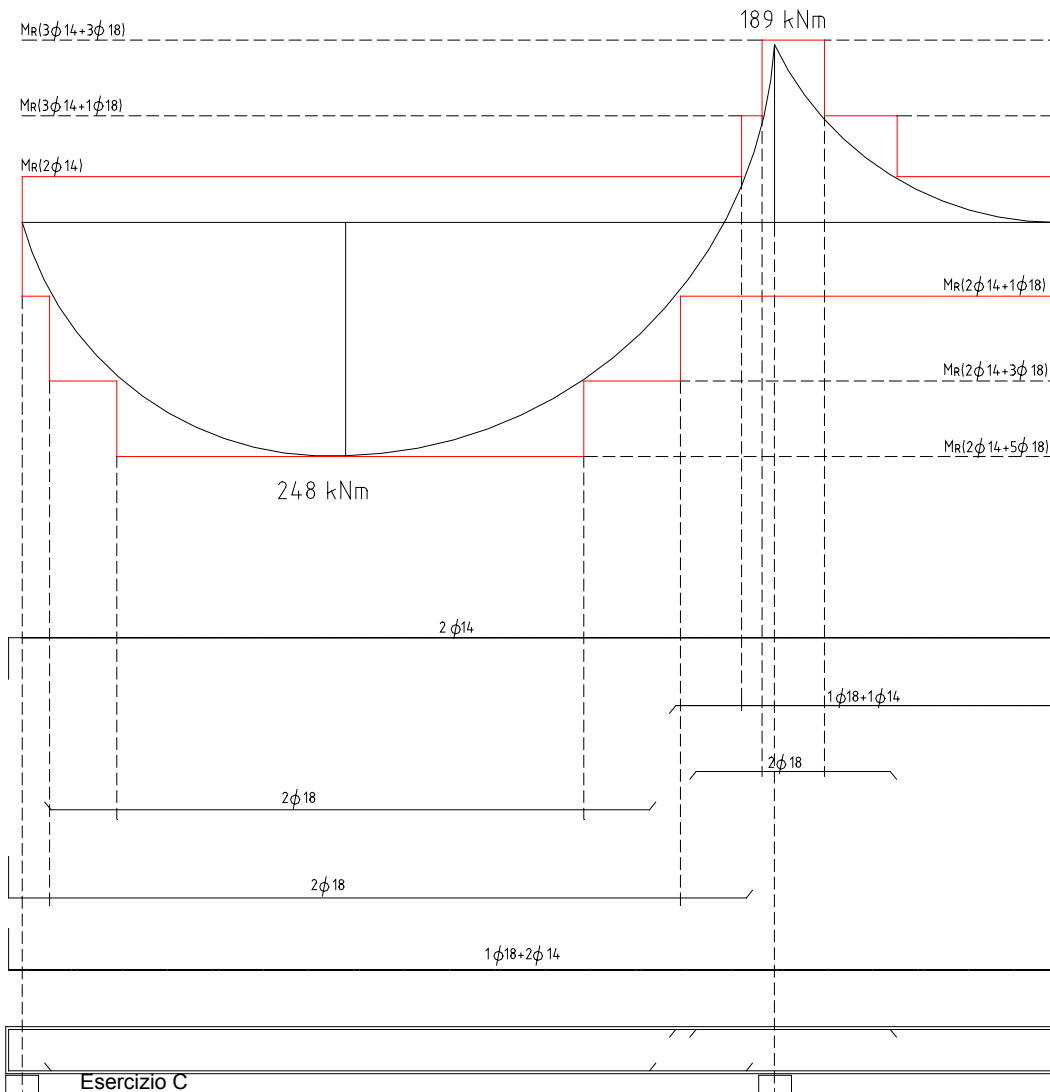
$$M_R(2\phi 14 + 5\phi 18) = 15,74 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 24901 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 249,01 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R(2\phi 14) = 3,08 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 4872,62 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 48,726 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R(3\phi 14) = 4,62 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 7309 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 73,09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R(3\phi 14 + 1\phi 18) = 7,16 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 11327 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 113,27 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R(3\phi 14 + 3\phi 18) = 12,24 \text{ cm}^2 \times 0,9 \times 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 47 \text{ cm} = 19364 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 193,64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



### 3) Verifica della sezione C

Percentuali meccaniche di armatura :

$$A_s = 15,7 \text{ cm}^2 \quad \mu_s = \frac{A_s \times f_{yd}}{b \times d \times \bar{f}_{cd}} = \frac{15,78 \times 37,4}{35 \times 47 \times 1,323} = 0,271$$

$$A_s = 3,08 \text{ cm}^2 \quad \mu'_s = 0,0529$$

$$\mu_s - \mu'_s = 0,2184 \Rightarrow \text{Regione 2}$$

Determinare la posizione dell'asse neutro ipotizzando  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$

$$0,81K = \mu_s - \mu'_s$$

$$K = \frac{\mu_s - \mu'_s}{0,81} = \frac{0,2184}{0,81} = 0,269$$

$$y_c = Kd = 0,69 \times 47 = 12,67 \text{ cm} \quad \delta = \frac{d'}{d} = \frac{3}{47} = 0,06$$

$$\varepsilon'_s = \frac{K - \delta}{K} \varepsilon_{cu} = \frac{0,269 - 0,06}{0,269} \times 3,5 \text{ ‰} = 2,72 \times 10^{-3} \Rightarrow \text{ipotesi verificata}$$

