

Capitolo 4

Sforzo normale e flessione

La condizione di sollecitazione più generale che produce tensioni normali è la combinazione di sforzo normale e flessione. La flessione semplice, esaminata nel capitolo precedente, ne è un caso particolare, ma, sia per la sua importanza, sia perché alcune relazioni degenerano per $N \rightarrow 0$ e quindi devono essere trattate in modo diverso, si è preferito esaminare separatamente e per primo il più semplice caso della flessione pura.

Le ipotesi elencate nella sez. 3.1 a proposito degli elementi inflessi si possono ovviamente estendere anche al caso della pressoflessione: continuano ad essere quindi valide la conservazione delle sezioni piane, la non resistenza del calcestruzzo teso e la perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo. Così, in caso di calcolo elastico, si può ancora far uso del concetto di sezione omogenizzata, composta dal calcestruzzo compresso e dalle barre di acciaio le cui aree sono amplificate del modulo n , come chiarito nel § 3.2.1.

Quando la sollecitazione è dovuta alla sola flessione una parte della sezione risulta sempre tesa: pertanto la sezione di calcestruzzo reagente non coincide mai con l'intera. Al contrario, quando è presente uno sforzo assiale la sezione può risultare totalmente compressa o tesa; quando ciò avviene il problema si semplifica sensibilmente perché la sezione di calcestruzzo risulta interamente reagente od assente e quindi la geometria della sezione efficace è nota a priori, come avviene per gli elementi realizzati con materiali isotropi.

4.1 Sforzo normale centrato

Un caso particolarmente semplice da analizzare è quello in cui la sollecitazione è tale da produrre un diagramma delle deformazioni uniforme. Il caso più frequente ed importante è quello in cui la sezione è compressa; quello in cui è tesa (trazione pura) si incontra assai meno di frequente e presenta degli aspetti peculiari soprattutto legati alla distribuzione delle fessure. Dal punto di vista della resistenza il problema è assai semplice e sarà trattato alla fine di questa sezione: qui si esamina il caso delle sollecitazioni che provocano la compressione uniforme dell'elemento.

La condizione che deve essere soddisfatta perché si abbia pressione centrata dipende dal tipo di analisi. Tenendo conto che tutta la sezione di calcestruzzo è reagente, in caso di comportamento elastico la risultante delle sollecitazioni deve passare per il baricentro della intera sezione omogenizzata, mentre in condizioni ultime deve coincidere con la risultante delle tensioni resistenti. Queste due condizioni sono generalmente diverse, salvo quando il baricentro delle armature coincide con quello della sezione di calcestruzzo. Poiché questa

situazione è abbastanza frequente e comunque non vi è di solito troppa differenza tra le due condizioni precedenti, nel seguito non si avrà cura di distinguerle tra loro.

In pratica è ben difficile che la compressione centrata possa esattamente realizzarsi: gli errori di centratura, la continuità tra gli elementi, i difetti di verticalità, sono fattori che introducono in ogni caso una sollecitazione di flessione che si aggiunge allo sforzo assiale. Tuttavia, quando l'eccentricità è piccola rispetto alle dimensioni della sezione, gli effetti della flessione si possono trascurare consentendo di studiare la sezione come se fosse soggetta a pressione centrata.

4.1.1 Calcolo elastico

La sezione, essendo uniformemente compressa, è interamente reagente, quindi l'area della sezione omogenizzata è:

$$A^* = A_c + nA_s$$

in cui A_c è l'area della sezione di calcestruzzo ed A_s è l'area totale delle armature. La tensione nel calcestruzzo si ottiene quindi immediatamente dall'equilibrio alla traslazione:

$$\sigma_c = \frac{N}{A^*} = \frac{N}{A_c + nA_s} \quad (4.1)$$

mentre la tensione nelle armature, ovviamente compresse, è semplicemente n volte quella del calcestruzzo, calcolata con l'eq. (4.1).

La verifica con il metodo delle tensioni ammissibili consiste nel controllare che la tensione nel calcestruzzo σ_c non superi il valore ammissibile ridotto $\bar{\sigma}_c$ dato dall'eq. (2.25).

Nel dimensionamento della sezione spesso ciò che viene fissato è la percentuale geometrica dell'armatura:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} \quad (4.2)$$

per cui dall'eq. (4.1), posto $\sigma_c = \bar{\sigma}_c$, si ottiene:

$$A_c = \frac{N}{\bar{\sigma}_c(1 + n\rho_s)} \quad (4.3)$$

Le norme impongono dei limiti al valore di ρ_s . Per i pilastri la normativa italiana prescrive che non deve superare 0.06 (6%) e non essere inferiore al maggiore dei seguenti due:

$$0.003 \quad 0.008 \frac{A_{c(min)}}{A_c}$$

in cui $A_{c(min)}$ è l'area di calcestruzzo strettamente necessaria; pertanto:

$$A_s \geq \frac{0.8 N}{100 \bar{\sigma}_c} \quad (4.4)$$

4.1.2 Calcolo allo stato limite ultimo

Essendo la sezione uniformemente compressa e l'acciaio deformato oltre il limite elastico, al collasso entrambi i materiali raggiungono la tensione resistente e quindi lo sforzo normale ultimo risulta:

$$A_c f_c + A_s f_y$$

Nelle verifiche si dovranno adottare i valori di calcolo delle resistenze; inoltre, in ottemperanza alle norme italiane, il coefficiente di sicurezza del calcestruzzo γ_c deve essere maggiorato del 25%, ciò che è equivalente a ridurre la tensione di calcolo di un fattore 0.8. Quindi lo sforzo normale ultimo (di progetto) si ottiene con la relazione:

$$N_u = 0.8\bar{f}_{cd}A_c + f_{yd}A_s \quad (4.5)$$

e la sezione è verificata se $N_u \geq N_d$.

Fissata la percentuale di armatura, il dimensionamento dell'area di calcestruzzo si ottiene dall'eq. (4.5) ponendo $N_u = N_d$:

$$A_c = \frac{N_d}{0.8\bar{f}_{cd} + \rho_s f_{yd}} \quad (4.6)$$

Anche per le sezioni calcolate a rottura devono essere soddisfatte le stesse limitazioni dei valori di ρ_s elencate prima nel paragrafo dedicato al calcolo elastico; tuttavia l'area strettamente necessaria ora è data dall'eq. (4.6) e quindi l'eq. (4.4) viene sostituita da:

$$A_s \geq \frac{0.8}{100} \frac{N_d}{0.8\bar{f}_{cd}} = \frac{N_d}{100f_{cd}} \quad (4.7)$$

4.1.3 Pilastri cerchiati

Per gli elementi in cui la sollecitazione prevalente è la compressione la maggior parte della forza è sopportata dal calcestruzzo, mentre l'armatura ha il ruolo complementare di conferire duttilità e resistenza a trazione all'elemento. Tuttavia in prossimità del collasso le barre, se non sono efficacemente trattenute da un'armatura trasversale (staffe), svergolando per carico di punta, possono distruggere la parte esterna della sezione, con effetti negativi sulla resistenza.

Il modo più efficace per aumentare la capacità portante delle sezioni compresse consiste quindi nel migliorare la resistenza del calcestruzzo: questo, come si è già visto, si può ottenere mediante il confinamento della sezione. Se in un pilastro di sezione circolare o poligonale si dispone un'armatura trasversale, generalmente realizzata mediante una spirale, con un passo sufficientemente fitto, grazie al meccanismo ad "arco" illustrato in fig. 4.1 l'effetto del contenimento esercitato dalle spire si estende anche alle zone intermedie, così che questa armatura svolge un'azione analoga a quella di un tubo che avvolgesse l'intero pilastro.

Quando il pilastro è compresso si manifesta una espansione trasversale, proporzionale alla contrazione assiale tramite il coefficiente di Poisson; questa deformazione, contrastata dall'armatura cerchiante, provoca nel pilastro una pressione radiale di confinamento σ_l . A sua volta sull'armatura agisce una sollecitazione opposta, che induce nella spirale una forza di trazione facilmente determinabile dalle condizioni di equilibrio:

$$F = \frac{1}{2}\sigma_l D s$$

in cui D è il diametro del nucleo cerchiato della sezione ed s è il passo della spirale.

La massima pressione di contenimento dipende dalla resistenza della spirale: uguagliando F alla forza che ne provoca lo snervamento si ottiene che la tensione di confinamento ultima è data da:

$$\sigma_l = \frac{2A_{sp}f_y}{D s} \quad (4.8)$$

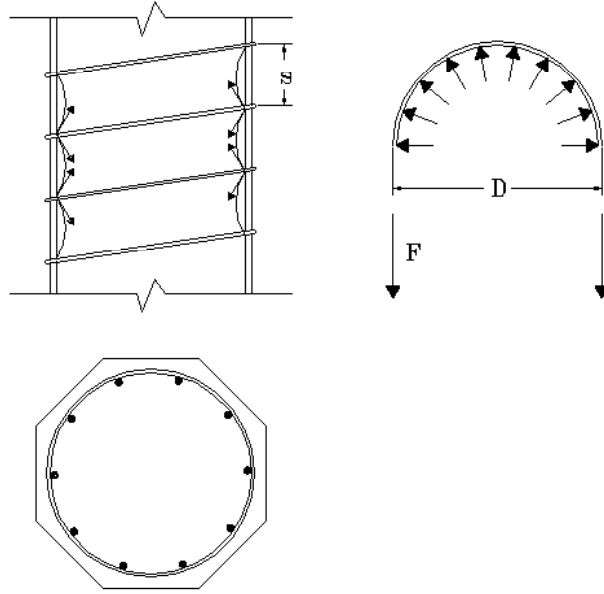


Figura 4.1: Schema del funzionamento di un pilastro cerchiato.

in cui A_{sp} è l'area della sezione dell'armatura a spirale.

Ricordando l'eq. (2.7), che dà la resistenza del calcestruzzo confinato in funzione della pressione di contenimento, e sostituendo a σ_l l'espressione (4.8), si ottiene:

$$f_{cc} = f_c + 8.2 \frac{A_{sp} f_y}{D_s}$$

Il valore di calcolo della resistenza del calcestruzzo confinato si ottiene dall'espressione precedente, interpretata come valore caratteristico, dividendola per il coefficiente γ_c (maggiorato del 25% poiché si tratta di pressione centrata) e moltiplicandola per 0.85. Poiché $f_{yk} = f_{yd} \gamma_s$, si ottiene:

$$f_{ccd} = \frac{0.85 f_{cc}}{1.25 \gamma_c} = 0.8 \bar{f}_{cd} + \frac{0.85}{1.25 \gamma_c} 8.2 \frac{A_{sp} f_{yd} \gamma_s}{D_s} = 0.8 \bar{f}_{cd} + 4 \frac{A_{sp} f_{yd}}{D_s}$$

in cui si è tenuto conto che, nelle norme italiane, $\gamma_c = 1.6$ e $\gamma_s = 1.15$.

