

Capitolo 7

Stati limite di esercizio

7.1 Introduzione

Il metodo delle tensioni ammissibili, il cui impiego è ancora molto diffuso in Italia, è in certa misura un ibrido tra un metodo di verifica delle condizioni di collasso e quelle di esercizio. In effetti esso richiede di limitare le sollecitazioni prodotte dai carichi di esercizio entro valori sensibilmente inferiori a quelli del limite elastico dei materiali: in tal senso si tratta evidentemente della verifica di uno stato limite di esercizio. Tuttavia, come è stato chiarito più volte, molte delle verifiche richieste dalla normativa hanno senso solo se riferite a condizioni di collasso, da cui derivano. Quindi, sebbene questo procedimento di verifica presenti delle incongruenze logiche che hanno indotto ad estrometterlo od a relegarlo in posizione marginale e svantaggiata dalla maggior parte delle normative, l'esperienza della sua applicazione ha mostrato che, almeno nella maggior parte dei casi, è in grado di garantire una adeguata sicurezza delle opere, sia nei confronti del collasso, sia nei confronti dei danni che possono verificarsi in condizioni di esercizio.

Il metodo della verifica dello stato limite ultimo è certamente più razionale, ma da solo non è sufficiente a garantire che, in condizioni di esercizio, le strutture non manifestino danni ed inconvenienti che, pur non compromettendone direttamente la sicurezza ultima, possono negativamente influire sulla funzionalità delle opere.

Per questo il metodo è detto di verifica agli *stati limite*, intendendo che normalmente le strutture devono essere verificate nei confronti di più di uno stato limite: quello di collasso è ovviamente il più importante, ma anche quelli relativi alle condizioni di esercizio devono essere presi in conto.

Per le strutture in cemento armato lo stato limite di esercizio più significativo riguarda la fessurazione, in quanto il manifestarsi di fessure troppo ampie in condizioni di normale uso dell'opera non solo ne compromette l'estetica, ma può anche, a lungo termine, avere conseguenze negative sulla resistenza.

Un'altra condizione di stato limite che deve essere presa in conto riguarda la deformabilità. Deformazioni eccessivamente grandi delle strutture comportano danni estetici e funzionali e possono indurre danni importanti agli elementi sovrastrutturali (tamponature, infissi, tramezzi, ecc.). Le strutture in cemento armato, generalmente tozze, sono meno sensibili di altre (p. es. quelle in acciaio) a questo tipo di problema. Nelle opere ordinarie, con travi di luce contenuta, le condizioni di resistenza e di limitazione delle fessure sono generalmente prevalenti, ma in casi meno ovvi (p. es. travi di grande luce) lo stato limite di deformazione può divenire condizionante.

Le verifiche nei riguardi degli stati limite di esercizio si eseguono, come è ovvio, con

riferimento alle azioni di esercizio e si può presumere che il funzionamento della struttura resti in campo elastico; pertanto lo stato tensionale degli elementi presso-inflessi si ottiene mediante l'analisi elastica delle sezioni (con l'ipotesi di non resistenza a trazione del calcestruzzo), che è stata presentata nei capitoli precedenti con riferimento al metodo delle tensioni ammissibili.

7.2 La fessurazione

L'apertura di fessure nelle parti tese delle strutture in cemento armato è inevitabile, data la modesta resistenza a trazione del calcestruzzo. Tuttavia, come è già stato accennato nella sezione precedente, occorre limitare l'ampiezza delle fessure che si possono produrre in condizioni di esercizio, sia per ragioni estetiche sia per la sicurezza dell'opera. Infatti il ricoprimento di calcestruzzo offre un'efficace protezione delle armature nei confronti della corrosione, che può venir meno se l'apertura di qualche lesione abbastanza grande consente agli agenti corrosivi di raggiungere le armature. La corrosione, riducendo la sezione resistente delle barre, può quindi provocare una drastica diminuzione della sicurezza della struttura; il fenomeno dipende da molteplici fattori, tra cui le condizioni ambientali a cui è esposta l'opera, la sensibilità dell'armatura alla corrosione (che aumenta al diminuire del diametro delle barre), l'ampiezza e la profondità delle fessure, la natura delle azioni (se permanenti o di breve durata).

La verifica si esegue confrontando l'ampiezza massima prevista delle fessure con dei valori limite che vengono fissati in funzione dei parametri di cui si è detto (condizioni ambientali, sensibilità, tipo di carico).

Tra le cause che possono provocare la fessurazione in una struttura in cemento armato si devono annoverare, oltre all'azione dei carichi esterni, anche gli stati di coazione che possono insorgere per effetto di cambiamenti di volume dovuti al ritiro ed alle variazioni termiche. Per ridurre l'entità delle fessure dovute a questi fenomeni si può agire sulle cause, per esempio realizzando calcestruzzi con piccoli valori di ritiro, ovvero controllando l'ampiezza delle fessure mediante la disposizione di armature diffuse nella struttura, le quali, pur non eliminando la fessurazione, ne evitano la concentrazione in poche ampie fessure, favorendo invece lo sviluppo di numerose piccole lesioni.

7.2.1 Il meccanismo di formazione delle fessure

Nell'analisi delle sezioni sollecitate da tensioni normali (pressione e flessione) la resistenza a trazione del calcestruzzo è stata interamente trascurata, come è lecito dato il suo modesto valore; ma, come è stato già molte volte ricordato, questa resistenza in realtà svolge un ruolo essenziale nel funzionamento delle strutture in cemento armato, essendo il solo mezzo che consente lo scambio di forze tra le armature tese ed il calcestruzzo compresso. Il fenomeno della fessurazione, cioè il fatto che nella parte tesa degli elementi si apra un certo numero discreto di lesioni tra le quali sussistono dei blocchi integri di calcestruzzo, dipende evidentemente dalla resistenza a trazione di questo materiale.

L'analisi quantitativa del fenomeno peraltro è complessa perché dipende da numerosi fattori; di conseguenza le formule che normalmente si usano per prevedere l'ampiezza delle fessure sono di origine semi-empirica. Tuttavia, schematizzando notevolmente il problema, è possibile sviluppare una teoria semplice che, almeno dal punto di vista qualitativo, permette di evidenziare le caratteristiche del fenomeno e di spiegare il ruolo svolto dai principali fattori.

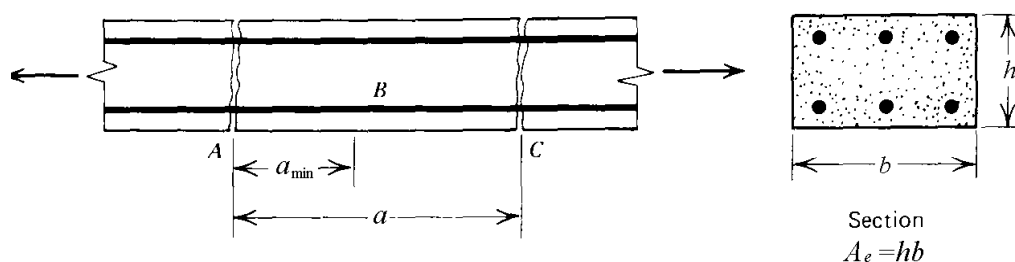


Figura 7.1: Rappresentazione schematica della formazione delle fessure in un prisma in cemento armato sollecitato a trazione

Distanza tra le fessure

Si consideri quindi un prisma di calcestruzzo, armato simmetricamente e sollecitato a trazione pura. Tutte le sezioni risultano ugualmente sollecitate a trazione uniforme; al crescere della forza, in qualcuna delle sezioni più deboli verrà superata la resistenza del calcestruzzo, con conseguente formazione di una fessura (si veda fig. 7.1).

Esaminando il prisma di calcestruzzo compreso tra due fessure successive si osserva che la tensione di trazione, nulla in corrispondenza delle fessure, cresce verso l'interno del concio via via che l'aderenza consente di trasferire parte della sollecitazione dall'armatura al calcestruzzo circostante. La condizione per cui, al crescere della forza, all'interno del concio si possa formare un'altra fessura, è che, in qualche punto, la tensione superi la resistenza del materiale. Indicando con $\tau_b(x)$ la tensione di aderenza lungo l'asse delle barre, questa condizione è verificata se, per qualche a risulta:

$$p \int_0^a \tau_b(x) dx \geq A_c f_{ct} \quad (7.1)$$

dove p indica il perimetro delle barre, A_c è l'area della sezione del prisma ed f_{ct} la resistenza a trazione del materiale. a è la distanza a cui si sviluppa la nuova fessura, misurata a partire dalla fessura preesistente. Per ovvie ragioni di simmetria deve essere verificata la condizione $a \leq a_0/2$, dove a_0 indica la distanza tra le due fessure preesistenti, cioè la lunghezza del concio.