Verifica dell'equilibrio alla traslazione

$$F_c = 0,81 \bar{f}_{cd} \times K \times d \times b = 0,81 \times 1,323 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 0,269 \times 47 \text{ cm} \times 35 \text{ cm} = 474,2 \text{ kN}$$

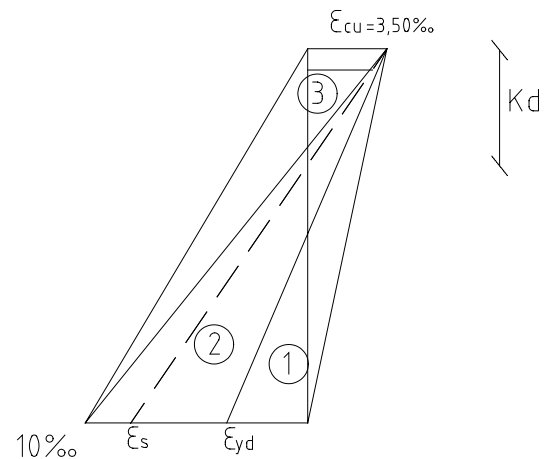
$$F'_s = f_{yd} \times A'_s = 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 3,08 \text{ cm}^2 = 115,19 \text{ kN}$$

$$F_s = f_{yd} \times A_s = 37,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \times 15,78 \text{ cm}^2 = 590,17 \text{ kN}$$

$$F_c + F'_s = F_s \Rightarrow (474,2 + 115,19) \text{ kN} = 589,4 \text{ kN} \cong F_s$$

Calcolo di  $M_u$

$$\begin{aligned} M_u &= F_s \times (d - 0,416y_c) + F'_s (0,416y_c - d') \\ &= 590,17 \text{ kN} (47 \text{ cm} - 5,27 \text{ cm}) + 115,19 \text{ kN} (5,27 \text{ cm} - 3 \text{ cm}) = \\ &= 24889 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 248,89 \text{ kN} \cdot \text{m} > M_d \end{aligned}$$



#### 4) Armature a taglio

Verifica bielle compresse:

$$V_u = 0,3 \times b \times d \times f_{cd} = 0,3 \times 35 \times 47 \times 1,556 = 767,88 \text{ kN}$$

$$V_{d \max} \leq V_u = 767,88 \text{ kN}$$

Taglio portato dal calcestruzzo

$$V_{cu} = 0,6 \times b \times d \times f_{ctd} = 0,6 \times 35 \times 47 \times 0,114 = 112 \text{ kN}$$

Armatura minima prevista dalla normativa

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{\min} = 0,1 \left( 1 + 0,15 \frac{d}{b} \right) b = 0,1 \left( 1 + 0,15 \frac{47}{35} \right) \times 35 = 4,2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s = 23 \text{ cm} \quad \mapsto \quad \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{\min} = \frac{1}{0,23} \text{ cm}^2/\text{m} = 4,34 \text{ cm}^2/\text{m}$$

limiti di normativa sul passo

$$s = 23 \text{ cm} \leq \begin{cases} 33 \text{ cm} \\ 0,8 d = 37,6 \text{ cm} \end{cases}$$

in corrispondenza degli appoggi invece si deve avere

$$s \leq 12 \phi_l = 12 \times 1,4 = 16,8 \text{ cm} \cong 16 \text{ cm} \quad \text{per una lunghezza pari a } d = 47 \text{ cm}$$

$$V_{su \min} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{\min} \times f_{yd} \times 0,9 \times d = 4,34 \times 37,4 \times 0,9 \times 0,47 = 68,66 \text{ kN}$$

$$V_{R \min} = \min(V_{cu} + V_{su \min}; 2 V_{su \min}) = \min(180,66; 137,3) = 137,3 \text{ kN}$$

Appoggio A:

$$V_d(A) = 144,4$$

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{\max(V_d - V_{cu}; V_d/2)}{f_{yd} \times 0,9d} = \frac{\max(144,4 - 112; 72,2)}{37,4 \times 0,9 \times 0,47} = 4,56 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s \leq 21 \text{ cm}$$

si assume il passo  $s = 16 \text{ cm}$  per rispettare le prescrizioni minime sugli appoggi per una lunghezza:

$$l_{A \max} = \begin{cases} l_A = \frac{V_{dA} - V_{R \min}}{V_{dA}} x_c = \frac{144,4 - 137,3}{144,4} 3,44 = 17 \text{ cm} \\ d = 47 \text{ cm} \end{cases} = 47 \text{ cm}$$

appoggio B lato sinistro  $V_d(B_s) = 191,6$

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{\max(V_d - V_{cu}; V_d/2)}{f_{yd} \times 0,9d} = 6,06 \text{ cm}^2/\text{m}$$