Nei pilastri cerchiati si trascura il contributo del calcestruzzo esterno al nucleo confinato; infatti questo materiale è più fragile e meno resistente di quello interno, pertanto quando si giunge al collasso del nucleo è andato già distrutto e non può contribuire alla resistenza. Poiché l'area del nucleo è $A_{cc} = \pi D^2/4$, indicando con A_s l'area totale delle barre longitudinali, il carico ultimo del pilastro risulta:

$$N_u = A_{cc} f_{ccd} + A_s f_{yd} = 0.8 \bar{f}_{cd} \frac{\pi D^2}{4} + \left(\frac{\pi D}{s} A_{sp} + A_s \right) f_{yd} \quad (4.9)$$

Introducendo l'area equivalente:

$$A_s^* = A_{sp} \frac{\pi D}{s} \quad (4.10)$$

definita come l'area di una barra longitudinale equipesante alla spirale, l'eq. (4.9) si scrive:

$$N_u = 0.8\bar{f}_{cd} \frac{\pi D}{4} + (A_s^* + A_s) f_{yd} \quad (4.11)$$

L'equazione precedente è quella adottata dalle norme italiane per la verifica allo stato limite ultimo dei pilastri cerchiati.

Per i pilastri cerchiati devono essere inoltre rispettate le seguenti limitazioni:

$$s \leq \frac{D}{5}; \quad N_u \leq 2 \left(0.8\bar{f}_{cd} \frac{\pi D^2}{4} \right); \quad A_s^* \leq 2A_s \quad (4.12)$$

che, a parole, possono così indicarsi: il passo della spirale non deve superare un quinto del diametro del nucleo; il carico ultimo della sola sezione di calcestruzzo deve essere almeno la metà del carico ultimo totale, l'area dell'armatura longitudinale non può essere meno della metà di quella dell'armatura equivalente alla spirale.

Calcolo alle tensioni ammissibili

L'importanza dell'armatura cerchiante si evidenzia solo quando l'elemento è sollecitato fino al collasso, in fase elastica invece questa armatura non svolge alcun ruolo significativo. È questo uno dei casi in cui il calcolo alle tensioni ammissibili non può dedursi da un'analisi elastica dell'elemento, ma deve utilizzare, mediante opportuni aggiustamenti, delle relazioni derivate dal calcolo allo stato limite ultimo.

Per i pilastri cerchiati la verifica si esegue controllando che la tensione nel calcestruzzo non superi il valore ammissibile ridotto $\bar{\sigma}_c$. La tensione si calcola ancora mediante l'eq. (4.1), assumendo come area della sezione omogenizzata:

$$A^* = A_c + n(A_s + 3A_s^*) \quad (4.13)$$

in cui A_s^* è l'area dell'armatura longitudinale equivalente alla spirale data dall'eq. (4.10).

Anche in questo caso si applicano le limitazioni espresse nelle eq. (4.12), ma la seconda di queste è sostituita dalla seguente:

$$A^* \leq 2A_c$$

ossia l'area omogenizzata equivalente non può superare il doppio di quella del nucleo cerchiato.

Se si confrontano l'equazione per la verifica alle tensioni ammissibili (4.13) con quella a rottura (4.11) si osserva che mentre in quest'ultimo caso l'area dell'armatura equivalente alla spirale (A_s^*) è semplicemente sommata a quella longitudinale, nella verifica alle tensioni ammissibili è pesata con un fattore triplo.

Per spiegare questa anomalia si deve tenere presente che l'armatura, rispetto al calcestruzzo, ha un peso che, nel calcolo elastico, è dato dal coefficiente n (rapporto convenzionale tra i moduli), mentre nel calcolo a rottura è dato dal rapporto tra le resistenze di calcolo dei materiali ($f_{yd}/0.8\bar{f}_{cd}$). Mentre n viene assunto costante e pari a 15, quest'ultimo dipende dalle caratteristiche dei materiali impiegati. Se, ad esempio, si fissa: $R_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$, $f_{yk} = 430 \text{ N/mm}^2$, si ottiene $f_{yd}/0.8\bar{f}_{cd} = 42.4$, valore prossimo a $3n = 45$. Dunque il valore con cui, nel calcolo alle tensioni ammissibili della normativa italiana, viene pesata l'armatura a spirale, deriva dall'intento di conferire a questa armatura, approssimativamente, lo stesso peso che, rispetto al calcestruzzo, ha nel calcolo allo stato limite ultimo.

4.1.4 Trazione semplice

Sebbene gli elementi in cemento armato siano poco adatti all'impiego come tiranti, in certi casi può accadere che in alcuni elementi la sollecitazione prevalente sia uno sforzo normale di trazione.

Dal punto di vista della resistenza il problema è molto semplice in quanto la sezione di calcestruzzo, interamente tesa, non fornisce alcun contributo. La sezione resistente pertanto è costituita dalle sole armature e la sollecitazione produrrà una distribuzione uniforme delle deformazioni se la sua retta d'azione passa per il baricentro delle armature. In questo caso la tensione risulta uguale in tutte le barre e, per l'equilibrio, risulta:

$$N = A_s \sigma_s \quad (4.14)$$

in cui A_s e σ_s sono l'area totale e la tensione delle armature.

Se l'armatura è in campo elastico ($|\sigma_s| \leq f_{yd}$), dall'eq. (4.14) si calcola il valore di σ_s :

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \quad (4.15)$$

e quindi, se la sezione viene verificata con il metodo delle tensioni ammissibili, si dovrà controllare che $|\sigma_s| \leq \bar{\sigma}_s$.

Nel calcolo allo stato limite ultimo si deve determinare il carico di rottura della sezione; questo corrisponde alla condizione in cui l'acciaio raggiunge la tensione di plasticizzazione, pertanto nell'eq. (4.14) la tensione σ_s deve porsi uguale a quella di snervamento:

$$N_u = -A_s f_{yd} \quad (4.16)$$

dove il segno meno tiene conto della convenzione scelta di considerare negative le forze di trazione.

Anche se ovviamente deve essere verificata, la condizione di resistenza di solito non è quella vincolante. Infatti generalmente più critica è la condizione che limita l'ampiezza delle fessure nel calcestruzzo; ciò richiede di ridurre la tensione di esercizio dell'acciaio ovvero di progettare a rottura con coefficienti di sicurezza più elevati.

4.2 Sforzo normale eccentrico. Calcolo elastico

Si esamina ora la condizione di sollecitazione composta di sforzo normale e flessione, trattando separatamente i casi della compressione e della trazione.

Lo stato di sollecitazione viene individuato dalla forza normale N e dal punto P di coordinate x_P, y_P , detto centro di sollecitazione, intersezione della retta di azione di N con il piano della sezione. In alternativa la stessa sollecitazione può descriversi mediante N ed i due momenti baricentrici M_x, M_y relativi agli assi principali di inerzia della sezione. Tuttavia quest'ultima forma di rappresentazione può risultare ambigua in quanto non sempre il baricentro e gli assi principali della sezione omogenizzata coincidono con quelli della sezione di calcestruzzo e comunque certamente ne differiscono quando questa risulta parzializzata.

Nel seguito, nella parte dedicata al calcolo elastico, si farà di solito riferimento agli assi principali dell'intera sezione omogenizzata, che sono, quando la sezione è interamente compressa, gli assi principali della sezione reagente. Generalmente questi assi coincidono, o differiscono di poco, dagli assi della sezione geometrica.

4.2.1 Pressione eccentrica, piccola eccentricità

Si considera il caso che lo sforzo normale sia di compressione; se, con riferimento alla sezione omogenizzata, il centro di sollecitazione è interno al *nocciolo centrale di inerzia*, l'asse neutro è esterno alla sezione che pertanto risulta interamente compressa e dunque reagente. In questo caso le caratteristiche geometriche della sezione sono note a priori e per calcolare lo stato di tensione si possono utilizzare le relazioni che si ottengono applicando la sovrapposizione degli effetti, ben note dallo studio delle travi realizzate con materiali reagenti a trazione. Sempre con riferimento agli assi principali di inerzia, la tensione in un generico punto della sezione, di coordinate x, y è data dall'equazione:

$$\sigma_c = \frac{N}{A^*} + \frac{Nx_p}{I_y^*}x + \frac{Ny_p}{I_x^*}y \quad (4.17)$$

in cui x_p, y_p sono le coordinate del centro di sollecitazione e I_x^*, I_y^* i momenti d'inerzia della sezione omogenizzata.

La condizione perché la sezione risulti effettivamente tutta compressa è che le tensioni, calcolate con l'eq. (4.17), risultino positive in tutti i punti della sezione \mathcal{A} . Introducendo i giratori di inerzia della sezione $r_x^2 = I_y^*/A^*$ e $r_y^2 = I_x^*/A^*$, dall'eq. (4.17) si ottiene la condizione:

$$\frac{xx_p}{r_x^2} + \frac{yy_p}{r_y^2} + 1 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathcal{A}) \quad (4.18)$$

Uguagliando a zero questa espressione si stabilisce una corrispondenza di antipolarità rispetto all'ellisse centrale di inerzia tra il centro di sollecitazione e l'asse neutro. Il luogo degli antipoli delle tangenti alla frontiera di \mathcal{A} è la frontiera del nocciolo di inerzia. Ad esempio per una sezione rettangolare con armatura simmetrica dall'eq. (4.18) si ottiene che i punti del nocciolo sono individuati dalla disequazione:

$$\left| \frac{x_p}{x_0} \right| + \left| \frac{y_p}{y_0} \right| \leq 1 \quad (4.19)$$

in cui

$$x_0 = 2\frac{r_x^2}{b} \quad y_0 = 2\frac{r_y^2}{h}$$

sono, in valore assoluto, le coordinate dei vertici del nocciolo e b, h le dimensioni della sezione.

Esempio 4.1 Verificare la sezione rettangolare $b = 30$ cm, $h = 40$ cm, armata simmetricamente con $4\phi 22$, posti in prossimità dei vertici, alla distanza $c = 3.5$ cm dai bordi e sollecitata dalla forza assiale $N = 700$ kN, con centro di sollecitazione di coordinate $x_p = 3$ cm, $y_p = 2.5$ cm.

Caratteristiche geometriche della sezione:

$$A^* = 30 \times 40 + 15 \times 4 \times 3.8 = 1428 \text{ cm}^2$$

$$I_x^* = \frac{1}{12} 30 \times 40^3 + 15 \times 4 \times 3.8(20 - 3.5)^2 = 222073 \text{ cm}^4$$

$$I_y^* = \frac{1}{12} 40 \times 30^3 + 15 \times 4 \times 3.8(15 - 3.5)^2 = 120153 \text{ cm}^4$$

Raggi di inerzia:

$$r_x^2 = \frac{I_y^*}{A^*} = 84.14 \text{ cm}^2 \quad r_y^2 = \frac{I_x^*}{A^*} = 155.5 \text{ cm}^2$$

Vertici del nocciolo:

$$x_0 = 2\frac{r_x^2}{b} = 5.61 \text{ cm} \quad y_0 = 2\frac{r_y^2}{h} = 7.77 \text{ cm}$$

per cui applicando l'eq. (4.19) risulta:

$$\left| \frac{x_p}{x_0} \right| + \left| \frac{y_p}{y_0} \right| = 0.856 < 1$$

e quindi la sezione è interamente compressa.