Ponendo tra i due membri dell'eq. (7.1) il segno di uguaglianza, da essa si ricava il valore minimo a_{min} della distanza a cui si possono sviluppare due fessure. Se $a_0 \geq 2a_{min}$ si svilupperà un'ulteriore fessura tra quelle esistenti, in caso contrario ($a_0 < 2a_{min}$) questo non potrà avvenire; quindi $2a_{min}$ è anche la distanza massima che può intercorrere tra due fessure:

$$a_{max} = 2a_{min} \quad (7.2)$$

Assumendo per $\tau_b(x)$ un andamento uniforme, dalle equazioni (7.1) e (7.2) si deduce la relazione:

$$a_{max} = 2 \frac{A_c f_{ct}}{p \tau_b} \quad (7.3)$$

Supponendo che l'armatura sia costituita da n barre di uguale diametro ϕ , poiché in tal caso, indicando con $A_s = n\pi\phi^2/4$ l'area dell'armatura, si ha:

$$p = n\pi\phi = n\pi\frac{\phi^2}{4}\frac{4}{\phi} = 4\frac{A_s}{\phi}$$

dall'eq. (7.3) si ottiene:

$$a_{max} = \frac{f_{ct}\phi}{2\tau_b\rho} \quad (7.4)$$

in cui $\rho = A_s/A_c$ indica la percentuale geometrica delle armature.

Ampiezza delle fessure

L'ampiezza della fessura si ottiene come differenza tra l'allungamento dell'acciaio e quello del calcestruzzo; trascurando quest'ultimo termine, generalmente piccolo, l'ampiezza massima di una fessura è data dalla semplice relazione:

$$w_{max} = 2 \int_0^{a_{max}/2} \epsilon_s(x) dx \quad (7.5)$$

dove $\epsilon_s(x) = \sigma_s(x)/E_s$ è la deformazione dell'acciaio, che si suppone funzionare in campo elastico. La tensione nell'acciaio varia in funzione di x , a causa del trasferimento di forze al calcestruzzo. Per un andamento uniforme della tensione di aderenza si ha:

$$\sigma_s(x) = \sigma_s - \frac{p\tau_b x}{A_s}$$

in cui σ_s è la tensione nell'acciaio calcolato con riferimento alla sezione fessurata. Sostituendo l'equazione precedente nell'eq. (7.5) si ricava:

$$w_{max} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \frac{p\tau_b}{4A_s\sigma_s} a_{max} \right) a_{max}$$

da cui, tenendo conto dell'eq. (7.3):

$$w_{max} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \frac{f_{ct}}{2\sigma_s\rho} \right) \frac{2A_c f_{ct}}{p\tau_b} \quad (7.6)$$

Nel caso che l'armatura sia costituita da barre di uguale diametro, tenendo conto dell'eq. (7.4), l'eq. (7.6) si scrive¹:

$$w_{max} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \frac{f_{ct}}{2\sigma_s\rho} \right) \frac{f_{ct}\phi}{2\tau_b\rho} \quad (7.7)$$

Questi risultati sono stati ottenuti a partire da ipotesi semplicistiche del fenomeno; inoltre il caso esaminato, un tirante sollecitato da una forza assiale, non è quello di più

¹Volendo tener conto anche della deformazione del calcestruzzo, l'eq. (7.7) deve essere modificata nella:

$$w_{max} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \frac{f_{ct}}{2\sigma_s} \left(\frac{1}{\rho} + n \right) \right] \frac{f_{ct}\phi}{2\tau_b\rho}$$

dove $n = E_s/E_c$. Per percentuali di armatura non troppo grandi si ha $1/\rho \gg n$, e pertanto questa equazione differisce poco dall'eq. (7.7).

rilevante interesse pratico. Pur con questi limiti la trattazione svolta ha il merito di chiarire la natura dei fenomeni e di mettere in evidenza quali sono i parametri principali che controllano il fenomeno della fessurazione.

Dall'eq. (7.7) è evidente che l'ampiezza delle fessure aumenta con il diametro ϕ delle barre impiegate e diminuisce al crescere della tensione di aderenza τ_b ; pertanto per ridurre l'ampiezza delle fessure si può agire sia sul diametro delle barre, utilizzando barre di minor diametro, sia aumentando τ_b , utilizzando barre ad aderenza migliorata. L'aumento della percentuale di armatura ρ produce una riduzione della distanza delle fessure ma anche un aumento della deformazione media dell'acciaio (ovviamente supponendo che σ_s resti costante); di questi due effetti contrastanti generalmente risulta prevalente il primo. Come si vede dall'eq. (7.7) la resistenza a trazione f_{ct} gioca un ruolo esattamente inverso a ρ , così sembrerebbe che l'ampiezza delle fessure dovrebbe aumentare al crescere della resistenza del calcestruzzo; tuttavia, tenendo conto che migliorando la qualità del calcestruzzo anche τ_b aumenta, questi due effetti approssimativamente si compensano: ne segue che la resistenza del calcestruzzo ha scarsa influenza sullo sviluppo della fessurazione.

Le eq. (7.6) e (7.7) si possono scrivere nella forma

$$w_{max} = \epsilon_{sm} a_{max} \quad (7.8)$$

in cui viene messo in evidenza che l'ampiezza massima delle fessure si può esprimere come il prodotto della distanza massima tra due lesioni successive e la deformazione media dell'acciaio. Confrontando l'eq. (7.8) con le eq. (7.6) e (7.7) si ottiene che, per il modello studiato, risulta:

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \frac{f_{ct}}{2\sigma_s\rho} \right) \quad (7.9)$$

In questa equazione l'allungamento medio dell'acciaio è espresso come il prodotto tra la deformazione delle barre nella sezione fessurata ed un fattore (< 1) che tiene conto del contributo del calcestruzzo.

7.2.2 Verifica secondo le norme

Norme italiane

Relativamente alla fessurazione, la normativa italiana prevede diverse condizioni di stato limite; in ordine di severità decrescente sono:

1. *Stato limite di decompressione*, per cui la sezione deve risultare interamente compressa.
2. *Stato limite di formazione delle fessure*: la tensione massima di trazione nella sezione non fessurata non deve superare il frattile inferiore della resistenza a trazione del calcestruzzo.
3. *Stato limite di apertura delle fessure*: il valore caratteristico dell'ampiezza massima delle fessure non deve superare uno dei seguenti valori nominali:

$$w_1 = 0.1 \text{ mm} \quad w_2 = 0.2 \text{ mm} \quad w_3 = 0.4 \text{ mm}$$

La scelta del particolare stato limite da adottare dipende da vari fattori:

cond.amb.	azioni	armatura			
		sensibile		poco sens.	
		stato lim.	w_k	stato lim.	w_k
poco aggr.	frequenti	aper. fess.	$\leq w_2$	aper. fess.	$\leq w_3$
	quasi per.	dec./aper. fess.	$\leq w_1$	aper. fess.	$\leq w_2$
mod. aggr.	frequenti	aper. fess.	$\leq w_1$	aper. fess.	$\leq w_2$
	quasi per.	decomp.	—	aper. fess.	$\leq w_2$
molto aggr.	rare	aper./form. fess.	$\leq w_1$	aper. fess.	$\leq w_2$
	frequenti	decomp.	—	aper. fess.	$\leq w_1$

Tabella 7.1: Stati limite di fessurazione.

1. *Il tipo di azioni*: si distinguono in *quasi permanenti*, *frequenti* e *rare*.
2. *Le condizioni ambientali*: l'ambiente è classificato in *poco aggressivo*, *moderatamente aggressivo*, *molto aggressivo*.
3. *La sensibilità delle armature*, distinte in *sensibili* e *poco sensibili*. Appartengono al primo gruppo le barre di diametro ≤ 4 mm, gli acciai temperati, gli acciai incruditi a freddo e soggetti a tensioni permanenti superiori a 390 N/mm^2 .

Il tipo di stato limite che deve essere considerato è indicato nella tabella (7.1).

Peraltro si deve notare che delle tre condizioni di stato limite previste solo l'ultima (apertura delle fessure) può essere soddisfatta dalle strutture in cemento armato. Le altre riguardano di fatto solo gli elementi in cemento armato precompresso, che verranno studiati separatamente.