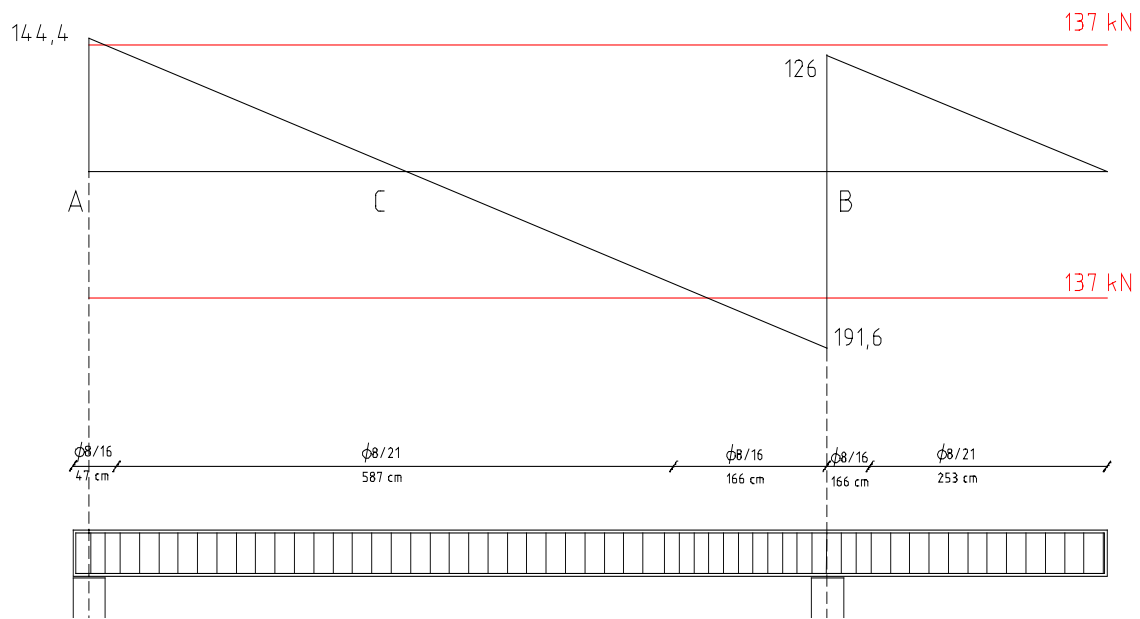
$$s \leq 16,5 \text{ cm}$$

$$l_{B_{sx} \max} = \begin{cases} l_{B_{sm}} = \frac{V_{d(B)} - V_{R \min}}{P_d} = \frac{191,6 - 137,3}{42} = 1,66 \text{ m} \\ d = 47 \text{ cm} \end{cases} = 1,66 \text{ m}$$

si assume passo  $s = 16 \text{ cm}$  per una lunghezza  $l_s = 1,66 \text{ m}$

appoggio B lato destro  $V_d(B_d) = 126 \text{ kN}$

si assume passo  $s = 16 \text{ cm}$  per una lunghezza  $l_{B_{dx}} = d = 47 \text{ cm}$



5) Calcolo elastico:  $A_s = 15,78$        $A'_s = 3,08$

$$S_n^{\text{hom}} = \frac{1}{2} b \times y_c^2 + n A'_s (y_c - d') - n A_s (d - y_c)$$

$$= \frac{1}{2} b \times y_c^2 + n (A_s - A'_s) y_c - n (A'_s d' + A_s d) = 0$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{35}{15} y_c^2 + 18,86 y_c - 750,9 = 0$$

$$y_c^2 + 16,1657 y_c - 643,629 = 0$$

$$y_c = -8,08 + 26,63 = 18,55 \text{ cm}$$

$$I_n^{\text{hom}} = \frac{1}{3} b y_c^3 + n A'_s (y_c - d')^2 + n A_s (d - y_c)^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \times 35 \times 18,55^3 + 15 \times 3,08 (18,55 - 3)^2 + 15 \times 15,78 \times (47 - 18,55)^2 =$$

$$= 277226 \text{ cm}^4$$

$$M_{d(\text{sle})} = \frac{M_{d(\text{slu})}}{1,4} = \frac{248}{1,4} \text{ kN} \cdot \text{m} = 177 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{c \text{ max}} = \frac{M_d}{I_n^{\text{hom}}} y_c = \frac{17700}{277226} \times 18,55 = 11,84 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_s = n \frac{M_d}{I_n^{\text{hom}}} (d - y_c) = 15 \times 0,06385 \times (47 - 18,55) = 272,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma'_s = n \frac{M_d}{I_n^{\text{hom}}} (y_c - d') = 15 \times 0,06385 \times 15,55 = 148,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$