Le tensioni si calcolano con l'eq. (4.17); il punto dove la sollecitazione è massima è lo spigolo di coordinate $(b/2, h/2)$, per cui si ha:

$$\sigma_{c(max)} = 700000 \left(\frac{1}{1428} + \frac{2.5 \times 20}{222073} + \frac{3 \times 15}{120153} \right) = 910 \text{ N/cm}^2 = 9.1 \text{ N/mm}^2$$

La tensione minima si ha nello spigolo opposto, dove risulta $\sigma_c = 0.70 \text{ N/mm}^2$. \square

4.2.2 Grande eccentricità. Pressoflessione retta

Quando il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo (per le sezioni rettangolari le sue coordinate non verificano la disuguaglianza (4.19)), l'asse neutro taglia la sezione che risulta parzializzata e, come nel caso della flessione, la sezione reagente non è a priori determinata.

Se la sezione ha un asse di simmetria ed il centro di sollecitazione è uno dei suoi punti l'asse neutro è ortogonale a questo asse, e la sua giacitura dunque è nota; questo, come già fu visto per la flessione, semplifica il problema che tuttavia si può trattare in forma analitica solo per sezioni dalla geometria semplice. Anche qui il caso più elementare e di maggior interesse pratico è quello delle sezioni rettangolari.

Se y è l'asse di simmetria su cui giace il centro di sollecitazione P , si indichi con u la distanza di P dal bordo compresso della sezione, considerata positiva quando P è esterno alla sezione, con y_p la distanza di P dall'asse neutro e con y_c l'altezza della zona compressa, come illustrato in fig. (4.2), in modo tale che si ha:

$$y_p = y_c + u \quad (4.20)$$

Con riferimento all'asse x' perpendicolare ad y e passante per P , la condizione di equilibrio alla rotazione della sezione richiede che:

$$\int_{A^*} \sigma y' dA = 0$$

dove y' indica la distanza di un punto generico della sezione dall'asse x' . Se y è la distanza dello stesso punto dall'asse neutro, si avrà ovviamente $y = y_p - y'$. Tenendo presente che, per la linearità del diagramma delle tensioni, si può porre $\sigma = \theta y$, dall'equazione precedente si ottiene:

$$y_p \int_{A^*} y' dA - \int_{A^*} y'^2 dA = 0$$

che, sinteticamente, si può scrivere:

$$y_p S_{x'}^* - I_{x'}^* = 0 \quad (4.21)$$

in cui $S_{x'}^*$ e $I_{x'}^*$ sono il momento statico e quello d'inerzia della sezione reagente omogenizzata, riferiti all'asse x' .

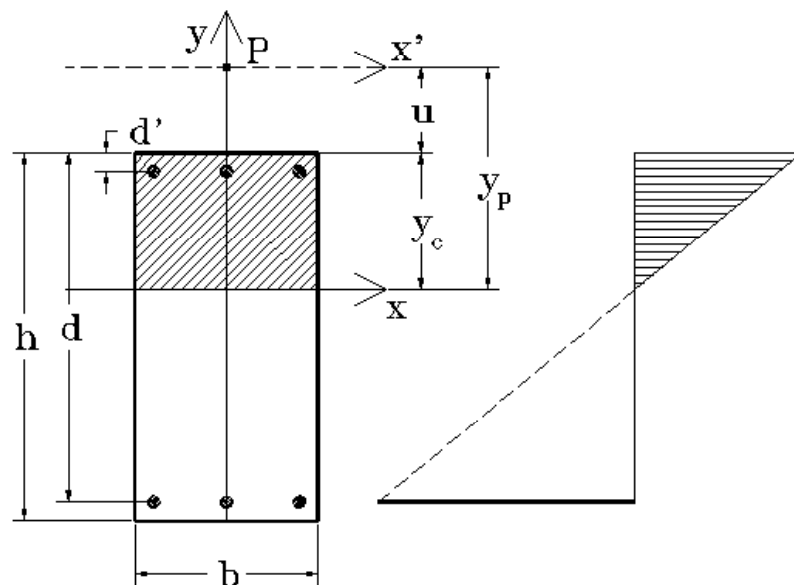


Figura 4.2: Sezione rettangolare soggetta a pressoflessione retta

Sezione rettangolare

Per una sezione rettangolare l'espressione esplicita di $S_{x'}^*$ e $I_{x'}^*$ è semplice:

$$S_{x'}^* = \frac{1}{2}b(y_p^2 - u^2) + n \sum_{i=1}^m A_{si}(d_i + u)$$

$$I_{x'}^* = \frac{1}{3}b(y_p^3 - u^3) + n \sum_{i=1}^m A_{si}(d_i + u)^2$$

Sostituendo queste espressioni nell'eq. (4.21) e riordinando i termini in funzione dell'unica incognita (y_p) che vi compare, si ottiene l'equazione cubica:

$$y_p^3 + \left[\frac{6n}{b} \sum_{i=1}^m A_{si}(d_i + u) - 3u^2 \right] y_p - \left[\frac{6n}{b} \sum_{i=1}^m A_{si}(d_i + u)^2 - 2u^3 \right] = 0$$

che si può scrivere in modo compatto:

$$y_p^3 + py_p - q = 0 \quad (4.22)$$

dove i coefficienti p e q dipendono dalla geometria della sezione, dalle armature e dalla posizione del centro di sollecitazione:

$$\begin{aligned} p &= \frac{6n}{b} \sum_{i=1}^m A_{si}(d_i + u) - 3u^2 \\ q &= \frac{6n}{b} \sum_{i=1}^m A_{si}(d_i + u)^2 - 2u^3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

La soluzione dell'equazione cubica (4.22) è nota in forma esplicita:

$$y_p = \frac{-p}{3 \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \right)^{1/3}} + \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \right)^{1/3} \quad (4.24)$$

In alternativa l'eq. (4.22) si può risolvere abbastanza rapidamente mediante un procedimento numerico iterativo.

Dal valore di y_p si determina quindi l'altezza della zona compressa $y_c = y_p - u$. Individuata la posizione dell'asse neutro la sezione reagente risulta definita e quindi si può procedere al calcolo delle sollecitazioni. L'uso dell'eq. (4.17) è tuttavia poco pratico, in quanto richiede di trasferire il riferimento nel baricentro della sezione reagente. Risulta più comodo utilizzare l'equazione monomia che si ricava dall'equilibrio alla traslazione:

$$\int_{A^*} \sigma dA = \theta \int_{A^*} y dA = \theta S_n^* = N$$

in cui si è fatto uso della relazione lineare $\sigma = \theta y$ e si è indicato con S_n^* il momento statico della sezione omogenizzata relativamente all'asse neutro. Risolvendo l'equazione rispetto a θ e sostituendo la soluzione nell'espressione di σ si ha:

$$\sigma_c = \frac{N}{S_n^*} y \quad (4.25)$$

I valori delle tensioni nell'acciaio si ottengono con una relazione analoga amplificata del fattore n :

$$\sigma_{si} = n \frac{N}{S_n^*} (y_c - d_i)$$

Per le sezioni rettangolari il momento statico relativo all'asse neutro è dato da:

$$S_n^* = \frac{1}{2} b y_c^2 + n \sum_{i=1}^m A_{si} (y_c - d_i)$$

Dimensionamento della sezione

Il problema di determinare le dimensioni ed il quantitativo di armatura di una sezione in cemento armato a partire dalle sollecitazioni presenta, nel caso della pressoflessione, un grado di indeterminazione maggiore di quello relativo alla flessione semplice. Infatti, quando non esistono vincoli di altra natura, le dimensioni "ottimali" di una sezione inflessa sono ovviamente quelle per cui entrambi i materiali lavorano alla massima tensione consentita; pertanto si dispone di due equazioni che permettono di calcolare l'area dell'armatura e una dimensione della sezione in calcestruzzo. Nel caso della sollecitazione di pressoflessione la tensione nell'armatura dipende anche dall'eccentricità del carico. Tenendo ferme le altre condizioni, al diminuire dell'eccentricità la tensione nell'acciaio diminuisce finché, se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo, l'armatura risulta compressa; è evidente che per eccentricità che portano il centro di sollecitazione di poco fuori il nocciolo la tensione nell'acciaio teso sarà piccola.

Da queste considerazioni segue che il valore di progetto della tensione nell'armatura non sempre potrà coincidere con la tensione ammissibile dell'acciaio; se l'eccentricità non

è molto grande, relativamente alle dimensioni della sezione, sarà conveniente assumere un valore minore, tanto più piccolo quanto più è piccola l'eccentricità.

In generale al crescere del valore di progetto della tensione dell'acciaio si ottengono soluzioni, se esistono, con sezioni più grandi e meno armate. L'inverso avviene se la tensione viene ridotta. Pertanto spesso è necessario procedere per tentativi, fissando diversi valori di σ_s (ovviamente non superiori a $\bar{\sigma}_s$), fino a trovare una soluzione ragionevole, ossia una sezione non troppo grande e non troppo armata.

Fissate le tensioni di esercizio del calcestruzzo e dell'acciaio è possibile sviluppare delle formule di progetto analoghe a quelle valide per la sollecitazione di sola flessione. La tensione nel calcestruzzo si assumerà ovviamente uguale al suo valore ammissibile mentre per quella dell'acciaio si dovrà tener conto delle considerazioni precedenti. Indicando con σ_{cm} la tensione massima nel calcestruzzo e con σ_s e σ'_s i valori assoluti delle tensioni nell'acciaio teso e compresso e supponendo la sezione *armata simmetricamente* ($A'_s = A_s$), il fattore $K = y_c/d$ e la tensione nell'armatura compressa sono noti:

$$K = \frac{n\sigma_{cm}}{n\sigma_{cm} + \sigma_s} \quad \sigma'_s = n \frac{K - \delta}{K} \sigma_{cm} \quad (4.26)$$

dove $\delta = d'/d$. A rigore questa quantità, dipendendo dall'altezza utile della sezione, che è incognita, a sua volta non è nota; ma non avendo eccessiva influenza sulla soluzione può fissarsi, in modo approssimato, a priori.

Indicando con h l'altezza della sezione, per la sua simmetria si ha $h = d + d'$; quindi le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$N = \frac{1}{2}bdK\sigma_{cm} + A_s(\sigma'_s - \sigma_s)$$

$$Ne = \frac{1}{2}bd^2K\sigma_{cm} \left(\frac{1 + \delta}{2} - \frac{K}{3} \right) + A_s d \frac{1 - \delta}{2} (\sigma'_s + \sigma_s)$$

In queste equazioni le incognite sono l'altezza utile d e l'area delle due armature A_s , in quanto la larghezza b si intende fissata e le altre grandezze sono dei dati o si calcolano mediante le eq. (4.26).