Il valore caratteristico dell'ampiezza delle fessure si calcola mediante la relazione:

$$w_k = 1.7w_{max} = 1.7\epsilon_{sm}a_{max}$$

in cui il fattore 1.7 è adottato per tener conto della forte dispersione dei risultati sperimentali. L'allungamento medio dell'armatura, ϵ_{sm} , e la distanza massima tra le fessure a_{max} si possono calcolare mediante espressioni semi-empiriche ottenute modificando opportunamente quelle teoriche [eq. (7.4) e (7.7)] per tener conto dei risultati sperimentali e di condizioni di sollecitazione più generali di quella, elementare, studiata teoricamente. La normativa italiana adotta le relazioni:

$$a_{max} = 2 \left(c + \frac{s}{10} \right) + k_2 k_3 \frac{\phi}{\rho} \quad (7.10)$$

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (7.11)$$

in cui i simboli hanno il seguente significato:

c Ricoprimento dell'armatura.

s Distanza tra le barre, con la condizione $s \leq 14\phi$.

ϕ Diametro delle barre.

k_2 Coefficiente che dipende dall'aderenza tra acciaio e calcestruzzo: $k_2 = 0.4$ per barre ad aderenza migliorata, $k_2 = 0.8$ per barre lisce.

k_3 Coefficiente che tiene conto della forma del diagramma nella sezione non fessurata. Si assume $k_3 = 0.25(\sigma_1 + \sigma_2)/2\sigma_1$, dove $\sigma_1 \geq \sigma_2$ sono i valori estremi delle tensioni di trazione; k_3 varia tra 0.125 per diagrammi triangolari o intrecciati ($\sigma_2 = 0$) e 0.25 per il caso della trazione uniforme ($\sigma_2 = \sigma_1$).

$\rho = A_s/A_{\text{ceff}}$ è la percentuale di armatura longitudinale riferita all'area di calcestruzzo efficace A_{ceff} . Per la definizione dell'area efficace in varie situazioni si può fare riferimento alla figura 7.2.

σ_s Tensione, in esercizio, nell'acciaio teso, riferito alla sezione fessurata.

σ_{sr} Tensione nell'armatura longitudinale, calcolata con riferimento alla sezione fessurata, dovuta ai carichi che producono la fessurazione (ossia il raggiungimento della resistenza a trazione nella fibra maggiormente tesa della sezione).

β_1 Tiene conto dell'aderenza acciaio-calcestruzzo: $\beta_1 = 1$ per le barre ad aderenza migliorata, $\beta_1 = 0.5$ per le barre lisce.

β_2 Coefficiente che tiene conto del tipo di azione: si assume $\beta_2 = 1$ nel caso di prima applicazione di carichi di breve durata, $\beta_2 = 0.5$ per i carichi di lunga durata e di azioni ripetute.

Confrontando le formule semi-empiriche (7.10) e (7.11) con quelle dedotte dalla teoria semplificata si possono trarre alcune considerazioni. Il secondo termine dell'eq. (7.10) è analogo all'eq. (7.4), quando si sostituisca il termine $f_{ct}/2\tau_b$ con il prodotto dei coefficienti k_2k_3 . Nell'eq. (7.10) nessun termine dipende dalla resistenza a trazione del calcestruzzo: questo è coerente con quanto osservato precedentemente circa il fatto che entrambe le grandezze f_{ct} e τ_b sono funzioni crescenti della resistenza del materiale; pertanto k_2 tiene conto solo dell'aumento dell'aderenza dovuto all'impiego di barre ad aderenza migliorata. Il coefficiente k_3 considera gli effetti delle condizioni di sollecitazione più generali di quella esaminata nella trattazione teorica. Il primo termine dell'eq. (7.10), che non ha analogo nell'eq. (7.4), tiene conto di fenomeni non considerati nelle ipotesi del modello teorico.

Anche l'eq. (7.11) ha notevoli similitudini con l'eq. (7.9). Infatti nel caso di trazione semplice risulta:

$$\sigma_{sr} = f_{ct}A_c/A_s = f_{ct}/\rho$$

(avendo ipotizzato di poter porre $A_{\text{ceff}} = A_c$). Quindi, sostituendo nell'eq. (7.11), si ottiene:

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1\beta_2 \left(\frac{f_{ct}}{\sigma_s\rho} \right)^2 \right]$$

che fondamentalmente differisce dall'eq. (7.9) perché il termine in parentesi tonde è qui elevato al quadrato. Poiché questo è sempre inferiore ad 1, ciò implica che ad esso è attribuito un peso inferiore che nell'eq. (7.9), specialmente quando è piccolo, ossia quando la sollecitazione agente è molto maggiore di quella di prima fessurazione ($\sigma_s \gg \sigma_{sr}$).

Norme europee

Nell'Eurocodice 2 viene preso in esame anche il problema del controllo della fessurazione che può prodursi, anche in assenza di forze esterne, a causa delle autotensioni generate dalle deformazioni, impedito dai vincoli, dovute al ritiro ed alle variazioni termiche. La regola

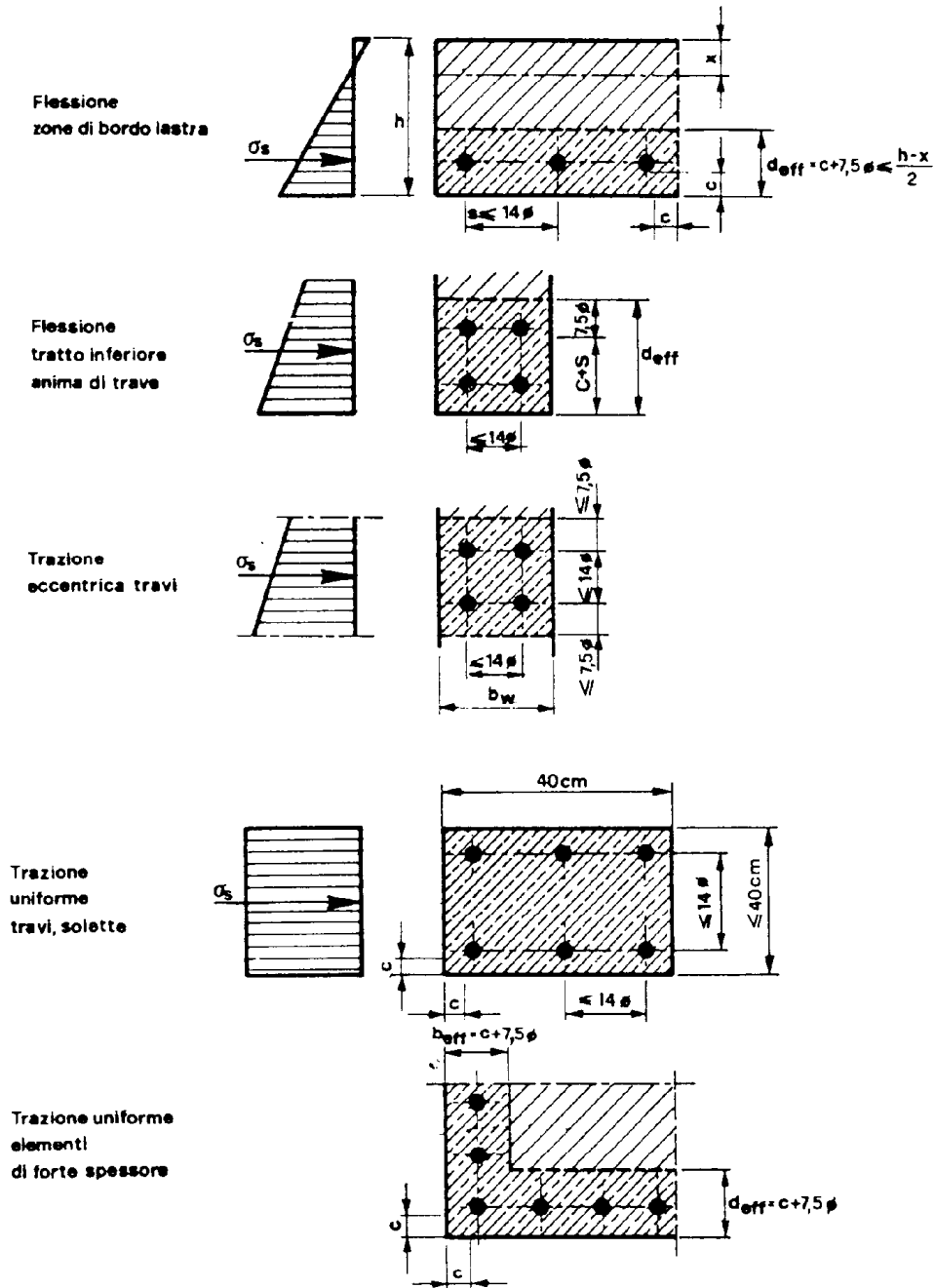


Figura 7.2: Definizione dell'area di calcestruzzo efficace

suggerita consiste nel disporre un'armatura diffusa, sufficiente ad assorbire le risultanti delle tensioni di fessurazione. Questo accorgimento consente di controllare la propagazione delle fessure in quanto, in caso di apertura di una lesione, la perdita di capacità portante dovuta al cedimento del calcestruzzo teso è compensata dall'acciaio.

