

Capitolo 6

Elementi sollecitati da tensioni tangenziali: la torsione

6.1 Introduzione

Le tensioni tangenziali nelle sezioni rette delle travi, oltre che dalla sollecitazione di taglio, analizzata nel capitolo precedente, sono provocate dalla sollecitazione di torsione.

L'azione torcente è presente in molte situazioni: infatti è raro che i carichi siano applicati in modo tale che la loro risultante passi per la linea dei centri di taglio della trave che, di conseguenza, risulta anche sollecitata dall'azione di un momento torcente di entità più o meno grande. Tuttavia nella pratica della progettazione spesso questa sollecitazione viene ignorata: infatti quando, come è frequente, le strutture vengono schematizzate come piane non vi è spazio per mettere in conto l'azione torcente ed anche se si utilizzano più raffinati modelli tridimensionali di solito vengono considerati solo carichi che producono sollecitazioni di taglio e flessione.

L'esperienza ha dimostrato che la semplificazione del trascurare le sollecitazioni torsionali di solito non produce effetti indesiderati. Per chiarire questa apparente contraddizione è utile introdurre la distinzione tra una torsione “primaria” ed una “secondaria”. La prima è quella prodotta da carichi che, per essere equilibrati, richiedono la presenza di una reazione torsionale nella trave, cioè per i quali la possibilità di soddisfare l'equilibrio è condizionata dalla capacità della trave di resistere all'azione torcente. Un esempio di “torsione primaria” è quella che nasce nelle *travi a ginocchio*, usate nella realizzazione delle scale, che sostengono i gradini come mensole sporgenti trasversalmente dalla trave. L'equilibrio dei gradini è possibile solo se la trave è in grado di resistere al momento torcente che equilibra i momenti di incastro delle mensole. La torsione “secondaria” è invece quella che si sviluppa per effetto dei vincoli di continuità di un sistema iperstatico; annullando la rigidità torsionale delle travi i momenti torcenti scompaiono ma l'equilibrio della struttura è ancora possibile.

Quest'ultimo tipo di azione è quella che si incontra più di frequente e di fatto è presente in quasi tutte le travi delle strutture in cemento armato, in quanto normalmente queste non sono costituite da elementi isolati ma, al contrario, formano sistemi spaziali continui in cui si sviluppano, tra le altre, anche delle azioni torcenti. Ad esempio le sezioni delle travi che sostengono i solai con cui sono solidali devono subire rotazioni torcenti uguali alle rotazioni flessionali delle estremità dei travetti: a queste rotazioni corrispondono proporzionali sollecitazioni.

Ovviamente solo la torsione secondaria può essere trascurata senza che questo costituisca un pericolo per la struttura. La fessurazione del calcestruzzo, dovuta alle azioni torcenti, riduce considerevolmente la rigidezza torsionale delle travi, che di conseguenza assorbono delle sollecitazioni sensibilmente inferiori a quelle previste da un modello di funzionamento dei materiali perfettamente elastico. In sostanza le strutture si “adattano” rilasciando, almeno parzialmente, quei vincoli che non sono in grado di realizzare in modo efficace.

La liceità del trascurare le torsioni secondarie è in realtà limitata alle verifiche nei confronti degli stati limite ultimi, in quanto in questa fase quello che conta è che la struttura sia in grado di garantire l’equilibrio di ogni sua parte, senza riguardo per eventuali danni. Per le condizioni di esercizio occorre tener presente che le rotazioni torsionali possono produrre stati di fessurazione incompatibili con il buon funzionamento; in questi casi si dovrà prevedere un’armatura adeguata atta ad impedire l’eccessiva fessurazione. Un ruolo importante è giocato dalle dimensioni (effetto scala): trascurare le sollecitazioni torsionali secondarie è di solito lecito per le travi che sostengono solai di luce relativamente piccola (< 6 m); per le travi che sostengono solai di luce maggiore è opportuno prendere in esame il pericolo dei danni che possono insorgere per effetto delle sollecitazioni torsionali iperstatiche.

Raramente la sollecitazione torcente è presente da sola: normalmente essa è prodotta da azioni che provocano anche altre sollecitazioni, in particolare la flessione ed il taglio e, in certi casi, lo sforzo normale. La verifica razionale di un elemento richiede quindi che si sappia tenere conto della interazione mutua di queste diverse sollecitazioni. Per gli elementi realizzati con materiali a comportamento elastico lineare la possibilità di sommare gli effetti rende la cosa semplice, ma per il cemento armato le nonlinearità e soprattutto l’apertura delle fessure fa sì che vi sia una profonda interazione e quindi, almeno in teoria, non è lecito esaminare le singole azioni separatamente. Di fatto il problema è veramente complesso e governato da molti parametri per cui anche per via sperimentale non sono stati ancora ottenuti modelli affidabili, in grado di tener conto dell’interazione reciproca della torsione con la flessione ed il taglio. In pratica gli effetti delle diverse sollecitazioni vengono valutati separatamente, sommando i quantitativi di armatura richiesti da ciascuna azione e le rispettive sollecitazioni, ovviamente se dello stesso tipo.