Eliminando A_s tra le equazioni precedenti si ottiene un'equazione in d :

$$\frac{d^2}{\alpha} - 2\frac{N}{b}d - \frac{N}{b}e\beta = 0$$

dove:

$$\beta = -4 \frac{\sigma'_s - \sigma_s}{(1 - \delta)(\sigma'_s + \sigma_s)}$$

$$\alpha = \left\{ K\sigma_{cm} \left[1 + \left(\frac{1 + \delta}{2} - \frac{K}{3} \right) \frac{\beta}{2} \right] \right\}^{-1} \quad (4.27)$$

da cui si ottiene l'espressione di d :

$$d = \alpha \left[\frac{N}{b} + \sqrt{\left(\frac{N}{b} \right)^2 + \frac{N}{b} e \frac{\beta}{\alpha}} \right] \quad (4.28)$$

Determinato d il quantitativo necessario di armatura si ottiene risolvendo rispetto ad A_s una delle due equazioni di equilibrio. Per esempio dalla seconda si ottiene:

$$A_s = \frac{2Ne/d - bdK\sigma_{cm} \left(\frac{1 + \delta}{2} - \frac{K}{3} \right)}{(1 - \delta)(\sigma'_s + \sigma_s)} \quad (4.29)$$

$$\delta = 0.05$$

σ_s N/mm ²	$\sigma_c = 7.25$ N/mm ²		$\sigma_c = 8.5$ N/mm ²		$\sigma_c = 9.75$ N/mm ²		$\sigma_c = 11$ N/mm ²	
	α	β	α	β	α	β	α	β
15	2.4675	-3.1361	2.0924	-3.2774	1.8151	-3.3859	1.6020	-3.4718
35	2.5321	-2.0523	2.1517	-2.3013	1.8690	-2.4988	1.6506	-2.6593
55	2.5553	-1.2332	2.1723	-1.5391	1.8888	-1.7880	1.6701	-1.9945
75	2.5811	-0.5925	2.1883	-0.9275	1.9007	-1.2057	1.6803	-1.4404
95	2.6195	-0.0775	2.2102	-0.4258	1.9144	-0.7199	1.6899	-0.9717
115	2.6705	0.3454	2.2403	-0.0069	1.9330	-0.3086	1.7020	-0.5698
135	2.7323	0.6989	2.2781	0.3482	1.9571	0.0443	1.7179	-0.2216
155	2.8028	0.9988	2.3226	0.6531	1.9863	0.3503	1.7376	0.0831
175	2.8801	1.2564	2.3727	0.9176	2.0198	0.6183	1.7607	0.3520
195	2.9630	1.4801	2.4273	1.1493	2.0572	0.8548	1.7869	0.5910
215	3.0503	1.6762	2.4857	1.3539	2.0977	1.0651	1.8158	0.8048
235	3.1412	1.8494	2.5472	1.5360	2.1409	1.2533	1.8470	0.9972
255	3.2351	2.0036	2.6113	1.6990	2.1863	1.4228	1.8801	1.1713

$$\delta = 0.10$$

σ_s N/mm ²	$\sigma_c = 7.25$ N/mm ²		$\sigma_c = 8.5$ N/mm ²		$\sigma_c = 9.75$ N/mm ²		$\sigma_c = 11$ N/mm ²	
	α	β	α	β	α	β	α	β
15	2.6940	-3.2473	2.3011	-3.4048	2.0072	-3.5257	1.7793	-3.6214
35	2.6186	-2.0397	2.2521	-2.3172	1.9754	-2.5372	1.7587	-2.7160
55	2.5490	-1.1271	2.1948	-1.4680	1.9296	-1.7453	1.7225	-1.9753
75	2.5137	-0.4132	2.1570	-0.7865	1.8939	-1.0965	1.6906	-1.3580
95	2.5093	0.1606	2.1405	-0.2275	1.8728	-0.5552	1.6685	-0.8357
115	2.5281	0.6318	2.1416	0.2393	1.8650	-0.0969	1.6563	-0.3880
135	2.5639	1.0256	2.1565	0.6349	1.8681	0.2963	1.6529	0.0000
155	2.6124	1.3598	2.1819	0.9745	1.8801	0.6373	1.6567	0.3395
175	2.6704	1.6468	2.2155	1.2693	1.8990	0.9358	1.6665	0.6391
195	2.7357	1.8961	2.2554	1.5274	1.9235	1.1993	1.6812	0.9053
215	2.8065	2.1145	2.3004	1.7554	1.9525	1.4336	1.6998	1.1436
235	2.8818	2.3075	2.3494	1.9583	1.9851	1.6434	1.7216	1.3580
255	2.9607	2.4793	2.4016	2.1399	2.0207	1.8322	1.7462	1.5520

Tabella 4.1: Coefficienti per il progetto delle sezioni pressoinflesse con armatura simmetrica. Unità di misura: kN – cm.

I coefficienti α e β dipendono dalle tensioni di esercizio dei materiali e dal coefficiente δ ; i loro valori, per certi intervalli frequenti dei parametri, sono riportati nelle tabelle 4.1.

Verificare la sezione rettangolare con dimensioni $b = 30$ cm, $h = 50$ cm, $d' = 3$ cm, con armatura simmetrica $A_s = A'_s = 2\phi 20 + 2\phi 22 = 13.9$ cmq, sollecitata a pressione eccentrica:

$$N = 350 \text{ kN} \quad e = 34 \text{ cm}$$

prevedendo l'impiego dei seguenti materiali:

Esempio 4.2 Calcestruzzo $R_{ck} = 25$ N/mm² $\bar{\sigma}_c = 8.5$ N/mm²
 Acciaio FeB 38 k $\bar{\sigma}_s = 215$ N/mm²

Poiché si ha:

$$u = e - h/2 = 34 - 25 = 9 \text{ cm}$$

per le equazioni (4.23) i coefficienti p e q valgono:

$$p = \frac{6 \times 15}{30} 13.9(12 + 56) - 3 \times 9^2 = 2592.6$$

$$q = \frac{6 \times 15}{30} 13.9(12^2 + 56^2) - 2 \times 9^3 = 135318$$

quindi applicando l'eq. (4.24) si ottiene:

$$y_p = \frac{-2592.6}{3 \times 51.916} + 51.916 = 35.27 \text{ cm}$$

L'altezza della zona compressa risulta:

$$y_c = y_p - u = 35.27 - 9 = 26.27 \text{ cm}$$

Il momento statico rispetto all'asse neutro della sezione omogenizzata è:

$$S_n^* = \frac{1}{2} 30 \times 26.27^2 + 15 \times 13.9(23.27 - 20.73) = 10882 \text{ cm}^3$$

e quindi le tensioni massime nel calcestruzzo e nell'acciaio risultano:

$$\sigma_c = \frac{350}{10882} 26.27 = 0.845 \text{ kN/cm}^2 = 8.45 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 15 \frac{350}{10882} (26.27 - 47) = -10.00 \text{ kN/cm}^2 = -100.0 \text{ N/mm}^2$$

□

Esempio 4.3 Determinare le dimensioni di una sezione rettangolare idonea a sopportare la seguente sollecitazione:

$$N = 500 \text{ kN} \quad e = 40 \text{ cm}$$

supponendo l'impiego dei seguenti materiali:

Calcestruzzo	$R_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$	$\bar{\sigma}_c = 9.75 \text{ N/mm}^2$
Acciaio	FeB 38 k	$\bar{\sigma}_s = 215 \text{ N/mm}^2$

Si assume $b = 30 \text{ cm}$ e $\sigma_{cm} = \bar{\sigma}_c = 9.75 \text{ N/mm}^2$. Per $\sigma_s = \bar{\sigma}_s = 225 \text{ N/mm}^2$ e $\delta = 0.05$, dalle tabelle 4.1 si ottiene:

$$\alpha = 2.1193 \quad \beta = 1.1592$$

che, sostituiti nell'eq. (4.28), forniscono $d = 89.04 \text{ cm}$. A questo valore dell'altezza utile corrisponde $\delta = d'/d = 3/89 = 0.034$; applicando le eq. (4.26) e (4.29) si ottiene quindi:

$$K = 0.3939 \quad \sigma'_s = 134,1 \text{ N/mm}^2 \quad A_s = 1.6 \text{ cm}^2$$

La sezione così ottenuta ha una percentuale di armatura molto piccola. È preferibile ridurre la tensione di esercizio dell'acciaio: ponendo $\sigma_s = 155 \text{ N/mm}^2$, dalle tabelle 4.1 ($\delta = 0.05$) si ottengono i coefficienti:

$$\alpha = 1.9863 \quad \beta = 0.3503$$

da cui segue:

$$d = 72.6 \text{ cm} \sim 73 \text{ cm}$$

$$K = 0.4855 \quad \delta = 3/73 = 0.041 \quad \sigma'_c = 133.9 \text{ N/mm}^2$$

$$A_s = 6.35 \text{ cm}^2$$

Per $\sigma_s = 115 \text{ N/mm}^2$ e $\delta = 0.05$ risulta:

$$\alpha = 1.933 \quad \beta = -0.3086$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} d &= 57.5 \text{ cm} \sim 57 \text{ cm} \\ K &= 0.5598 \quad \delta = 3/57 = 0.053 \quad \sigma'_s = 132.5 \text{ N/mm}^2 \\ A_s &= 16.4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

□

Esempio 4.4 Verificare l'ultima soluzione dell'esercizio precedente ($b = 30 \text{ cm}$ $h = 60 \text{ cm}$).

$$\begin{aligned} u &= e - h/2 = 10 \text{ cm} \\ p &= 3636 \quad q = 227173 \\ y_p &= \frac{-3636}{3 \times 61.689} + 61.689 = 42.04 \text{ cm} \quad y_c = 32.04 \text{ cm} \\ S_n^* &= 16405 \text{ cm}^3 \\ \sigma_c &= 9.76 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_s = -114 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

□

4.2.3 Trazione eccentrica

Anche quando lo sforzo normale esercita trazione è opportuno distinguere il caso in cui l'asse neutro è esterno (piccola eccentricità) da quello in cui attraversa la sezione (grande eccentricità).

Piccola eccentricità

Quando il centro di sollecitazione della forza di trazione coincide con il baricentro delle armature la sezione risulta uniformemente tesa e quindi la sezione reagente è formata dalla sola parte in acciaio. Se il centro di sollecitazione si allontana dal baricentro la sezione resta interamente tesa fin quando P rimane all'interno del nocciolo della sezione reagente, cioè delle sole armature. L'equazione del nocciolo è ancora l'eq. (4.18), ma i raggi di inerzia r_x ed r_y si riferiscono solo all'armatura:

$$r_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m A_{si} x_i^2}{\sum_{i=1}^m A_{si}} \quad r_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^m A_{si} y_i^2}{\sum_{i=1}^m A_{si}}$$

in cui x_i, y_i sono le coordinate, relative al baricentro, della barra di area A_{si} .