Per la determinazione dell'ampiezza massima delle fessure si impiegano relazioni simili a quelle riportate nelle norme italiane. Il valore caratteristico di w_{max} è dato da:

$$w_k = \beta \epsilon_{sr} a_{max}$$

dove β è un coefficiente, variabile tra 1.3 e 1.7, funzione della minima dimensione dell'elemento, ϵ_{sr} (deformazione media dell'armatura) si calcola mediante l'eq. (7.11), in cui i simboli hanno lo stesso significato e valore, mentre la distanza massima tra le fessure, a_{max} , si valuta mediante l'equazione:

$$a_{max} = 50 + 0.25 \bar{k}_1 \bar{k}_2 \frac{\phi}{\rho_r}$$

in cui le grandezze sono espresse in millimetri ed i coefficienti \bar{k}_1 e \bar{k}_2 hanno significati analoghi a quelli (k_2 e k_3) dell'eq. (7.10), a cui sono legati dalle relazioni:

$$\bar{k}_1 = 2k_2 \quad \bar{k}_2 = 4k_3$$

7.3 Stato limite di compressione

Il metodo delle tensioni ammissibili prescrive un limite alla massima tensione del calcestruzzo compresso. In condizioni di esercizio questa limitazione impedisce che nel calcestruzzo, per l'eccessiva sollecitazione, possano formarsi delle lesioni longitudinali; inoltre limita l'entità delle deformazioni viscoso entro valori compatibili con quelli previsti.

La verifica dello stato limite ultimo non garantisce che questa condizione sia, in esercizio, soddisfatta. Le sezioni fortemente armate raggiungono momenti ultimi elevati con dimensioni della sezione di calcestruzzo contenute. In simili casi il calcestruzzo, anche in condizioni di esercizio, può essere sollecitato a livelli prossimi a quelli di rottura.

Per evitare che in esercizio il calcestruzzo risulti eccessivamente sollecitato, le norme italiane prescrivono che la tensione massima prodotta dai carichi di esercizio, calcolata nello stato fessurato con l'ipotesi di comportamento elastico dei materiali, $\sigma_{c,max}$, non superi il valore $0.45f_{ck}$, per le combinazioni delle azioni frequenti o semipermanenti, e $0.55f_{ck}$ per le combinazioni rare.

Le norme europee (EC2) forniscono indicazioni analoghe; inoltre richiedono anche che sia verificata una limitazione della massima tensione nell'acciaio che, per le combinazioni di carico rare, non deve superare il valore $0.8f_{yk}$. Quest'ultima condizione serve ad impedire che in esercizio l'armatura possa plasticizzarsi, perché questo evento comporterebbe l'apertura permanente delle lesioni prodotte dalle azioni rare e di breve durata, di cui normalmente non si tiene conto in quanto, in condizioni di funzionamento elastico dell'acciaio, tendono a richiudersi quando cessa l'azione.

7.4 Stato limite di deformazione

Le deformazioni degli elementi strutturali devono essere limitate perché, se troppo grandi, possono seriamente compromettere la funzionalità della struttura. In effetti deformazioni eccessive di elementi orizzontali, quali travi, solai e piastre, non soltanto danno luogo

ad effetti fortemente antiestetici, ma possono anche compromettere funzioni importanti, come lo smaltimento delle acque piovane dai terrazzi, o produrre danni ad elementi sovrastrutturali (tramezzi, tamponature, infissi) da essi sostenuti e che dispongono di scarsa capacità adattativa.

La deformazione massima accettabile degli elementi inflessi dipende in larga misura dalla destinazione dell'opera a cui appartengono: pertanto la severità dei vincoli che devono essere rispettati può cambiare da caso a caso. In assenza di esigenze speciali si può fare riferimento alla norma ISO 4356, secondo la quale la funzionalità della struttura non è compromessa se la freccia massima degli elementi inflessi non supera $1/250$ della luce.

I danni che possono insorgere negli elementi sovrastrutturali a causa delle eccessive deformazioni della struttura portante dipendono ovviamente dal tipo di elemento, dai materiali in cui è realizzato, dalla presenza o meno di elementi di giunto, ecc. In assenza di specifiche richieste le norme ISO citate suggeriscono che, per le strutture che sostengono tramezzature od altri elementi sovrastrutturali, la deformazione sia limitata ad $1/500$ della luce.

La parte di deformazione prodotta dai carichi permanenti può essere eliminata prevedendo una *controfreccia* (ossia costruendo la trave con una forma ad arco) di uguale valore dell'abbassamento previsto. Questo accorgimento è usato spesso nelle strutture in acciaio, sia perché sono normalmente più deformabili, sia perché ne è più facile stimare in modo attendibile la deformazione, mentre è applicato più raramente nelle costruzioni in cemento armato, che sono meno deformabili e per le quali la valutazione della freccia presenta maggiori incertezze.

La valutazione analitica della deformazione delle strutture in cemento armato non è semplice, a causa del comportamento fragile del calcestruzzo teso. Limitandosi a considerare i soli effetti delle tensioni normali si ha che il comportamento può variare tra quello della sezione interamente reagente (Stato I, non fessurato) e quello della sezione completamente fessurata (Stato II). Nelle situazioni intermedie, poiché come si è visto le fessure interessano solo un numero discreto di sezioni tra cui permangono blocchi di calcestruzzo integro, la *rigidezza "media"* di un concio di trave di lunghezza finita varia tra quella della sezione non fessurata, quando la massima tensione di trazione è inferiore di quella di fessurazione, e quella della sezione fessurata, quando la sollecitazione è molto maggiore di quella di fessurazione.

Data la difficoltà e la scarsa precisione con cui è possibile valutare le deformazioni delle strutture in cemento armato, se gli elementi sono sufficientemente tozzi il calcolo delle deformazioni può essere omesso, ritenendosi che in questi casi le limitazioni indicate in precedenza risulteranno soddisfatte.

Le norme italiane e l'Eurocodice 2 forniscono delle tabelle dei limiti di snellezza (l/h) degli elementi, sotto i quali la verifica esplicita dello stato limite di deformazione può essere evitata. Questi valori sono riportati nella tabella 7.2.

Per le norme italiane, quando l'elemento è destinato a sostenere pareti divisorie, devono essere rispettate le ulteriori limitazioni: per le travi appoggiate $l/h \leq 120/l$, per le travi continue $l/h \leq 150/l$ (l in metri).

I due valori riportati nella colonna relativa all'EC2 si riferiscono il primo al caso di elementi con calcestruzzo molto sollecitato, il secondo al caso di calcestruzzo poco sollecitato.²

²Senza determinare l'effettiva sollecitazione del calcestruzzo si può assumere che il calcestruzzo è molto sollecitato se la percentuale di armatura necessaria è maggiore di 1.5%, è poco sollecitato quando questa percentuale è inferiore a 0.5%.

Elementi	snellezza massima l/h	
	Norme italiane	Eurocodice 2
Travi e piastre sempl. app. Camp. terminale travi cont. o piastre cont. monodimens. o piastre bid. cont. lato lungo	20	$18 \div 25$
Campate interm. di travi o piastre cont.	26	$25 \div 35$
Piastre sorrette da pilastri senza travi	—	$21 \div 30$
Mensole	7	$7 \div 10$

Tabella 7.2: Snellezze limite per la verifica dello stato limite di deformazione

Questi valori si riferiscono a condizioni medie e vanno modificati al variare delle situazioni. Secondo l'EC2, nel caso di sezioni a T in cui il rapporto tra la larghezza dell'ala e quella dell'anima è superiore a 3, essi devono essere moltiplicati per il coefficiente 0.8; nel caso di travi o piastre che sostengono tramezzi di luce superiore a 7 m, i valori riportati nella tabella 7.2 devono essere moltiplicati per il fattore $7/l$ (l in metri). Altri fattori di correzione sono previsti dall'Eurocodice in funzione della tensione di esercizio dell'acciaio.

7.4.1 Calcolo analitico delle deformazioni

Per gli elementi in cemento armato la valutazione analitica delle deformazioni, come è già stato sottolineato, presenta sensibili difficoltà a causa dell'insorgere della fessurazione nelle parti tese. I risultati che si ottengono utilizzando formulazioni approssimate, basate sull'analisi della fessurazione presentata nella sezione 7.2, risultano generalmente affetti da sensibili scarti rispetto ai risultati sperimentali, che peraltro sono notevolmente dispersi. Inoltre si deve tener conto degli effetti di fenomeni, come il ritiro e la viscosità, che nel tempo modificano lo stato deformativo, anche in assenza di variazione dei carichi.