6.2 Comportamento in fase elastica

Prima della fessurazione anche le travi in cemento armato si possono trattare, senza eccessivo errore, mediante il modello elastico di De Saint Venant, per il quale sono note le soluzioni di tutti i casi di interesse pratico. Per le sezioni rettangolari con lati di dimensioni b ed h , con $b \leq h$, la massima tensione tangenziale prodotta dal momento torcente M_t è data dalla relazione:

$$\tau_{max} = \psi \frac{M_t}{b^2 h} \quad (6.1)$$

in cui ψ è una funzione del rapporto h/b , variabile tra 4.79 per $h/b = 1$ e 3 ($h/b = \infty$).

La rigidezza torsionale della sezione è definita dalla relazione: $d\theta/dx = M_t/k_t$, in cui $\theta(x)$ indica la rotazione della sezione di ascissa x . Per le sezioni rettangolari si ha:

$$k_t = \beta G b^3 h \quad (6.2)$$

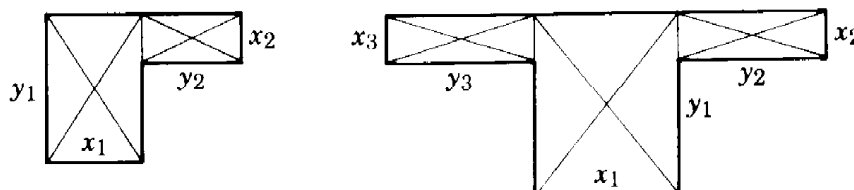


Figura 6.1: Decomposizione in rettangoli di figure complesse

dove $G = E/2(1 - \nu)$ è il modulo di taglio del materiale e β è un'altra funzione di h/b , variabile tra 0.41 per le sezioni quadrate ed $1/3$ per quelle rettangolari molto allungate.

Le sezioni monoconnesse che possono essere decomposte in parti rettangolari, come ad esempio le sezioni a T, ad L, ad I, ecc... (fig. 6.1), possono in via approssimata trattarsi assumendo che ogni rettangolo assorba una parte del momento torcente totale proporzionale alla sua rigidezza. Quindi se una sezione viene scomposta in n rettangoli, il momento che sollecita l' j -esima parte è:

$$M_{tj} = M_t \frac{k_{tj}}{\sum_{i=1}^n k_{ti}}$$

e la tensione tangenziale massima nell'elemento si ottiene applicando l'eq. (6.1):

$$\tau_{mx,j} = \psi_j \frac{M_{tj}}{b_j^2 h_j}$$

Il modo di decomporre una figura solitamente non è univoco: il criterio da adottare nella scomposizione consiste nel rendere massima la rigidezza totale della sezione. Questo procedimento a rigore è corretto solo per le sezioni sottili per cui si possa assumere $h/b \approx \infty$, condizione soddisfatta in pratica dalle sezioni in acciaio; tuttavia può essere utilizzato con tollerabile approssimazione anche per le tozze sezioni in cemento armato.

Le relazioni precedenti non si applicano alle sezioni pluriconnesse, come le travi a cassone dei ponti. Per le sezioni tubolari, in cui lo spessore è piccolo rispetto alle dimensioni globali, si può assumere che la tensione tangenziale sia costante attraverso lo spessore; la condizione di continuità del flusso delle tensioni porta quindi ad assumere:

$$\tau h = \text{cost}$$

h essendo lo spessore del tubo. Per l'equilibrio della sezione si ha dunque (fig. 6.2):

$$M_t = \oint \tau h r ds = 2\tau h \quad (6.3)$$

in cui \oint indica l'area racchiusa dalla linea mediana della parete del tubo e si è tenuto conto della condizione di continuità.

La rigidezza torsionale delle sezioni di questo tipo si valuta facilmente uguagliando l'energia di deformazione elastica con il lavoro delle sollecitazioni. Indicando con θ la rotazione della sezione, il lavoro del momento torcente è $\frac{1}{2} M_t \theta$, mentre l'energia interna