Per le sezioni rettangolari con armatura simmetrica il nocciolo ha la forma romboidale espressa dall'eq.(4.19). Se l'armatura è disposta nei vertici della figura si ha:

$$r_x = \frac{b}{2} - c_x \quad r_y = \frac{h}{2} - c_y$$

dove c_x, c_y sono le distanze delle armature dai bordi della sezione. Se $c_x \ll b$ e $c_y \ll h$ si può porre:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \frac{r_x^2}{b} \simeq \frac{b}{2} - 2c_x \\ y_0 &= 2 \frac{r_y^2}{h} \simeq \frac{h}{2} - 2c_y \end{aligned}$$

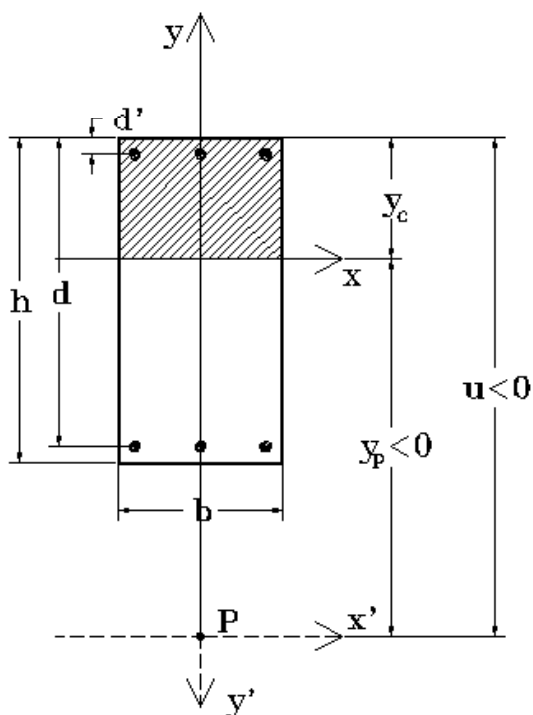


Figura 4.3: Sezione rettangolare sollecitata da tensoflessione retta

Dunque i vertici del nocciolo distano dal perimetro delle armature delle quantità c_x e c_y .

Come nel caso della compressione, finché il centro di sollecitazione non è esterno al nocciolo la sezione reagente è nota a priori, pertanto le tensioni (nelle barre di acciaio) si calcolano con l'eq. (4.17), in cui A^* , I_x^* e I_y^* sono l'area ed i momenti di inerzia della sola armatura.

Grande eccentricità

Nel caso di pressione eccentrica, per $e \rightarrow \infty$ ed $N \rightarrow 0$ in modo tale che $M = Ne$ resti costante, la sollecitazione tende alla flessione pura. Cambiando il segno di N ed e si ottiene una sollecitazione di trazione che produce lo stesso momento; perciò, per N molto piccolo, le tensioni nella sezione praticamente non cambiano. Avvicinando il centro di pressione al baricentro e facendo crescere (in valore assoluto) N , si ottiene una sollecitazione di trazione e flessione per la quale lo stato di tensione nella sezione rimane dello stesso tipo. Quindi, per la trazione di grande eccentricità, il bordo della sezione maggiormente compresso è quello più distante dal centro di sollecitazione, come illustrato in fig. 4.3.

Pertanto, adottando le stesse convenzioni usate nel § 4.2.2, risulta $u < 0$ e $y_p < 0$, ove u ed y_p indicano, come in precedenza, la distanza del centro di sollecitazione dal lembo compresso e dall'asse neutro, rispettivamente. Con queste precisazioni l'eq. (4.21), derivata dall'equilibrio intorno al centro di sollecitazione P , è ancora valida e altrettanto lo sono le equazioni (4.22) e (4.23) ottenute per le sezioni rettangolari. Quindi le tensioni si possono calcolare applicando l'eq. (4.25), tenendo conto ovviamente che ora $N < 0$. Si deve invece osservare che in questo caso l'eq. (4.24) non è più utilizzabile, in quanto non fornisce la radice utile (negativa) dell'equazione cubica (4.22). Le altre due radici di

questa equazione hanno forma generale complessa; anche se la parte immaginaria delle soluzioni alla fine scompare, il loro uso è poco pratico. Risulta più semplice utilizzare un procedimento numerico iterativo.

Esempio 4.5 Determinare le tensioni massime prodotte nella sezione rettangolare di base $b = 25$ cm e altezza $h = 60$ cm, armata con $4\phi 20$ poste alla distanza $c = 3$ cm dai bordi, dalla forza di trazione $N = -100$ kN con eccentricità $e = -60$ cm dal centro della sezione.

La distanza del centro di sollecitazione dal lembo della sezione è:

$$u = e - \frac{h}{2} = -60 - 30 = -90 \text{ cm}$$

Dall'eq. (4.23) si ottengono i valori di p e q :

$$p = \frac{6 \times 15}{25} [6.28(3 - 90) + 6.28(57 - 90)] - 3(-90)^2 = -27013$$

$$q = \frac{6 \times 15}{25} 6.28(87^2 + 33^2) - 2(-90)^3 = 1653740$$

La soluzione dell'eq.(4.22), ottenuta con un procedimento numerico iterativo, è quindi $y = -80.36$ cm; di conseguenza:

$$y_c = y_p - u = -80.36 + 90 = 9.64 \text{ cm}$$

quindi il momento statico della sezione reagente risulta:

$$S_n^* = -2674.2 \text{ cm}^3$$

e le tensioni massime di compressione e trazione:

$$\sigma_c = \frac{-100}{-2674.2} \times 9.64 = 0.36 \text{ kn/cm}^2 = 3.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 15 \frac{-100}{-2674.2} (9.64 - 57) = -26.56 \text{ kn/cm}^2 = -265.6 \text{ N/mm}^2$$

□

4.2.4 Sezioni di forma arbitraria

Per le sezioni di forma più complessa della rettangolare non è utile sviluppare relazioni analitiche in forma chiusa, del tipo dell'eq. (4.22). In questi casi è preferibile utilizzare un algoritmo numerico con cui trattare sezioni di ogni forma, purché simmetrica, sollecitate a pressoflessione retta.

Il calcolo dei momenti statico e d'inerzia che compaiono nell'eq. (4.21) si può svolgere agevolmente dividendo la sezione in strisce sottili, parallele all'asse neutro, approssimando gli integrali con sommatorie. In modo analogo a quanto fatto nel caso della flessione, indicando con η_i la distanza di una striscia dal lembo compresso della sezione, le espressioni del momento statico e del momento d'inerzia relativamente al centro di sollecitazione sono

espresse dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
 S_{x'}^* &= \int_{A^*} y' dA = \int_0^{y_c} b(\eta)(u + \eta) d\eta + n \sum_{i=1}^m A_{si}(u + d_i) \simeq \\
 &\simeq \sum_j b(\eta_j)(u + \eta_j)\Delta\eta_j + n \sum_{i=1}^m A_{si}(u + d_i) \\
 I_{x'}^* &= \int_{A^*} y'^2 dA = \int_0^{y_c} b(\eta)(u + \eta)^2 d\eta + n \sum_{i=1}^m A_{si}(u + d_i)^2 \simeq \\
 &\simeq \sum_j b(\eta_j)(u + \eta_j)^2 \Delta\eta_j + n \sum_{i=1}^m A_{si}(u + d_i)^2
 \end{aligned}$$

in cui le somme si estendono a tutte le strisce compresse, ossia fin quanto non risulta:

$$y_c = \frac{I_{x'}^*}{S_{x'}^*} - u \simeq \eta_k + \frac{\Delta\eta_k}{2}$$

k essendo l'indice dell'ultima striscia inclusa nella somma.

Il procedimento è illustrato nell'esempio seguente.

Esempio 4.6 Determinare le tensioni massime indotte da una forza di compressione normale di intensità $N = 100$ kN ed un momento $M = 6$ kNm su di una sezione ellittica con assi 25×40 cm con armatura simmetrica $A_s = A'_s = 3\phi 20 = 9.42$ cm² disposta in corrispondenza dell'asse maggiore a 17 cm dal baricentro, quando il centro di sollecitazione appartiene all'asse maggiore della sezione. Rispetto al baricentro la forza assiale agisce con un'eccentricità $e = M/N = 60$ cm. Quindi:

$$u = 60 - 40/2 = 40 \text{ cm}$$

L'area, il momento statico ed il momento d'inerzia dell'armatura, relativamente al centro di sollecitazione, sono:

$$\begin{aligned}
 A_s &= 2 \times 9.42 = 18.84 \text{ cm}^2 \\
 S_s &= 9.42(43 + 77) = 1130.4 \text{ cm}^3 \\
 I_s &= 9.42(43^2 + 77^2) = 73268.7 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

Dividendo la sezione in strisce di altezza $\Delta\eta = 1$ cm si può quindi costruire la tabella 4.2

In questa tabella i termini della prima riga si riferiscono alla sola armatura omogenizzata e quelli delle righe successive si ottengono aggiungendo ai corrispondenti della riga precedente i contributi della striscia in esame. Più precisamente:

$$\begin{aligned}
 A_i^* &= A_{i-1}^* + b(\eta_i)\Delta\eta_i \\
 S_i^* &= S_{i-1}^* + b(\eta_i)\Delta\eta_i y'_i \\
 I_i^* &= I_{i-1}^* + b(\eta_i)\Delta\eta_i y_i'^2
 \end{aligned}$$

Il calcolo viene arrestato quando il termine della prima colonna aumentato della metà dello spessore della striscia supera il corrispondente dell'ultima colonna.