Una formulazione relativamente semplice consiste nell'assumere che, ove la massima trazione non supera la resistenza del calcestruzzo, l'elemento non è fessurato e quindi la sezione reagente è data dall'intera sezione di calcestruzzo e dall'acciaio omogenizzato. Indicando con I_g il momento di inerzia di questa sezione, la curvatura è data dalla relazione:

$$\theta = \frac{M}{E_c I_g} \quad (7.12)$$

dove E_c è il modulo elastico del calcestruzzo, opportunamente ridotto per tener conto dei fenomeni viscosi.

Quando la sollecitazione supera la resistenza a trazione e l'elemento si fessura, si deve tener conto che la sua rigidità diviene variabile lungo la trave, con minimi localizzati in corrispondenza delle sezioni fessurate. Per il calcolo degli abbassamenti delle travi si può utilizzare la *deformazione media* del concio fessurato, come definito nella sezione 7.2. Per la norme italiane e l'EC2 questa deformazione è data dalla relazione [eq. (7.11)]:

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{sII} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] = \epsilon_{sII} \zeta \quad (\sigma_s > \sigma_{sr}) \quad (7.13)$$

dove ϵ_{sII} è la deformazione dell'acciaio teso relativamente alla sezione fessurata, mentre il significato degli altri simboli è quello illustrato nel § 7.2.2. Nei casi più comuni (acciaio ad aderenza migliorata e carichi frequenti o quasi permanenti) il prodotto $\beta_1 \beta_2$ prende il valore 0.5.

Nel caso che la sollecitazione sia di sola flessione il rapporto σ_{sr}/σ_s può essere sostituito da M_{fr}/M , rapporto tra il momento di fessurazione e quello effettivo. In tal caso indicando con I_{fr} il momento di inerzia della sezione fessurata, l'eq. (7.13) diviene:

$$\epsilon_{sm} = \frac{M(d - y_c)}{E_c I_{fr}} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_f}{M} \right)^2 \right] \quad (M > M_{fr}) \quad (7.14)$$

Al limite di fessurazione ($\sigma = \sigma_{sr}$ o $M = M_{fr}$) le eq. (7.13) e (7.14) forniscono un valore di ϵ_{sm} completamente indipendente da quello relativo allo stato I (non fessurato). Questo produce una discontinuità nei valori di ϵ_{sm} in corrispondenza del punto di fessurazione che può divenire paradossale qualora si assuma $\beta_1 \beta_2 = 1$, poiché in questo caso per $\sigma_s = \sigma_{sr}$ si ha $\epsilon_{sm} = 0$.

L'Eurocodice 2 corregge le equazioni (7.13) e (7.14) per superare questa anomalia, ponendo:

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{sI}(1 - \zeta) + \epsilon_{sII}\zeta \quad (7.15)$$

in cui ζ è il fattore implicitamente definito dall'eq. (7.13), mentre ϵ_{sI} e ϵ_{sII} sono le deformazioni dell'acciaio corrispondenti allo stato I (non fessurato) e II (fessurato) della sezione. Per $\sigma_s \leq \sigma_{sr}$ ($M \leq M_{fr}$) si assume $\zeta = 0$, per cui risulta $\epsilon_{sm} = \epsilon_{sI}$. Nelle zone fessurate ($\zeta > 0$) la deformazione media risulta compresa tra le due e tende a quella della sezione fessurata per $\sigma_s \gg \sigma_{sr}$ ($\zeta \sim 1$). Se $\beta_1 \beta_2 < 1$ anche l'eq. (7.15) presenta una discontinuità in corrispondenza del punto di fessurazione, tuttavia poiché in questo caso risulta comunque, per $\sigma_s \geq \sigma_{sr}$, $\epsilon_{sm} \geq \epsilon_{sI}$, essa non dà luogo ai risultati paradossali che si possono ottenere utilizzando direttamente l'eq. (7.13).

Nota la deformazione media dell'armatura la curvatura della sezione si determina con la semplice relazione:

$$\theta_m = \frac{\epsilon_{sm}}{d - y_c} \quad (7.16)$$

dove d è l'altezza utile ed y_c l'altezza della zona compressa della sezione. Sostituendo ad ϵ_{sm} l'eq. (7.13) si ottiene quindi:

$$\theta_m = \frac{\epsilon_{sII}}{d - y_c} \zeta = \theta_{II} \zeta \quad (7.17)$$

dove θ_{II} indica la curvatura della sezione fessurata. Secondo l'Eurocodice 2 si può quindi porre:

$$\theta_m = \theta_I(1 - \zeta) + \theta_{II}\zeta \quad (7.18)$$

dove θ_I è la curvatura della sezione non fessurata, calcolata con l'eq. (7.12). Si deve osservare che l'eq. (7.18) non è del tutto coerente con l'eq. (7.15).

Diversamente dalle norme italiane e dall'EC2 le norme statunitensi ACI definiscono direttamente la rigidezza (inerzia) media della sezione nella trave fessurata mediante la semplice relazione empirica:

$$I_m = \begin{cases} I_g & \text{se } M \leq M_{fr} \\ I_g \left(\frac{M_{fr}}{M} \right)^3 + I_{fr} \left[1 - \left(\frac{M_{fr}}{M} \right)^3 \right] & \text{se } M > M_{fr} \end{cases} \quad (7.19)$$

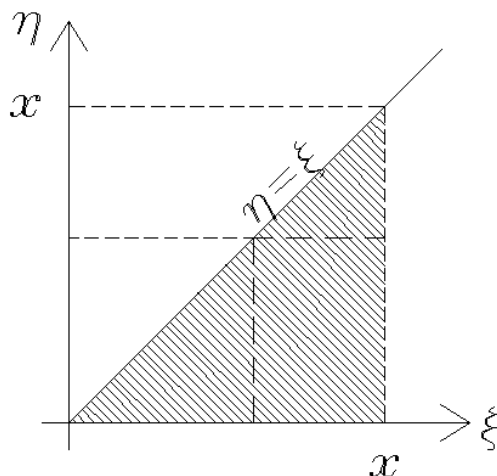


Figura 7.3: Dominio di integrazione dell'equazione (20)

in cui I_g ed I_{fr} sono i momenti di inerzia della sezione negli stati non fessurato e fessurato, rispettivamente. Dalla rigidezza I_m si passa quindi alla curvatura mediante l'ovvia relazione:

$$\theta_m = \frac{M}{E_c I_m}$$

L'eq. (7.19) ha il pregio di essere continua per cui I_m e θ_m non subiscono brusche variazioni nel passaggio dallo stato non fessurato a quello fessurato.

Quando le sollecitazioni (il momento negli elementi inflessi) è noto a priori, come avviene nelle strutture isostatiche, la determinazione degli spostamenti è relativamente semplice. In funzione di M e delle caratteristiche geometriche e meccaniche delle sezioni di calcestruzzo e delle armature, tramite le equazioni (7.12) e (7.17) [o (7.18) o (7.19)], si calcola in ogni sezione il valore medio della curvatura $\theta_m(x)$. L'abbassamento della trave si determina quindi mediante doppia integrazione della funzione $\theta_m(x)$:

$$u(x) = u(0) + \varphi(0)x + \int_0^x \int_0^\xi \theta_m(\eta) d\eta d\xi \quad (7.20)$$

in cui $u(0)$ e $\varphi(0)$ sono l'abbassamento e la rotazione della sezione di origine.

L'integrale doppio che compare nell'eq. (7.20) si può trasformare in un integrale monodimensionale semplicemente eseguendo uno scambio nell'ordine di integrazione. Il dominio di integrazione nel piano ξ, η è mostrato in fig. (7.3); invertendo l'ordine di integrazione si ha:

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi \theta_m(\eta) d\eta = \int_0^x \theta_m(\eta) d\eta \int_\eta^x d\xi = \int_0^x (x - \eta) \theta_m(\eta) d\eta$$

per cui l'eq. (7.20) diviene:

$$u(x) = u(0) + \varphi(0)x + \int_0^x (x - \eta) \theta(\eta) d\eta \quad (7.21)$$

Per esempio, nel caso di una trave semplicemente appoggiata, per le condizioni al contorno $u(0) = u(l) = 0$ si ha:

$$\varphi(0) = -\frac{1}{l} \int_0^l (l - \eta) \theta_m(\eta) d\eta$$

e quindi:³

$$u(x) = \int_0^x (x - \eta) \theta_m(\eta) d\eta - \frac{x}{l} \int_0^l (l - \eta) \theta_m(\eta) d\eta$$

Strutture iperstatiche

Nelle strutture iperstatiche la distribuzione delle sollecitazioni dipende dalle caratteristiche deformative degli elementi costituenti. Per le strutture in cemento armato, a causa del comportamento non lineare del materiale, dovuto principalmente alla fessurazione, il problema è notevolmente complicato e richiede algoritmi di calcolo più complessi di quelli normalmente utilizzati per lo studio delle strutture elastico-lineari.