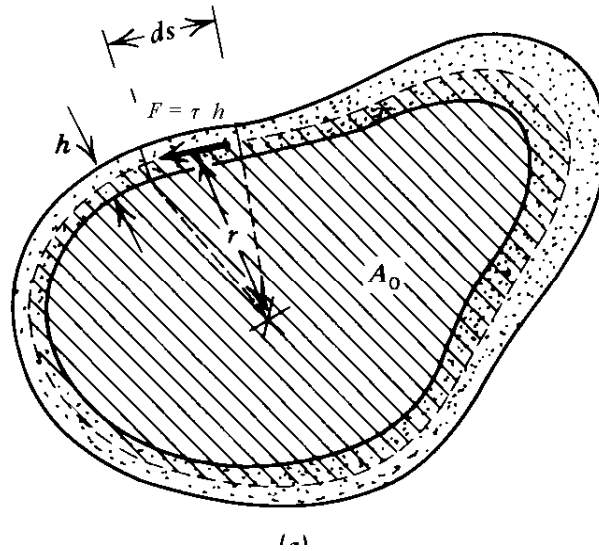


Figura 6.2: Sezione tubolare sollecitata a torsione

è data dalla relazione: $\frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dV$. Uguagliando queste due espressioni e ponendo, per l'elasticità del materiale, $\gamma = \tau/G$, tenendo conto che dall'eq. (6.3) si deduce:

$$\tau = \frac{M_t}{2 h}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2} M_t \theta = \frac{1}{2} l \oint \tau h \frac{\tau}{G} ds = \frac{1}{2} \frac{l}{G} \left(\frac{M_t}{2} \right)^2 \oint \frac{ds}{h}$$

dove l indica la lunghezza del concio di trave considerato. Semplificando l'equazione precedente si ottiene:

$$\theta = \frac{M_t l}{4G} \oint \frac{ds}{h} = \frac{M_t l}{k_t}$$

Dal confronto tra il secondo ed il terzo membro di questa uguaglianza si deduce:

$$k_t = \frac{4G}{\oint \frac{ds}{h}} \quad (6.4)$$

che nel caso in cui lo spessore sia costante diviene:

$$k_t = \frac{4G}{p} \quad (6.5)$$

dove p indica la lunghezza della linea mediana della parete del tubo.

È importante osservare che i risultati della teoria semplificata dei tubi sottili, per quanto riguarda lo stato tensionale, derivano dalle sole condizioni di equilibrio: pertanto il loro campo di validità si estende oltre il limite della teoria elastica lineare, includendo anche il campo del comportamento plastico dei materiali.

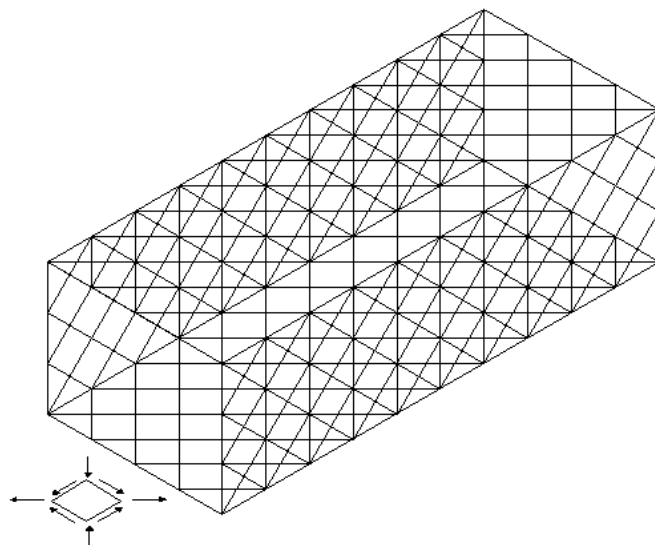


Figura 6.3: Linee isostatiche in una trave sollecitata a torsione

6.3 La torsione nelle travi fessurate

Finché il materiale ha un comportamento elastico, od almeno approssimativamente tale, la torsione produce, nelle sezioni rette delle travi, uno stato di tensione puramente tangenziale, di intensità crescente dal baricentro verso il bordo, dove si raggiungono i valori massimi. In presenza della sola torsione le tensioni principali risultano pertanto ovunque inclinate di 45° rispetto al piano della sezione; queste tensioni, una di compressione e l'altra di trazione, sono in modulo uguali alla tensione tangenziale τ . Su di un cilindro di sezione circolare le isostatiche disegnano delle eliche inclinate a 45° ; nelle travi di sezione rettangolare le isostatiche formano un reticolo di linee inclinate a 45° , come illustrato nella fig. 6.3.

Le prime fessure si sviluppano ortogonalmente alle trazioni principali e quindi seguono l'andamento delle isostatiche di compressione. Poiché le tensioni maggiori si hanno sulla frontiera, le fessure nascono in corrispondenza della superficie e quindi si propagano, al crescere della sollecitazione, verso l'interno.

Quando la fessurazione è ben sviluppata due fessure consecutive individuano una biella di calcestruzzo compresso che interessa per un certo spessore la parte più periferica della trave. Se questa è dotata di un'armatura opportuna la trave può essere assimilata ad un traliccio spaziale, formato da bielle di calcestruzzo compresso ed armature tese: entrambe interessano solo un modesto spessore della parte più esterna del cilindro. Questo grigliato ideale può essere assimilato ad un tubo con struttura a traliccio a cui si è soliti affidare l'intera resistenza all'azione torcente. Il nucleo interno offre un contributo modesto che può essere trascurato.