Determinata la posizione dell'asse neutro $y_c = 57.76 - 40 = 17.76$ cm il corrispondente valore del momento statico è:

$$S_n^* = -34257 + 625.86 \times 57.76 = 1895.1 \text{ cm}^3$$

quindi applicando l'eq. (4.25) e la successiva si ottiene:

$$\sigma_c = 9.37 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_s = 152.2 \text{ N/mm}^2$$

□

y'_i	$\Delta\eta_i$	$b(\eta_i)$	A_i^*	S_i^*	I_i^*	$y_p = I_i^*/S_i^*$
40.00	0.00	0.00	282.60	16956.	1099031.	64.82
40.50	1.00	5.56	288.16	17181.	1108143.	64.50
41.50	1.00	9.50	297.65	17575.	1124503.	63.98
42.50	1.00	12.10	309.76	18090.	1146364.	63.37
43.50	1.00	14.13	323.89	18704.	1173099.	62.72
44.50	1.00	15.80	339.68	19407.	1204385.	62.06
45.50	1.00	17.22	356.90	20191.	1240032.	61.42
46.50	1.00	18.45	375.35	21048.	1279915.	60.81
47.50	1.00	19.52	394.86	21975.	1323948.	60.25
48.50	1.00	20.45	415.32	22967.	1372060.	59.74
49.50	1.00	21.28	436.60	24021.	1424195.	59.29
50.50	1.00	22.00	458.60	25132.	1480300.	58.90
51.50	1.00	22.63	481.23	26297.	1540320.	58.57
52.50	1.00	23.18	504.40	27514.	1604198.	58.31
53.50	1.00	23.64	528.04	28779.	1671870.	58.09
54.50	1.00	24.04	552.08	30089.	1743263.	57.94
55.50	1.00	24.36	576.44	31441.	1818294.	57.83
56.50	1.00	24.61	601.05	32831.	1896869.	57.78
57.50	1.00	24.80	625.86	34257.	1978877.	57.76

Tabella 4.2:

4.2.5 Pressoflessione deviata

Quando il centro di sollecitazione non appartiene ad un asse principale di inerzia della sezione reagente l'asse neutro non è ortogonale a quello di sollecitazione. In caso di piccola eccentricità, essendo tutta la sezione reagente, si applica l'eq. (4.17) ed il caso non presenta particolari difficoltà. Per la grande eccentricità (centro di sollecitazione esterno al nocciolo) la pressoflessione è retta solo se la sezione ha almeno un asse di simmetria ed il centro di sollecitazione appartiene ad esso; in caso contrario la giacitura dell'asse neutro è incognita e quindi il problema di determinare la sezione resistente, come nel caso della sola flessione, presenta due incognite.

Con riferimento alla fig. 4.4, si indichi con s una retta passante per il centro di sollecitazione P e per il baricentro della sezione geometrica, con x l'asse neutro. Indicando con t ed y due rette ortogonali ad s ed x rispettivamente e passanti per l'intersezione di queste due, si ottengono due riferimenti ortogonali (s, t) e (x, y) , ruotati tra loro dell'angolo α .

Con riferimento agli assi (t, s) le equazioni di equilibrio della sezione sono:

$$\begin{aligned}
 \int_{A^*} \sigma dA &= N \\
 \int_{A^*} \sigma s dA &= N s_p \\
 \int_{A^*} \sigma t dA &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

in cui s_p è l'ordinata del centro di pressione nel riferimento (s, t) . Per la conservazione delle sezioni piane e la linearità dei legami costitutivi dei materiali si può porre, relativamente

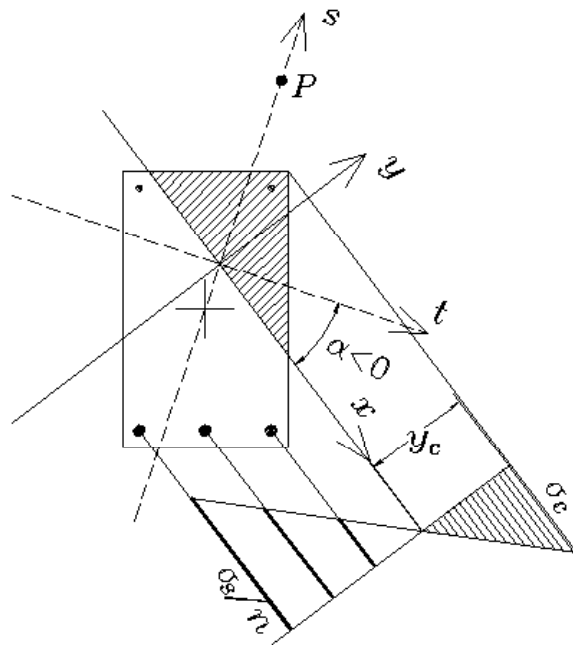


Figura 4.4: Sezione sollecitata da pressoflessione deviata

alla sezione omogenizzata, $\sigma = \theta y$; tenendo conto che:

$$s = y \cos \alpha + x \sin \alpha$$

dalle prime due delle eq. (4.30) si ottiene:

$$\cos \alpha \int_{A^*} y^2 dA + \sin \alpha \int_{A^*} xy dA = s_p \int_{A^*} y dA \quad (4.31)$$

Analogamente, tenendo conto che:

$$t = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

dalla terza delle eq. (4.30) si ha:

$$\cos \alpha \int_{A^*} xy dA - \sin \alpha \int_{A^*} y^2 dA = 0$$

da cui, dividendo tutti i termini per $\cos \alpha$, si ottiene:

$$\int_{A^*} xy dA = \tan \alpha \int_{A^*} y^2 dA \quad (4.32)$$

Le eq. (4.31) e (4.32) formano un sistema le cui incognite sono s_p ed α , che individuano la posizione e la giacitura dell'asse neutro. In caso di sollecitazione retta i due riferimenti coincidono ($\alpha = 0$) e l'eq. (4.31) è equivalente all'eq. (4.21).

La soluzione di questo sistema generalmente richiede un procedimento iterativo; una via possibile, ma non l'unica nè la più efficiente, consiste nel fissare un valore di tentativo di α , quindi, risolvendo l'eq. (4.31) rispetto ad s_p , per esempio con il metodo delle strisce

visto nel paragrafo precedente, si determina la posizione dell'asse neutro. Si può quindi utilizzare l'eq. (4.32) per verificare se la giacitura fissata è corretta; in caso contrario, risolvendo l'equazione rispetto ad α , si ottiene un valore di seconda approssimazione che può essere utilizzato per iterare il procedimento, e così via.

4.3 Sforzo normale eccentrico. Calcolo allo stato limite ultimo

Il calcolo allo stato limite ultimo delle sezioni sollecitate dall'azione combinata dello sforzo assiale e della flessione non differisce in modo rilevante dalle procedure illustrate a proposito della sola flessione. Tuttavia ai meccanismi di collasso descritti nella sezione 3.3 ed illustrati in fig. 3.9 si devono aggiungere quelli relativi alle sollecitazioni di piccola eccentricità, sia di compressione sia di trazione, che corrispondono a stati di deformazione in cui l'asse neutro è esterno alla sezione.

Un'altro aspetto che differenzia questo caso dalla flessione semplice è che, essendo ora la sollecitazione individuata da due parametri, esistono infinite coppie di valori (N, M) che corrispondono a condizioni di stato limite della sezione. Nel piano N, M resta quindi individuata una regione, detta *dominio di resistenza*, i cui punti corrispondono ai valori della sollecitazione sopportati dalla sezione; la sua frontiera, detta *curva di stato limite, o di interazione*, individua le coppie (N, M) per cui si raggiunge lo stato limite ultimo. I punti esterni al dominio corrispondono a sollecitazioni di collasso, che non possono essere equilibrate dalle tensioni interne alla sezione. Un esempio di curva di questo tipo, relativa ad una sezione rettangolare con armatura simmetrica, è mostrata nella fig. 4.5.

Questa figura mette in evidenza che, per sezioni simmetriche e fissato il segno di M , le curve di stato limite espresse in forma esplicita come $M_u = M_u(N)$ sono ad un sol valore, al contrario della forma inversa $N_u = N_u(M)$. Tuttavia si deve osservare che, per sezioni non simmetriche, questa proprietà non si conserva per i valori estremi di N .

Quando la condizione che $M_u(N)$ sia ad un sol valore è valida, la verifica della sezione nei confronti della sollecitazione (N_d, M_d) si può eseguire controllando che:

$$|M_u(N_d)| \geq |M_d| \quad (4.33)$$

ammesso che N_d non superi i valori del massimo sforzo normale per trazione e compressione ed M_u sia dello stesso segno di M_d .

Per la sollecitazione di flessione semplice, nel caso si debbano considerare diverse condizioni di sollecitazione dello stesso segno, è sufficiente verificare che $|M_u| \geq \max_i |M_{di}|$. Nel caso di forza assiale e flessione invece l'eq. (4.33) deve essere controllata per tutte le coppie dei valori (N_{di}, M_{di}) ; infatti spesso la condizione più gravosa non è quella a cui corrisponde il valore maggiore di N , in quanto, come è evidenziato dalla fig. 4.5, per valori non troppo grandi di N il momento ultimo cresce all'aumentare della forza normale.

Nel caso di flessione semplice lo sviluppo del meccanismo di collasso è funzione delle sole percentuali di armatura. La presenza di una forza assiale condiziona a sua volta, spesso in modo decisivo, il tipo di meccanismo; valori elevati di N provocano il collasso della sezione per schiacciamento del calcestruzzo prima che l'acciaio possa plasticizzarsi, o addirittura quando è ancora compresso (piccola eccentricità), mentre un'elevata trazione fa collassare la sezione per cedimento delle armature mentre il calcestruzzo è interamente teso. Dunque ai meccanismi di collasso illustrati nella fig. 3.9 si devono aggiungere quelli

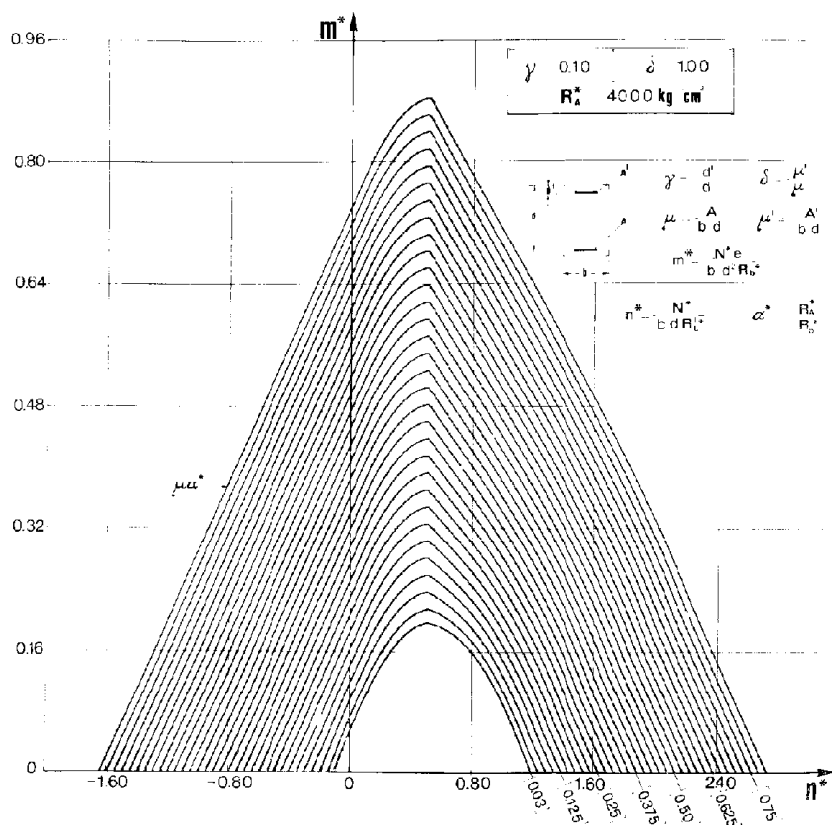


Figura 4.5: Domini di resistenza per sforzo normale e flessione di sezioni rettangolari simmetricamente armate

corrispondenti ai casi di piccola eccentricità dello sforzo normale, sia di compressione sia di trazione.