In pratica tuttavia anche le strutture in cemento armato vengono di solito analizzate assumendo l'ipotesi che il loro comportamento sia elastico lineare, valutando la rigidezza degli elementi con riferimento all'intera sezione di calcestruzzo ma trascurando il contributo delle armature. Questa semplificazione offre il duplice vantaggio di poter utilizzare gli usuali metodi di calcolo validi per le strutture elastiche e di permettere la determinazione delle sollecitazioni prescindendo dalla distribuzione delle armature, che vengono calcolate successivamente sulla base delle sollecitazioni così determinate. L'esperienza ha dimostrato che questa approssimazione, per quanto grossolana, fornisce risultati soddisfacenti ai fini della verifica di sicurezza delle opere. In effetti le riduzioni di rigidezza che si verificano nelle zone più sollecitate delle membrature inflesse modificano un poco la distribuzione delle sollecitazioni, ma questa redistribuzione non comporta effetti sensibili nei confronti della sicurezza al collasso perché, se la struttura è sufficientemente duttile, a questo fine ciò che conta è che sia soddisfatto l'equilibrio globale dell'elemento, in quanto le redistribuzioni che si verificano in fase plastica consentono di utilizzare gli eccessi di resistenza per colmare eventuali lacune. In fase di esercizio invece possono verificarsi inconvenienti dovuti all'eccessiva sollecitazione di alcune sezioni, ma generalmente questi effetti sono evitati dai margini di sicurezza relativi ai materiali ed alle azioni, oltre che dal rispetto dei minimi regolamentari.

Anche per la verifica dello stato limite di deformazione delle strutture iperstatiche è generalmente ammesso applicare il procedimento, illustrato nel paragrafo precedente con riferimento alle strutture isostatiche, utilizzando le sollecitazioni determinate con l'ipotesi di funzionamento elastico-lineare della struttura. Volendo ottenere una determinazione più accurata delle sollecitazioni e degli spostamenti occorre invece tener conto del comportamento non lineare indotto dalla fessurazione.

A titolo di esempio nel paragrafo seguente viene illustrato un metodo per l'analisi delle travi continue in fase fessurata e successivamente è riportata la lista di un programma in FORTRAN che applica il procedimento descritto.

Travi continue in fase fessurata

Il modello di comportamento utilizzato è quello descritto nei paragrafi precedenti. In fase non fessurata ($M < M_{fr}$) la rigidezza della sezione è quella intera del calcestruzzo (ed

³ u è positivo verso l'alto.

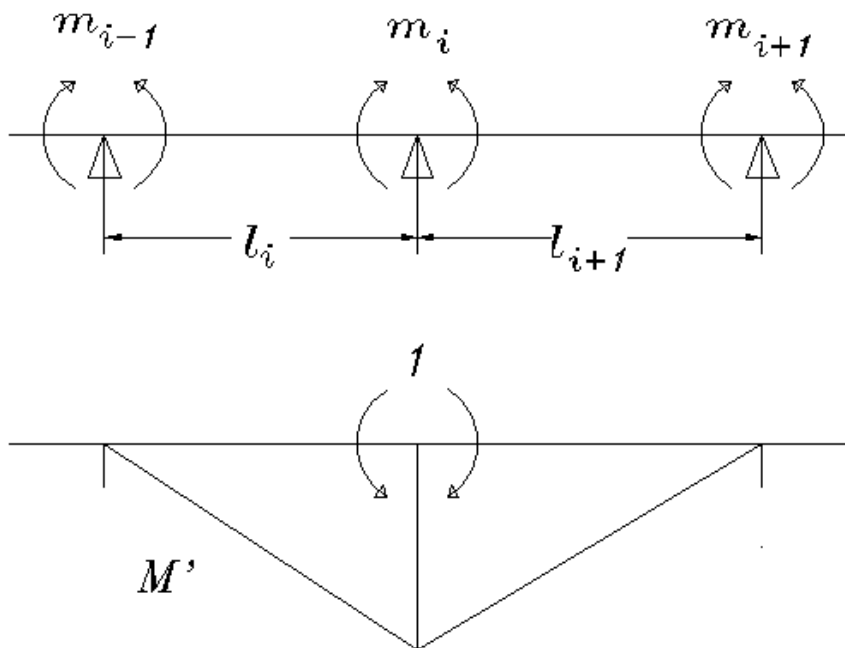


Figura 7.4: Convenzioni e simboli per la trave continua.

eventualmente dell'acciaio omogenizzato). In fase fessurata ($M \geq M_{fr}$) il momento di inerzia medio delle sezioni si può calcolare usando le equazioni (7.17) o (7.18) o (7.19), secondo il modello prescelto.

Mentre dall'eq. (7.19) si ottiene direttamente il valore di I_m , dalle equazioni (7.17) e (7.18) questa grandezza deve essere derivata ponendo: $\theta_m = M/E_c I_m$. Dall'eq. (7.17) si ottiene quindi:

$$I_m = \frac{I_{fr}}{\zeta} \quad (7.22)$$

e dall'eq. (7.18):

$$I_m = \frac{I_g I_{fr}}{I_{fr}(1 - \zeta) + I_g \zeta} \quad (7.23)$$

Per la soluzione del problema è conveniente utilizzare il metodo delle forze. Le incognite sono quindi i momenti di continuità m_i tra le campate i -esima ed $(i+1)$ -esima. Indicando con $M_{0i}(x)$ il momento prodotto dai carichi sulla campata i , considerata come una trave appoggiata, il momento effettivo della trave continua $M_i(x)$, relativamente alla stessa campata, è:

$$M_i(x) = M_{0i}(x) - m_{i-1}\left(1 - \frac{x}{l_i}\right) - m_i \frac{x}{l_i} \quad (7.24)$$

dove si è adottata la convenzione di considerare i momenti $M(x)$ positivi se tendono le fibre inferiori della trave, come mostrato in fig. (7.4).

Una coppia di momenti opposti, di modulo unitario, agenti in corrispondenza dell'appoggio k producono, sulla trave privata della continuità, il momento [fig. (7.4)]:

$$M'_k(x) = \begin{cases} x/l_k & \text{sulla campata } k \\ (1 - x/l_{k+1}) & \text{sulla campata } k + 1 \\ 0 & \text{sulle altre campate} \end{cases} \quad (7.25)$$

Poiché le forze che producono il momento M'_k formano un sistema equilibrato, il lavoro virtuale dei momenti M'_k per ogni campo di deformazioni congruenti deve essere nullo. Utilizzando come campo di deformazioni virtuali quelle prodotte dal momento effettivo $M(x)$:

$$\frac{M(x)}{E_c I(x)}$$

($I(x)$ è il momento di inerzia della sezione), tenendo conto delle equazioni (7.24) e (7.25) e ponendo $\xi = x/l$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{M(x)}{E_c I(x)} M'_k(x) \dot{x} = & \\ = l_k \int_0^1 \frac{M_{0k}(\xi)\xi}{E_c I_k(\xi)} d\xi + l_{k+1} \int_0^1 \frac{M_{0,k+1}(\xi)(1-\xi)}{E_c I_{k+1}(\xi)} d\xi - & \\ - m_{k-1} l_k \int_0^1 \frac{(1-\xi)\xi}{E_c I_k(\xi)} d\xi - & \\ - m_k \left[l_k \int_0^1 \frac{\xi^2}{E_c I_k(\xi)} d\xi + l_{k+1} \int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{E_c I_{k+1}(\xi)} d\xi \right] - & \\ - m_{k+1} l_{k+1} \int_0^1 \frac{(1-\xi)\xi}{E_c I_{k+1}(\xi)} d\xi = 0 & \end{aligned}$$

Queste equazioni, scritte per ogni appoggio, danno luogo ad un sistema che, in forma compatta, si può scrivere:

$$m_{k-1} c_k^{(2)} + m_k (c_k^{(1)} + c_{k+1}^{(3)}) + m_{k+1} c_{k+1}^{(2)} = b_k^{(1)} + b_{k+1}^{(2)} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (7.26)$$

dove i coefficienti c ed i termini noti b sono forniti dalle relazioni:

$$\begin{aligned} c_k^{(1)} = l_k \int_0^1 \frac{\xi^2}{E_c I_k(\xi)} d\xi \quad c_k^{(2)} = l_k \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{E_c I_k(\xi)} d\xi \quad c_k^{(3)} = l_k \int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{E_c I_k(\xi)} d\xi \\ b_k^{(1)} = l_k \int_0^1 \frac{M_{0k}(\xi)\xi}{E_c I_k(\xi)} d\xi \quad b_k^{(2)} = l_k \int_0^1 \frac{M_{0k}(\xi)(1-\xi)}{E_c I_k(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

Se $I_k(\xi)$ non dipende dalla sollecitazione il sistema di equazioni (7.26) è lineare; in particolare se $I_k(\xi) = \text{cost}$ si ottiene la ben nota equazione dei 3 momenti. Nel caso in esame invece il momento di inerzia varia con la sollecitazione a causa del progredire della fessurazione, pertanto la soluzione del sistema di equazioni (7.26) richiede un procedimento iterativo. Un semplice schema è il seguente: si inizia assumendo $I(\xi) = I_g$, momento di inerzia della sezione non fessurata; risolvendo il sistema (7.26) si determina una soluzione di primo tentativo. Dalle sollecitazioni conseguenti si ottengono i valori di $I(\xi)$ corretti per tener conto della fessurazione. Con questi valori si calcolano i coefficienti $c_k^{(j)}$ ed i termini noti $b_k^{(j)}$ e, con essi, una soluzione di seconda approssimazione. Il procedimento viene quindi iterato fino a quando due successive soluzioni differiscono per meno di una tolleranza fissata.