Ai fini delle verifiche di resistenza la trave viene dunque assimilata ad una di sezione tubolare, di spessore \bar{h} ; come linea mediana del tubo si assume la congiungente delle armature longitudinali poste nei vertici (fig. 6.4). Con questa schematizzazione, la

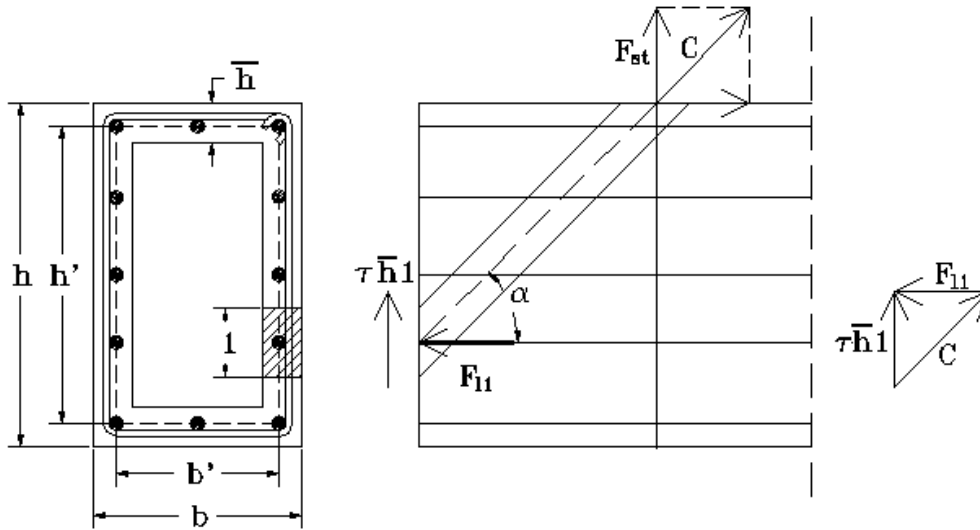


Figura 6.4: Schema del traliccio resistente di una trave in c.a. sollecitata a torsione.

tensione media nello spessore del “tubo” si ottiene dall’eq. (6.3):

$$\tau = \frac{M_t}{2 \bar{h}} \quad (6.6)$$

dove \bar{h} è ancora l’area racchiusa dalla linea mediana dello spessore; per una sezione rettangolare $\bar{h} = b'h'$, dove b' ed h' indicano le distanze tra i centri delle barre di armatura poste nei vertici della sezione.

La forza risultante delle tensioni agenti su di un tratto di lunghezza unitaria della parete del “tubo” è pertanto:

$$\tau \bar{h} 1 = \frac{M_t}{2} \quad (6.7)$$

Indicando con α l’inclinazione delle bielle di calcestruzzo, questa forza induce una compressione C il cui modulo si ottiene scomponendo la forza stessa nelle direzioni della biella ed in quella longitudinale:

$$C = \frac{\tau \bar{h} 1}{\sin \alpha} = \frac{M_t}{2 \sin \alpha} \quad (6.8)$$

mentre la corrispondente componente longitudinale è:

$$F_{l1} = C \cos \alpha = \frac{M_t}{2 \tan \alpha} \quad (6.9)$$

In corrispondenza dello spigolo della trave la forza C si decompone in una verticale:

$$F_{st} = C \sin \alpha = \frac{M_t}{2} \quad (6.10)$$

ed una longitudinale F_h . Quest’ultima è equilibrata dalla corrispondente, di segno opposto, prodotta dalla compressione agente sulla biella della faccia adiacente (fig. 6.5), mentre la componente verticale F_{st} deve essere assorbita da un’idonea armatura.

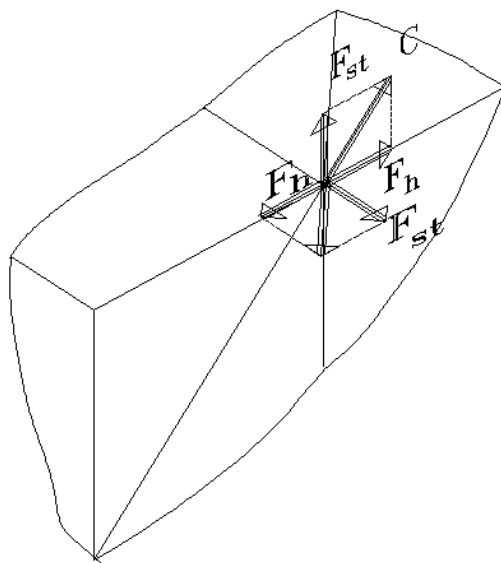


Figura 6.5: Equilibrio delle forze nel traliccio resistente alla torsione

Dunque la trave deve essere dotata di un doppio ordito di armature: uno longitudinale, per assorbire le forze F_{l1} , l'altro trasversale (staffe), che sopporta le forze F_{st} . La forza totale in direzione longitudinale è:

$$F_l = F_{l1}p = \frac{M_t}{2 \tan \alpha} p \quad (6.11)$$

dove p indica la lunghezza (perimetro) della linea mediana dello spessore della sezione tubolare equivalente. Al collasso la forza massima portata dall'armatura longitudinale è $A_l f_{yd}$, in cui A_l indica l'area totale dell'armatura longitudinale resistente alla torsione; uguagliando questa resistenza alla sollecitazione data dall'eq. (6.11) si ha:

$$A_l f_{yd} = \frac{M_{tu}}{2 \tan \alpha} p$$

da cui si deduce il momento torcente ultimo della sezione:

$$M_{tu} = 2 \frac{A_l f_{yd}}{p} \tan \alpha \quad (6.12)$$

Indicando con A_{st} l'area di una staffa e con s il passo, l'area dell'armatura trasversale intersecata da una biella di altezza (relativamente alla sezione retta) unitaria è $A_{st}1/(s \tan \alpha)$; pertanto la forza ultima F_{st} equilibrata dall'armatura trasversale è $f_{yd} A_{st}/(s \tan \alpha)$. Uguagliando la forza resistente a quella agente data dall'eq. (6.10) si ottiene:

$$\frac{f_{yd} A_{st}}{s \tan \alpha} = \frac{M_{tu}}{2}$$

da cui, sostituendo ad M_{tu} il valore fornito dall'eq. (6.12) in funzione dell'area dell'armatura longitudinale, si ottiene:

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{A_l}{p} \tan^2 \alpha \quad (6.13)$$

Fissato il valore di α , che di solito si assume uguale a 45° , questa relazione consente di determinare il quantitativo di staffe occorrenti per equilibrare lo stesso momento ultimo sopportato dall'armatura longitudinale. Inversamente, se A_l ed A_{st} sono state fissate indipendentemente, l'eq. (6.13) permette di calcolare l'angolo di inclinazione delle fessure α per cui in fase ultima sussiste l'equilibrio tra le forze portate dall'armatura e dalle staffe:

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{A_{st}}{s} \frac{p}{A_l}} \quad (6.14)$$

sostituendo il valore di $\tan \alpha$ nell'eq. (6.12) si ottiene il momento torcente ultimo della sezione:

$$M_{tu} = 2 f_{yd} \sqrt{\frac{A_l A_{st}}{p s}} \quad (6.15)$$

Si osservi che A_l esprime anche il volume dell'armatura longitudinale presente in un concio di lunghezza unitaria; nello stesso concio il volume delle staffe è $A_{st}p/s$, avendo assimilato la lunghezza di una staffa con il perimetro p della linea mediana dello spessore della sezione cava fittizia. L'eq. (6.14) mostra che l'inclinazione delle bielle di calcestruzzo è data dalla radice del rapporto volumetrico delle staffe e dell'armatura longitudinale. Fissando il volume totale di armatura $V_{tot} = A_l + A_{st}p/s$, si può esprimere il quantitativo di staffe in funzione dell'area dell'armatura longitudinale: $A_{st}/s = (V_{tot} - A_l)/p$. Sostituendo tale relazione nell'eq. (6.15) si ottiene quindi:

$$M_{tu} = 2 f_{yd} \sqrt{A_l(V_{tot} - A_l)/p^2}$$

Annullando la derivata di questa espressione rispetto ad A_l si ottiene il quantitativo di armatura longitudinale che rende massimo il momento ultimo, per un assegnato quantitativo di armatura totale: facilmente si ricava: $A_l = V_{tot}/2$, a cui corrisponde un quantitativo di staffe $A_{st}/s = V_{tot}/2p$. Sostituendo queste espressioni nell'eq. (6.14) si ottiene quindi $\tan \alpha = 1$: si può concludere che il migliore utilizzo dell'armatura si raggiunge distribuendo ciascuna metà tra barre longitudinali e staffe, in accordo con l'eq. (6.11) quando si assume $\tan \alpha = 1$.