In caso di compressione centrata si assume che il collasso avvenga quando la deformazione del calcestruzzo raggiunge ϵ_{c1} ; infatti questo è il valore per cui si raggiunge la resistenza massima; per deformazioni maggiori la resistenza diminuisce e pertanto, nel caso di deformazione uniforme della sezione, oltre questo punto l'equilibrio non è possibile a meno di una riduzione di N .

Per pressione di piccola eccentricità, cui corrisponde un diagramma delle deformazioni variabile ma di un solo segno, si assume che il passaggio dal meccanismo di collasso per pressione centrata ($\epsilon_{cmx} = \epsilon_{c1}$) a quello flessionale ($\epsilon_{cmx} = \epsilon_{cu}$) avvenga gradualmente ruotando i diagrammi intorno al punto di intersezione dei due schemi limite, rettangolare e triangolare, che si trova alla distanza

$$y_0 = \frac{3}{7}h$$

dal bordo più compresso, come mostrato in fig. 4.6.

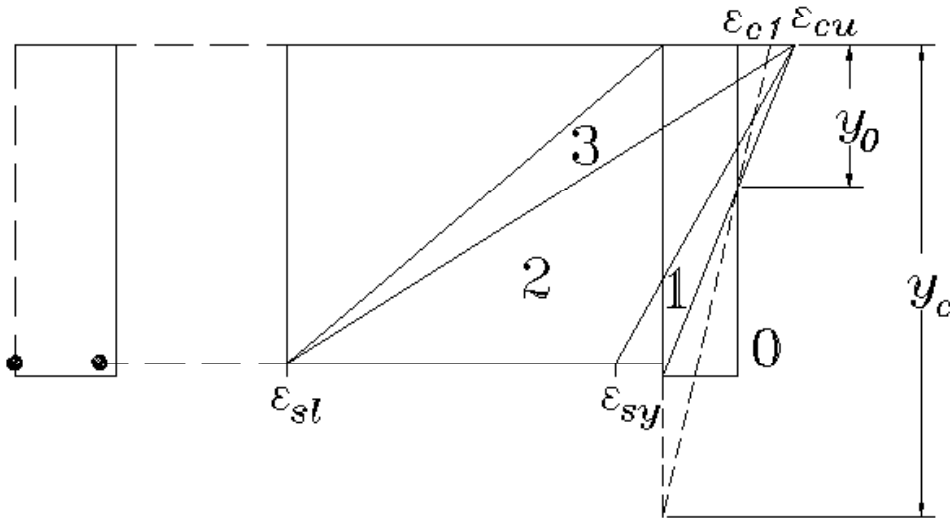


Figura 4.6: Meccanismi di rottura delle sezioni sollecitate a sforzo normale e flessione

4.3.1 Sezione rettangolare

Campi di rottura

Nelle sezioni sollecitate a pressione e flessione il meccanismo di collasso dipende, oltre che dalle quantità di armatura, dall'entità della forza normale. Al crescere di N il collasso passa dai meccanismi duttili (grandi rotazioni) a quelli più fragili, fino al collasso per schiacciamento uniforme del calcestruzzo. Per le sezioni simmetricamente armate questo corrisponde al caso di collasso per sforzo normale centrato. Come nel caso della flessione è utile saper riconoscere a priori quale è il meccanismo di collasso della sezione che corrisponde ad un fissato valore dello sforzo normale. A questo scopo è sufficiente determinare i valori di N relativi a situazioni limite, corrispondenti alla transizione tra un meccanismo e l'altro, quindi confrontare il valore effettivo di N con i valori così determinati ed individuare l'intervallo tra cui questo si colloca.

Piccola eccentricità Se la sezione è interamente compressa, tenendo conto dell'ulteriore coefficiente di sicurezza imposto allo sforzo normale centrato, si ha:

$$N_{\max} = 0.8bh\bar{f}_{cd} + A_s f_{yd} + A'_s f_{yd}$$

e quindi, in termini adimensionali:

$$n_{\max} = \frac{N_{\max}}{bd\bar{f}_{cd}} = 0.8(1 + \delta) + \mu + \mu' \quad (4.34)$$

dove si è posto $h = d + d'$ e $\delta = d'/d$. Ovviamente dovrà risultare $n_d \leq n_{\max}$, altrimenti l'equilibrio sarà impossibile per qualsiasi valore di M . La sezione rimane interamente compressa (campo 0) fino a che $n_{\max} \geq n_d \geq n_0$, dove n_0 è il valore dello sforzo normale che corrisponde alla transizione tra i campi 0 ed 1. In questo caso l'asse neutro è al lembo inferiore della sezione: pertanto $y_c = h$. La risultante delle compressioni è:

$$N_0 = 0.8bh\bar{f}_{cd} + A_s \sigma_s + A'_s f_{yd}$$

in cui $\sigma_s = \min[f_{yd}, E_s \epsilon_s]$, è la tensione nell'acciaio inferiore, normalmente ancora in campo elastico, in quanto

$$\epsilon_s = \epsilon_{cu} \frac{\delta}{1 + \delta} \quad (4.35)$$

mentre si è ipotizzato, come è verosimile, che l'acciaio superiore, più compresso, sia in campo plastico. In termini adimensionali si ha quindi:

$$n_0 = 0.8(1 + \delta) + \mu \alpha_u \frac{\delta}{1 + \delta} + \mu' \quad (4.36)$$

con $\alpha_u = \epsilon_{cu}/\epsilon_y$.

Vi è un'altra sottile zona da considerare, non indicata nella figura 4.6, corrispondente al campo in cui l'asse neutro cade nel copriferro e pertanto la sezione è parzializzata ma l'acciaio inferiore risulta ancora compresso. Il collasso avviene in questa zona per $n_0 \geq n \geq n_{0'}$, dove ($\sigma_s = 0$)

$$n_{0'} = \frac{0.8bd\bar{f}_{cd} + A'_s f_{yd}}{bd\bar{f}_{cd}} = 0.8 + \mu' \quad (4.37)$$

Grande eccentricità: rottura con acciaio in campo elastico Per valori di n minori di $n_{0'}$ la sezione al collasso risulta parzializzata e l'acciaio inferiore è teso. Questo risulta tuttavia in campo elastico (campo 1) fino a che $n > n_1$, dove n_1 è il valore dello sforzo normale che porta al collasso la sezione con l'acciaio teso al limite dello snervamento; in tal caso $y_c = d\epsilon_{cu}/(\epsilon_{cu} + \epsilon_y)$, e pertanto:

$$N_1 = 0.8by_c\bar{f}_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd}$$

In questo caso per ipotesi la tensione nell'acciaio teso è quella di snervamento, mentre quella dell'acciaio compresso potrebbe, in situazioni limite di sezioni particolarmente sottili (< 10 cm), risultare in campo elastico. Nell'equazione precedente si è escluso questo caso, pertanto:

$$n_1 = 0.8 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} + \mu' - \mu \quad (4.38)$$

Rottura simultanea del calcestruzzo e dell'acciaio Per $n \leq n_1$ l'acciaio teso risulta, al collasso, in campo plastico. La rottura avviene per schiacciamento del calcestruzzo (campo 2) fino ad un valore di n tale che al collasso si ha simultaneamente $\epsilon_s = \epsilon_{sl}$ e $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$. In questa situazione l'altezza della zona compressa è

$$y_c = d \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sl}} = 0.2593d$$

Il valore (adimensionale) n_2 dello sforzo normale che corrisponde a questo meccanismo è:

$$n_2 = \frac{0.8by_c\bar{f}_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s f_{yd}}{bd\bar{f}_{cd}} = 0.207 + \mu' \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} - \mu \quad (4.39)$$

La tensione nell'acciaio compresso si deriva dalla legge elasto-plastica dell'acciaio $\sigma'_s = \min\{f_{yd}, E_s \epsilon'_s\}$ in funzione della deformazione

$$\epsilon'_s = \epsilon_{cu} \frac{K - \delta}{K} = 3.5 \cdot 10^{-3} (1 - 3.857\delta)$$

Negli elementi con $h > 30$ cm risulta in pratica $\epsilon'_s > \epsilon_y$ e pertanto $\sigma'_s = f_{yd}$. Nelle travi di piccolo spessore e nelle solette l'acciaio compresso può invece risultare elastico.

Sezione interamente tesa Per $n < n_2$ il collasso della sezione avviene nel campo 3, cioè per eccessivo allungamento dell'acciaio mentre $\epsilon_c < \epsilon_{cu}$. La sezione è tuttavia ancora parzializzata (parte tesa e parte compressa) fino a quando l'asse neutro raggiunge il lembo superiore. In questo caso la sezione risulta interamente tesa e la resistenza è affidata alle sole armature. Il valore di n (< 0) per cui questa condizione si verifica è:

$$n_3 = \frac{-A'_s E_s \epsilon_{sl} \delta - A_s f_{yd}}{bd \bar{f}_{cd}} = -\mu' \alpha_l \delta - \mu \quad (4.40)$$

dove $\alpha_l = \epsilon_{sl}/\epsilon_y$ e si è tenuto conto che $\epsilon'_s = -\epsilon_{sl} \delta$ e si è ipotizzato che $|\epsilon'_s| > \epsilon_y$, il che generalmente avviene se $h > 20$ cm.

Determinazione del momento ultimo

Compressione eccentrica, piccola eccentricità ($n_0 \leq n \leq n_{\max}$) Quando l'asse neutro è esterno alla sezione, per le ipotesi adottate, la parte di sezione prossima al lembo maggiormente compresso ha, per l'altezza y_0 , deformazioni maggiori di ϵ_{c1} . Pertanto, se si utilizza la legge parabola-rettangolo, la tensione in questa parte di sezione ha il valore uniforme \bar{f}_{cd} . Nella parte restante, di altezza $h - y_0 = \frac{4}{7}h$, la tensione segue una legge parabolica il cui punto di nullo è esterno alla sezione. Indicando come in precedenza con y_c la distanza dell'asse neutro dal lembo più compresso, per una sezione rettangolare la risultante delle tensioni nel calcestruzzo si calcola con la relazione:

$$C = by_0 \bar{f}_{cd} + b \int_{y_c-h}^{y_c-y_0} \sigma_c(\epsilon) dy \quad (4.41)$$

in cui la tensione $\sigma_c(\epsilon)$ segue la legge parabolica:

$$\sigma_c(\epsilon) = 2\bar{f}_{cd} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right] \quad (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{c1})$$

mentre la deformazione è proporzionale alla distanza y dall'asse neutro:

$$\epsilon = \epsilon_{c1} \frac{y}{y_c - y_0}$$

Sostituendo queste due ultime espressioni nell'eq. (4.41) e svolgendo l'integrale si ottiene:

$$C = bh \bar{f}_{cd} \left[1 - \frac{64}{21(7K' - 3)^2} \right] \quad (4.42)$$

in cui $K' = y_c/h \geq 1$ è il coefficiente adimensionale della posizione dell'asse neutro. La quantità tra parentesi quadrata varia tra 0.81, per $K' = 1$, ed 1, per $K' = \infty$ (pressione centrata). Tuttavia si deve tenere presente che, per la normativa italiana, il valore di C non può superare quello relativo alla pressione centrata, che deve essere valutato adottando un coefficiente di sicurezza maggiorato del 25%. Questo fa sì che $C_{\max} = 0.8\bar{f}_{cd}bh$ sia praticamente pari al limite inferiore del campo di variazione di C in questa situazione. Pertanto in pratica si dovrà assumere $C = \text{cost} = 0.8bh\bar{f}_{cd}$.