Lista del programma Nel seguito viene riportata la lista di un programma, in FORTRAN 77, per il calcolo delle sollecitazioni e degli spostamenti di travi continue in regime fessurato.

I dati devono essere preparati in un “file”, secondo lo schema seguente, in cui ogni voce della lista corrisponde ad una riga (“record”):

1. Numero delle campate, Tolleranza errore convergenza, Opzione: (=0 Norma italiana, = 1 EC2, =2 ACI)
2. Per ogni campata:
 - (a) Luce di calcolo, Numero delle sezioni esaminate (deve essere dispari)
 - (b) Per ogni sezione:
 - Rigidezza sez. non fess., Rig. sez. fess. mom. pos., Rig. sez. fess. mom. neg., Momento di fessurazione positivo, Mom. fess. negativo, Momento dei carichi su trave appoggiata.

C Programma per il calcolo delle sollecitazioni nelle travi continue in
C c.a. nello stato fessurato

```

c
      Parameter (ncp=20, nszp=21)
      dimension spn(ncp), ns(ncp), rg(ncp,nszp), rf(ncp,nszp,2),
&bmf(ncp,nszp,2), bm0(ncp,nszp), reff(nszp), bme(ncp,nszp),
&v(nszp),xsi(nszp), c1(ncp), c2(ncp), c3(ncp), b1(ncp), b2(ncp),
&c(2*ncp-3), b(ncp-1), x(ncp-1),xp(ncp-1),curv(ncp,nszp),
&rot(nszp),y(ncp,nszp)
C
      data beta/0.5/ , maxit /10/
C
C Input dei dati
C
c iop=0 Norma Ital
c iop=1 EC2
c iop=2 ACI
      read(5,*) nc,tll,iop
      Do 20 i=1,nc
      read(5,*) spn(i),ns(i)
      do 10 j=1,ns(i)
10    read(5,*) rg(i,j),(rf(i,j,k),k=1,2),(bmf(i,j,k),k=1,2),bm0(i,j)
20    continue
C
C Inizio ciclo iterazioni
C
      iter=0
30    do 200 i=1,nc
      do 40 j=1,ns(i)
40    xsi(j)=float(j-1)/float(ns(i)-1)

```

```

C
C Alla prima iterazione assume la rigidezza non fessurata
C
      if(iter.eq.0) then
          do 50 j=1,ns(i)
50          reff(j)=rg(i,j)
              goto 80
          end if
C
C Calcolo delle sollecitazioni e rigidezze in tutte le sezioni
C
      do 70 j=1,ns(i)
          bm=bm0(i,j)
          if(i.gt.1) bm=bm-x(i-1)*(1-xsi(j))
          if(i.lt.nc) bm=bm-x(i)*xsi(j)
          bme(i,j)=bm
          if(bm.ge.0) then
              if(bm.le.bmf(i,j,1)) then
                  reff(j)=rg(i,j)
              else
                  z=1-beta*(bmf(i,j,1)/bm)**2
                  if(iop.eq.0) then
                      reff(j)=rf(i,j,1)/z
                  elseif(iop.eq.1) then
                      reff(j)=1/((1-z)/rg(i,j)+z/rf(i,j,1))
                  else
                      reff(j)=rg(i,j)*(bmf(i,j,1)/bm)**3 +
&                      rf(i,j,1)*(1-(bmf(i,j,1)/bm)**3)
                  endif
              endif
          else
              if(bm.ge.bmf(i,j,2)) then
                  reff(j)=rg(i,j)
              else
                  z=1-beta*(bmf(i,j,2)/bm)**2
                  if(iop.eq.0) then
                      reff(j)=rf(i,j,2)/z
                  elseif(iop.eq.1) then
                      reff(j)=1/((1-z)/rg(i,j)+z/rf(i,j,2))
                  else
                      reff(j)=rg(i,j)*(bmf(i,j,2)/bm)**3 +
&                      rf(i,j,2)*(1-(bmf(i,j,2)/bm)**3)
                  endif
              endif
          endif
          curv(i,j)=bm/reff(j)
70      continue
C

```

```

C Calcolo dei coefficienti c e dei termini noti b
C
80  do 90 j=1,ns(i)
90  v(j)=xsi(j)**2/reff(j)
    call simpson(v,ns(i),0.,1.,c1(i))
    do 100 j=1,ns(i)
100 v(j)=xsi(j)*(1-xsi(j))/reff(j)
    call simpson(v,ns(i),0.,1.,c2(i))
    do 110 j=1,ns(i)
110 v(j)=(1-xsi(j))**2/reff(j)
    call simpson(v,ns(i),0.,1.,c3(i))
    do 120 j=1,ns(i)
120 v(j)=bm0(i,j)*xsi(j)/reff(j)
    call simpson(v,ns(i),0.,1.,b1(i))
    do 130 j=1,ns(i)
130 v(j)=bm0(i,j)*(1-xsi(j))/reff(j)
    call simpson(v,ns(i),0.,1.,b2(i))
200 continue
c
c Assemblaggio dei coefficienti del sistema di equazioni
c
    do 300 i=1,nc-1
    c(2*i-1)=c1(i)*spn(i)+c3(i+1)*spn(i+1)
    if(i+1.lt.nc) c(2*i)=c2(i+1)*spn(i+1)
    b(i)=b1(i)*spn(i)+b2(i+1)*spn(i+1)
300  continue
    call solve2(c,b,nc-1,x)
c
c Controllo convergenza
c
    if(iter.gt.0) then
        err=0
        do 320 i=1,nc-1
320    err=max(err,abs(x(i)-xp(i)))
        write(6,*) 'Iterazione n.',iter,' Errore =',err
        if(err.le.tll.or.iter.gt.maxit) goto 400
    end if
c
c Ricorda il risultato in xp
c
    do 350 i=1,nc-1
350  xp(i)=x(i)
    iter=iter+1
c
c Nuova iterazione
c
    goto 30
c

```

```

c Convergenza raggiunta. Calcolo degli abbassamenti
c
400  continue
      do 450 i=1,nc
        rot(1)=0
        dx=spn(i)/(ns(i)-1)
        do 410 j=2,ns(i)
410   rot(j)=rot(j-1)+(curv(i,j-1)+curv(i,j))*dx/2
        y(i,j)=0
        do 420 j=2,ns(i)
420   y(i,j)=y(i,j-1)+(rot(j-1)+rot(j))*dx/2
        do 430 j=2,ns(i)
430   y(i,j)=y(i,j)-y(i,ns(i))*float(j-1)/float(ns(i)-1)
450  continue
c
c Stampa dei risultati
c
      write(6,1000)
      do 500 i=1,nc
        write(6,1100) i,(bme(i,j),j=1,ns(i))
500   write(6,1200) (y(i,j),j=1,ns(i))
      stop
1000  format('1','SOLUZIONE',/)
1100  format(1x,/, 'CAMPATA N.',i3,/' Momenti=',/(1x,6e12.5))
1200  format(1x,'Abbassam.=',/(1x,6e12.5))
      end
c
c
      subroutine solve2(c,b,n,x)
c
c Soluzione sistemi lineari con matrice simmetrica e banda 2
c
      dimension c(*),b(*),x(*)
c
c Riduzione
c
      do 10 i=2,n
        c(2*i-1)=c(2*i-1)-c(2*i-2)**2/c(2*i-3)
10    b(i)=b(i)-b(i-1)*c(2*i-2)/c(2*i-3)
c
c Sostituzione all'indietro
c
      x(n)=b(n)/c(2*n-1)
      do 20 i=n-1,1,-1
20    x(i)=(b(i)-x(i+1)*c(2*i))/c(2*i-1)
      return
      end
c

```

```

c
  subroutine simpson(v,n,a,b,q)
c
c Integrale definito con regola di Simpson
c
  dimension v(*)
  if(mod(n,2).ne.1) then
    write(6,1000)
    stop
  endif
  q=v(1)
  do 10 i=2,n-3,2
10  q=q+4*v(i)+2*v(i+1)
  q=(q+4*v(n-1)+v(n))*(b-a)/3/(n-1)
  return
1000 format(' ERRORE IN ROUTINE SIMPSON',/
  &'Il numero dei punti di integrazione deve essere dispari')
  end

```

Note Gli integrali che definiscono i coefficienti c e b dell'eq. (7.26) vengono calcolati numericamente con la regola di Simpson. Questo richiede che il numero di sezioni esaminate per ogni campata (punti di integrazione) sia dispari. È ovvio che le sezioni considerate sono distribuite uniformemente alla distanza costante $l/(n-1)$.