La forza di compressione C agente sulle bielle di calcestruzzo genera una tensione media σ_c che si ottiene dividendo la forza C per l'area della sezione normale della biella. Per una biella compresa tra due fessure poste a distanza unitaria, nella direzione normale all'asse della trave, quest'area è $1 \cos \alpha \bar{h}$; quindi utilizzando l'eq. (6.8) si ottiene:

$$\sigma_c = \frac{C}{1 \cos \alpha \bar{h}} = \frac{M_t}{2 \bar{h} \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{M_t}{\bar{h} \sin 2\alpha} \quad (6.16)$$

ed in particolare per $\alpha = 45^\circ$:

$$\sigma_c = \frac{M_t}{\bar{h}} \quad (6.17)$$

Il valore di σ_c dipende dallo spessore \bar{h} della sezione tubolare equivalente: esso non è ovviamente ben definito, in quanto la sezione tubolare è solo una astrazione di calcolo, a meno che la sezione non sia realmente cava. Il valore da adottarsi per \bar{h} è quindi convenzionale e deve essere scelto in modo tale che, ponendo σ_c uguale alla resistenza a compressione del calcestruzzo (eventualmente ridotta per tener conto delle approssimazioni del calcolo), le eq. (6.16) o (6.17) diano il valore del momento torcente ultimo di quelle travi che, dotate di forte armatura, collassano per schiacciamento del calcestruzzo. Relazioni empiriche di questo tipo sono fornite dalle norme.

6.4 Verifiche secondo le norme

6.4.1 Norme italiane

Calcolo alle tensioni ammissibili

Per la normativa italiana, quando la verifica degli elementi viene eseguita con il metodo delle tensioni ammissibili, la verifica relativa alla massima sollecitazione nel calcestruzzo si svolge con riferimento alla massima tensione tangenziale, τ_{mx} , calcolata nell'ipotesi di comportamento elastico del calcestruzzo con le relazioni che derivano dalla teoria di De Saint Venant. Per le sezioni rettangolari ad esempio si utilizza l'eq. (6.1). Questa tensione deve essere confrontata con i valori ammissibili $\bar{\tau}_{c0}$ e $\bar{\tau}_{c1}$ già utilizzate nella verifica alla sollecitazione di taglio. Se $\tau_{mx} \leq \bar{\tau}_{c0}$ il calcestruzzo è in grado di resistere all'azione torcente mediante la sua resistenza a trazione, quindi non è necessario prevedere un'armatura specifica oltre quella minima regolamentare. Quando $\bar{\tau}_{c0} < \tau_{mx} \leq \bar{\tau}_{c1}$ la trave può sopportare l'azione torcente purché si disponga un quantitativo adeguato di armatura. Se τ_{mx} supera $\bar{\tau}_{c1}$ il calcestruzzo compresso non è in grado di sopportare la sollecitazione e pertanto le dimensioni della sezione devono essere opportunamente aumentate.

Il calcolo delle armature, quando necessarie, si esegue con riferimento al modello a traliccio e sezione ideale cava descritto nella sezione precedente. Per determinare la sollecitazione nelle armature longitudinali e nelle staffe si utilizzano quindi le eq. (6.11) e (6.10). Indicando con A_l l'area totale dell'armatura longitudinale si dovrà verificare la condizione: $F_l = A_l \bar{\sigma}_s$, dove $\bar{\sigma}_s$ indica la tensione ammissibile dell'acciaio. Per l'eq. (6.11) si ha:

$$A_l \geq \frac{M_t}{2 \bar{\sigma}_s} p$$

avendo posto $\alpha = 45^\circ$ e quindi $\tan \alpha = 1$. Analogamente se A_{st} è l'area della sezione di una staffa ed s il passo, sempre per $\alpha = 45^\circ$, dalla condizione: $A_{st} \bar{\sigma}_s / s \geq F_{st}$ e facendo uso dell'eq. (6.10) si ottiene:

$$A_{st} \geq \frac{M_t}{2 \bar{\sigma}_s} s$$

Calcolo allo stato limite ultimo

Per la verifica allo stato limite di collasso degli elementi sottoposti a torsione, la normativa italiana fa riferimento al modello della sezione cava equivalente: pertanto le formule di verifica sono basate sulle equazioni stabilite nelle precedenti sezioni.

L'elemento risulta verificato se il momento agente di calcolo non supera la resistenza delle bielle compresse e delle armature. Per il calcolo del momento resistente delle bielle di calcestruzzo lo spessore \bar{h} della sezione cava equivalente viene stabilito nel modo seguente:

$$\bar{h} = \frac{d_e}{6} \quad (6.18)$$

in cui d_e indica il diametro del massimo cerchio iscritto nel poligono che ha per vertici i baricentri delle armature longitudinali, come illustrato in fig. (6.6). Per l'eq. (6.17), assumendo per la resistenza del calcestruzzo il valore $f_{cd}/2$, si ottiene:

$$M_{td} \leq \frac{1}{2} f_{cd} \bar{h} \quad (6.19)$$

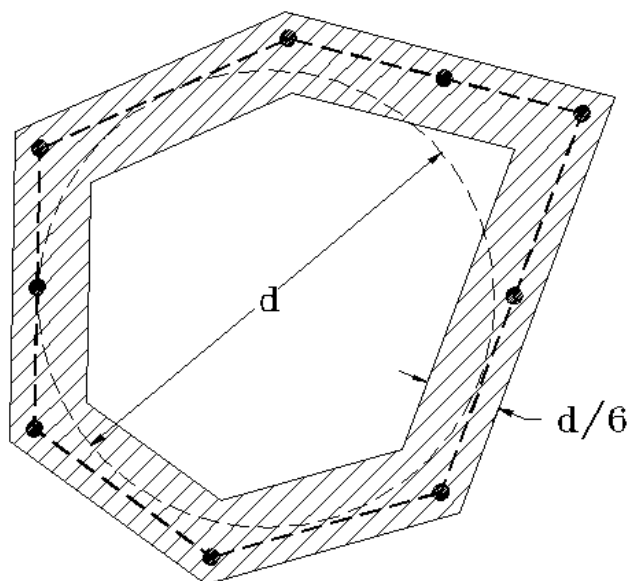


Figura 6.6: Determinazione dello spessore della sezione cava equivalente secondo le norme italiane

Il calcolo del momento ultimo relativo al cedimento delle armature longitudinali e delle staffe si esegue con le eq. (6.12) e (6.10). Ponendo $\alpha = 45^\circ$ risulta:

$$M_{td} \leq 2 \frac{A_l f_{yd}}{p}$$

$$M_{td} \leq 2 \frac{A_{st} f_{yd}}{s}$$

in cui i simboli hanno il significato illustrato nella sezione precedente.

6.4.2 Norme europee

Come per le altre sollecitazioni, in queste norme sono previste solamente le verifiche agli stati limite. Il modello di riferimento è ancora quello del traliccio tubolare.

Per il calcolo della resistenza delle bielle di calcestruzzo lo spessore della sezione cava equivalente si ottiene dalla relazione:

$$\bar{h} = \frac{\bar{A}_c}{\bar{p}}$$

in cui \bar{A}_c indica l'area della sezione racchiusa dal perimetro esterno, compresa quella di eventuali cavità, e \bar{p} è la lunghezza del suddetto perimetro. In ogni caso \bar{h} non può essere inferiore al doppio del copriferro delle barre longitudinali. Nel caso di travi a cassone di regola \bar{h} non deve superare lo spessore effettivo della parete. Applicando l'eq. (6.16) si ha pertanto:

$$M_{td} \leq M_{tu1} = \nu f_{cd} \bar{h} \sin 2\alpha \quad (6.20)$$

dove ν è un fattore di riduzione della resistenza del calcestruzzo:

$$\nu = 0.7 \left(0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \geq 0.35$$

con f_{ck} in N/mm^2 . Nel caso delle sezioni a cassone, quando le staffe sono disposte su entrambe le facce della parete, si può assumere $\nu = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5$.

Il momento resistente relativo all'armatura longitudinale si deriva dall'eq. (6.12):

$$M_{td} \leq M_{tu2} = 2 \frac{A_l f_{yd}}{p} \tan \alpha$$

e quindi l'area di staffe richiesta per equilibrare lo stesso momento è data dall'eq. (6.13):

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{A_l}{p} \tan^2 \alpha$$

Di regola si assume $\alpha = 45^\circ$. Quando le quantità delle armature longitudinali e delle staffe sono fissate indipendentemente, l'angolo α si deduce dalla condizione di uguaglianza dei momenti ultimi mediante l'eq. (6.14). Il valore di α deve comunque essere compreso tra: $0.4 \leq \cot \alpha \leq 2.5$. Se uno di questi limiti è superato si deve adottare quello più vicino.

6.4.3 Combinazione con flessione e taglio

Come è ovvio gli elementi sollecitati a torsione sono, nella maggior parte dei casi, simultaneamente soggetti alle azioni della flessione e del taglio. Certamente nelle strutture in cemento armato vi è una sensibile interazione tra queste sollecitazioni elementari, ma l'analisi teorica del problema presenta notevoli difficoltà ed i dati sperimentali non sono sufficienti a permettere di ricavare affidabili formulazioni empiriche. Pertanto le normative consentono a questo proposito delle drastiche semplificazioni.

Per la combinazione tra torsione e flessione generalmente non si tiene conto di alcuna interazione; l'armatura longitudinale richiesta per resistere al momento torcente si aggiunge a quella calcolata a flessione. Per le norme europee (EC2), nella parte compressa della sezione, quando la risultante delle forze di compressione dovute alla flessione supera la trazione che agisce sulla stessa zona a causa del momento torcente, è possibile omettere l'armatura longitudinale aggiuntiva.

Nella combinazione con la sollecitazione di taglio le armature d'anima (staffe) si calcolano separatamente per entrambe le sollecitazioni e quindi si sommano i quantitativi richiesti, con la condizione di utilizzare in entrambi i casi lo stesso valore dell'angolo α di inclinazione delle bielle.