Per il calcolo degli abbassamenti si è integrata due volte la funzione delle curvature, applicando direttamente l'eq. (7.20), usando la semplice regola dei trapezi. Questo procedimento, meno accurato, ha il vantaggio di fornire direttamente il valore dello spostamento di ogni punto di integrazione e quindi, per punti, l'intera deformata della trave.

Esempio

Come esempio di utilizzazione del calcolo non lineare delle sollecitazioni e degli abbassamenti di una trave in cemento armato viene studiata, mediante il programma presentato in precedenza, una trave continua a due campate.

Esempio 7.1 Si considera la trave simmetrica a due campate rappresentata in fig. (7.5). Si assume che sia sollecitata da un carico di esercizio uniforme $p = 40$ kN/m. La trave è stata progettata con il metodo delle tensioni ammissibili per le sollecitazioni ricavate da un calcolo elastico della trave non fessurata. Si ottiene: □

$$\begin{aligned} \text{Momento sull'appoggio} \quad M &= \frac{1}{8}pl^2 = 180 \text{ kNm} \\ \text{Momento massimo in campata} \quad M &= \frac{9}{128}pl^2 = 101.2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Esempio 7.2 Assumendo per i materiali le seguenti caratteristiche: Calcestruzzo $R_{ck} = 30$ N/mm, Acciaio tipo Fe B 44k, sono state calcolate le armature rappresentate in figura.

Nella trave si riconoscono tre tipi di sezione, diversi per i quantitativi dell'armatura:

$$\begin{aligned} \text{Sez. 1} \quad A_{sup} &= 2\phi 14 = 3.1 \text{ cm}^2 & A_{inf} &= 4\phi 16 = 8.0 \text{ cm}^2 \\ \text{Sez. 2} \quad A_{sup} &= 2\phi 14 + 2\phi 16 + 1\phi 20 = 10.2 \text{ cm}^2 & A_{inf} &= 2\phi 16 = 4.0 \text{ cm}^2 \\ \text{Sez. 3} \quad A_{sup} &= 2\phi 14 + 4\phi 16 + 1\phi 20 = 14.2 \text{ cm}^2 & A_{inf} &= 2\phi 16 = 4.0 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

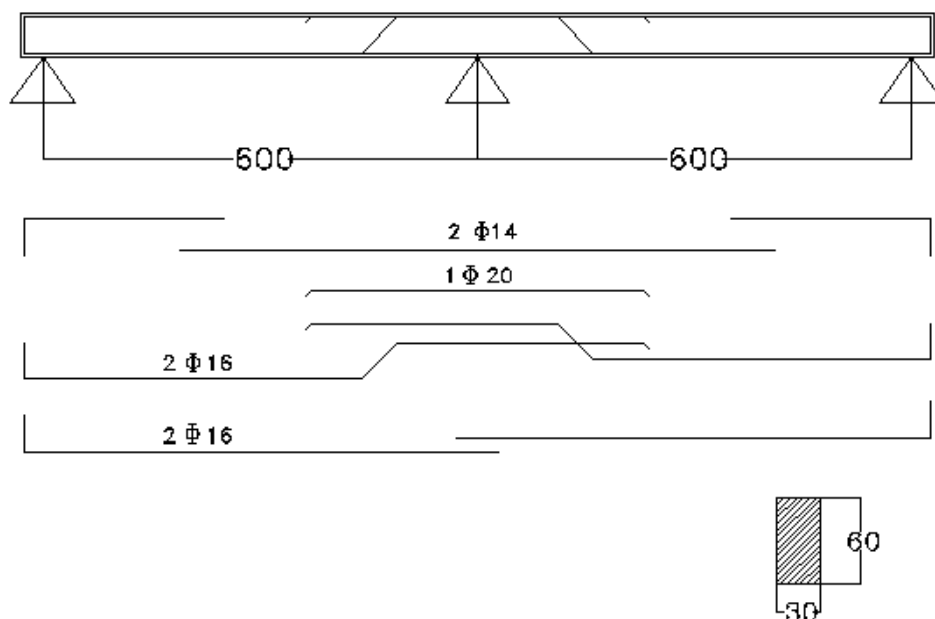


Figura 7.5: Armatura della trave continua dell'esempio.

Sez.	$I_g(\text{cm}^4)$	$I_f^+(\text{cm}^4)$	$I_f^-(\text{cm}^4)$	$M_{fr}^+(\text{Ncm})$	$M_{fr}^-(\text{Ncm})$
1	540000	250134	117884	3.285×10^6	-3.285×10^6
2	540000	149913	304706	3.285×10^6	-3.285×10^6
3	540000	152922	388258	3.285×10^6	-3.285×10^6

Tabella 7.3:

Dividendo la trave in 10 conci di uguale lunghezza ($\Delta x = 60$ cm), la Sez. 1 interessa le sezioni 1 – 8, la Sez. 2 la sezione 9 e la Sez. 3 le sezioni 10 - 11.

Le caratteristiche delle sezioni richieste dal programma sono riportate nella tabella (7.3)

I risultati ottenuti, adottando il modello di fessurazione della normativa italiana, sono illustrati nella fig. 7.6, a confronto con quelli corrispondenti all'analisi della trave non fessurata. Come si vede il diagramma delle sollecitazioni non si modifica sensibilmente, tuttavia il momento sull'appoggio aumenta di circa l'11% ($M = 200$ kNm). Questo è dovuto al fatto che le sezioni prossime all'appoggio, essendo maggiormente armate, sono, in fase fessurata, più rigide di quelle della parte centrale della trave. Le deformazioni (calcolate con riferimento al modulo elastico del calcestruzzo $E_c^* = 0.4E_c = 12500$ N/mm², ridotto per tener conto della viscosità) sono ovviamente molto maggiori in fase fessurata di quelle relative alla fase I. Tuttavia il risultato sarebbe stato invece poco diverso se il calcolo, in fase fessurata, fosse stato eseguito sulla base del momento relativo alla fase elastica. □

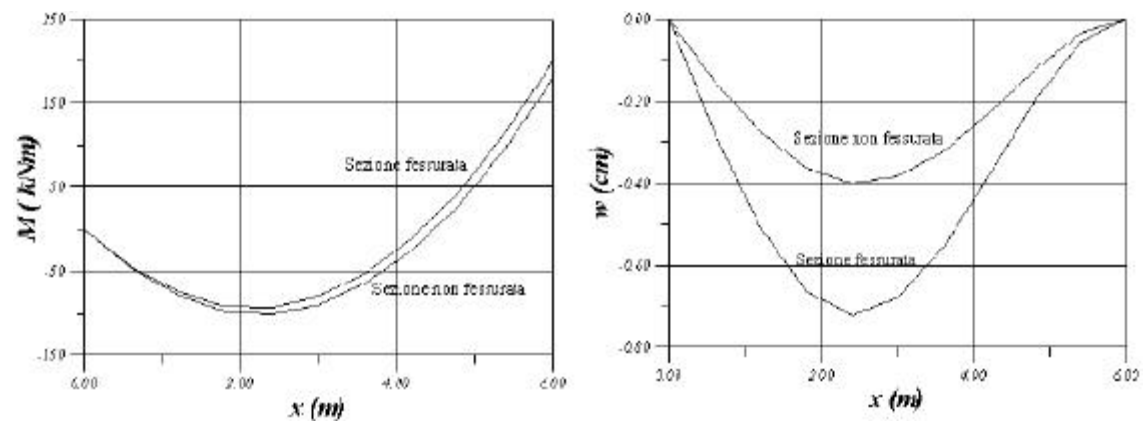


Figura 7.6: Diagrammi dei momenti e delle deformazioni della trave continua dell'esempio