Quando la verifica viene condotta con il metodo delle tensioni ammissibili, le norme italiane prescrivono che la tensione tangenziale massima agente sulla sezione, ottenuta sommando quelle dovute al taglio con quelle prodotte dalla torsione, non deve superare il valore ammissibile $\bar{\tau}_{c1}$ incrementato del 10%.

Nel caso si adotti il calcolo allo stato limite ultimo le stesse norme richiedono che sia verificata la condizione:

$$\frac{M_{td}}{M_{tu1}} + \frac{V_d}{V_{u2}} \leq 1 \quad (6.21)$$

in cui M_{td} e V_d sono il momento torcente ed il taglio di calcolo, M_{tu1} è il momento torcente ultimo relativo al collasso del calcestruzzo, dato dall'eq. (6.19), mentre V_{u2} è il taglio ultimo della sezione dovuto alla resistenza del calcestruzzo, che si calcola con l'eq. (5.20).

Il calcolo delle staffe si esegue separatamente ma si deve assumere $V_{cu} = 0$, ossia tutto lo scorrimento deve essere affidato alle armature d'anima.

Per le norme europee l'eq. (6.21) è sostituita dalla relazione analoga:

$$\left(\frac{M_{td}}{M_{tu1}}\right)^2 + \left(\frac{V_d}{V_{u2}}\right)^2 \leq 1$$

in cui i simboli hanno analogo significato, ma i valori ultimi del momento torcente e del taglio si calcolano, in accordo con le stesse norme, mediante le equazioni (6.20) e (5.24), rispettivamente.

Sempre secondo queste norme le armature di taglio e torsione si possono omettere (a meno dei minimi regolamentari) se sono verificate le due condizioni seguenti:

$$M_{td} \leq \frac{V_d b_w}{4.5}$$

$$V_d \left(1 + 4.5 \frac{M_d}{V_d b_w}\right) \leq V_{u1}$$

dove V_{u1} è il taglio resistente fornito dal secondo membro dell'eq. (5.24).

6.4.4 Esempio

Esempio 6.1 Progettare le armature della sezione rettangolare di dimensioni 35×50 cm² sollecitata a torsione.

Momento torcente in esercizio: $M_t = 20$ N/mm².

Calcestruzzo $R_{ck} = 30$ N/mm²

Acciaio FeB 44 k

Norme italiane

Verifica alle tensioni ammissibili.

Tensioni ammissibili:

$$\bar{\tau}_{c0} = 0.4 + \frac{30 - 15}{75} = 0.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{\tau}_{c1} = 1.4 + \frac{30 - 15}{35} = 1.83 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{\sigma}_s = 255 \text{ N/mm}^2$$

Tensione tangenziale massima nel calcestruzzo:

$$\tau_{max} = \psi \frac{M_t}{b^2 h} = 4.4 \frac{20 \times 10^6}{350^2 \times 500} = 1.44 \text{ N/mm}^2 < \bar{\tau}_{c1}$$

Calcolo delle armature:

$$= (350 - 60)(500 - 60) = 1.276 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

$$p = 2(290 + 440) = 1460 \text{ mm}$$

$$A_l = \frac{M_t}{2 \bar{\sigma}_s} p = \frac{20 \times 10^6}{2 \times 1.276 \times 10^5 \times 255} 1460 = 448.7 \text{ mm}^2 (\sim 4.5 \text{ cm}^2)$$

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{A_l}{p} = \frac{4.5}{1.46} = 3.08 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Calcolo allo stato limite ultimo.

Sollecitazione di calcolo:

$$M_{td} = \gamma_f M_t = 1.5 \times 20 = 30 \text{ kNm}$$

Resistenze di calcolo

$$f_{cd} = \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} = 15.56 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 374 \text{ N/mm}^2$$

Spessore equivalente della sezione tubolare:

$$\bar{h} = \frac{35}{6} = 5.83 \text{ cm}$$

Momento torcente ultimo per rottura del calcestruzzo:

$$M_{tu} = \frac{1}{2} f_{cd} \bar{h} = 57.87 \times 10^6 \text{ Nmm} (\sim 57.9 \text{ kNm}) > M_{td}$$

Armatura:

$$A_l = \frac{M_{td}}{2 f_{yd}} p = 458.9 \text{ mm}^2 (\sim 4.6 \text{ cm}^2)$$

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{A_l}{p} = 3.15 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Norme europee.

$$\bar{h} = \frac{35 \times 50}{2(35 + 50)} = 10.3 \text{ cm}$$

$$\nu = 0.7 \left(0.7 - \frac{24.9}{200} \right) = 0.403 \quad (f_{ck} = 0.83R_{ck} = 24.9 \text{ N/mm}^2)$$

$$M_{tu1} = \nu f_{cd} \bar{h} = 82.4 \text{ kNm} > M_{td}$$

Il calcolo delle armature è analogo a quello svolto per le norme italiane.

□