In modo del tutto analogo si valuta il momento delle tensioni nel calcestruzzo; relativamente all'asse neutro si ha:

$$M_{cn} = by_0 \bar{f}_{cd} \left(y_c - \frac{y_0}{2} \right) + b \int_{y_c-h}^{y_c-y_0} \sigma_c(\epsilon) y dy$$

per cui, sostituendo le espressioni di σ_c e di ϵ e svolgendo i calcoli risulta:

$$M_{cn} = bh^2\bar{f}_{cd} \frac{49K'^3 - 66.5K'^2 + (566/21)K' - 185/98}{(7K' - 3)^2}$$

Il momento relativo al centro della sezione si calcola utilizzando la formula del trasporto; tenendo conto dell'eq. (4.42) si ottiene:

$$M_c = M_{cn} - C \left(y_c - \frac{h}{2} \right) = bh^2\bar{f}_{cd} \frac{160}{147(7K' - 3)^2} \quad (4.43)$$

Prendendo in esame una sezione con doppia armatura ed indicando con A'_s l'area dell'acciaio più prossimo al lembo maggiormente compresso, lo sforzo normale ultimo della sezione è:

$$N_u = 0.8bh\bar{f}_{cd} + A'_s\sigma_s(\epsilon'_s) + A_s\sigma_s(\epsilon_s) \quad (4.44)$$

Poiché generalmente $\epsilon'_s > \epsilon_{c1} > \epsilon_{sy}$, risulta $\sigma_s(\epsilon'_s) = f_{yd}$; quindi la sezione raggiunge il massimo dello sforzo normale portato quando anche $\sigma_s(\epsilon_s) = f_{yd}$:

$$N_{u(mx)} = 0.8bh\bar{f}_{cd} + (A'_s + A_s)f_{yd} \quad (4.45)$$

Valori superiori a questo non possono essere equilibrati dalla sezione; per valori inferiori si ha necessariamente $\sigma_s(\epsilon_s) < f_{yd}$ e quindi $\epsilon_s < \epsilon_{sy}$. L'equazione di equilibrio diviene:

$$N_d = N_u = 0.8bh\bar{f}_{cd} + A'_sf_{yd} + A_s\sigma_s(\epsilon_s)$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_s(\epsilon_s) = \frac{N_d - 0.8bh\bar{f}_{cd} - A'_sf_{yd}}{A_s} \quad (4.46)$$

quindi, essendo l'acciaio in campo elastico, si deduce $\epsilon_s = \sigma_s(\epsilon_s)/E_s$. Tenendo conto che per la conservazione delle sezioni piane si ha:

$$\epsilon_s = \epsilon_{c1} \frac{y_c - d}{y_c - y_0} = \epsilon_{c1} \frac{K' - d/h}{K' - 3/7}$$

si ottiene il valore di K' :

$$K' = \frac{\epsilon_{c1}(d/h) - (3/7)\epsilon_s}{\epsilon_{c1} - \epsilon_s} \quad (4.47)$$

La soluzione trovata è coerente se $K' \geq 1$.

Determinata, attraverso K' , la posizione dell'asse neutro, il momento ultimo della sezione soggetta allo sforzo assiale N_d si valuta facilmente. Facendo uso dell'eq. (4.43) si ha:

$$M_u = bh^2\bar{f}_{cd} \frac{160}{147(7K' - 3)^2} + A'_sf_{yd} \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A_s\sigma_s(\epsilon_s) \left(\frac{h}{2} - d \right) \quad (4.48)$$

Grande eccentricità: collasso nel campo 1 ($n_1 \leq n \leq n_0$) Per ipotesi si ha $|\epsilon_s| \leq \epsilon_{sy}$, al contrario l'armatura complessa generalmente è plasticizzata ($\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$). L'equazione di equilibrio della sezione si scrive:

$$N_d = 0.81by_c\bar{f}_{cd} + A'_s f_{yd} + A_s \sigma_s(\epsilon_s) \quad (4.49)$$

dove N_d è il valore di progetto della forza normale e la tensione nell'acciaio teso è data in funzione della posizione dell'asse neutro da:

$$\sigma_s(\epsilon_s) = E_s \epsilon_s = E_s \epsilon_{cu} \frac{y_c - d}{y_c}$$

Sostituendo l'espressione di σ_s nell'eq. (4.49), dopo aver diviso tutti i termini per $bd\bar{f}_{cd}$, si ottiene:

$$n_d = 0.81K + \mu'_s + \mu_s \alpha_u \frac{K - 1}{K} \quad (4.50)$$

in cui

$$n_d = \frac{N_d}{bd\bar{f}_{cd}}$$

è il valore adimensionale della forza normale e $\alpha_u = \epsilon_{cu}/\epsilon_{sy}$.

Risolvendo l'eq. (4.50) si ottiene il valore di K :

$$K = 0.617 \left[n_d - \mu'_s - \alpha_u \mu_s + \sqrt{(n_d - \mu'_s - \alpha_u \mu_s)^2 + 3.2 \alpha_u \mu_s} \right] \quad (4.51)$$

Questa espressione, per $n_d = 0$, coincide con l'eq. (3.48) relativa alla sollecitazione di sola flessione. Determinato K si valutano facilmente i valori di ϵ_s ed ϵ'_s :

$$\epsilon_s = \epsilon_{cu} \frac{K - 1}{K} \quad \epsilon'_s = \epsilon_{cu} \frac{K - \delta}{K} \quad (4.52)$$

Il valore di K così trovato è coerente con le ipotesi se $\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$ e $|\epsilon_s| \leq \epsilon_{sy}$. Se queste condizioni sono soddisfatte il momento ultimo della sezione, relativamente al suo baricentro geometrico, è:

$$M_u = 0.81by_c\bar{f}_{cd} \left(\frac{h}{2} - 0.416y_c \right) + A'_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A_s E_s \epsilon_s \left(\frac{h}{2} - d \right) \quad (4.53)$$

in cui $y_c = Kd$ ed ϵ_s è dato dalla prima delle eq. (4.52).

Collasso nel campo 2 ($n_2 \leq n \leq n_1$) In questo caso $\epsilon_l \geq |\epsilon_s| \geq \epsilon_{sy}$; se inoltre $\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$ entrambe le armature sono in campo plastico e pertanto l'equazione di equilibrio si scrive:

$$N_d = 0.81by_c\bar{f}_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd}$$

da cui si ottiene immediatamente il valore dell'altezza della zona compressa; in forma adimensionale:

$$K = \frac{n_d + \mu_s - \mu'_s}{0.81} \quad (4.54)$$

Ponendo $n_d = 0$ questa equazione coincide con l'eq. (3.51). Noto K , mediante le eq. (4.52) si determinano le deformazioni delle armature; se entrambe superano la soglia di plasticizzazione la soluzione è coerente, altrimenti se $\epsilon'_s < \epsilon_{sy}$ l'acciaio compresso è in campo elastico e l'equazione di equilibrio si modifica nella seguente:

$$N_d = 0.81by_c\bar{f}_{cd} + A'_sE_s\epsilon_{cu}\frac{K-\delta}{K} - A_sf_{yd}$$

da cui si ottiene l'equazione di secondo grado in K :

$$0.81K^2 - (n_d + \mu_s - \mu'_s\alpha_u)K - \mu'_s\alpha_u\delta = 0$$

la cui soluzione

$$K = 0.617 \left(n_d + \mu_s - \mu'_s\alpha_u + \sqrt{(n_d + \mu_s - \mu'_s\alpha_u)^2 + 3.2\mu'_s\alpha_u\delta} \right) \quad (4.55)$$

fornisce il valore di K . Da questa equazione si deriva come caso particolare l'eq. (3.52).

Il momento ultimo della sezione si calcola con un'espressione analoga all'eq. (4.53):

$$M_u = 0.81by_c\bar{f}_{cd} \left(\frac{h}{2} - 0.416y_c \right) + A'_s\sigma_s(\epsilon'_s) \left(\frac{h}{2} - d' \right) - A_sf_{yd} \left(\frac{h}{2} - d \right) \quad (4.56)$$

in cui $\sigma_s(\epsilon'_s) = E_s\epsilon'_s$ se $\epsilon'_s \leq \epsilon_{sy}$, altrimenti $\sigma_s(\epsilon'_s) = f_{yd}$.

Collasso nel campo 3 ($n_3 \leq n \leq n_2$) Come si è visto per la flessione, la risultante delle tensioni nel calcestruzzo si può ancora calcolare, senza commettere un errore eccessivo, sulla base del diagramma rettangolare equivalente; con questa approssimazione l'equazione di equilibrio è:

$$N_d = 0.8y_c\bar{f}_{cd} + A'_s\sigma_s(\epsilon'_s) - A_sf_{yd}$$

Se $\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$ questa equazione coincide con quella relativa al campo 2 e la sua soluzione è ancora l'eq. (4.54); in caso contrario la deformazione dell'acciaio compresso si esprime in funzione della posizione dell'asse neutro con la relazione:

$$\epsilon'_s = \epsilon_{sl} \frac{K - \delta}{1 - K} \quad (4.57)$$

a cui corrisponde l'equazione di equilibrio (adimensionale):

$$n_d = 0.8K + \mu'_s\alpha_l \frac{K - \delta}{1 - K} - \mu_s$$

dove $\alpha_l = \epsilon_{sl}/\epsilon_{sy}$. Risolvendo l'equazione si trova:

$$K = 0.617 \left[0.8 + n_d + \mu'_s\alpha_l + \mu_s - \sqrt{(0.8 + n_d + \mu'_s\alpha_l + \mu_s)^2 - 3.2(n_d + \mu'_s\alpha_l\delta + \mu_s)} \right] \quad (4.58)$$

Il momento ultimo è dato ancora dall'eq. (4.56), ma la deformazione dell'acciaio compresso si calcola con l'eq. (4.57).

Trazione, piccola eccentricità ($n < n_3$) Quando la forza assiale ha il verso della trazione, se l'asse neutro risulta interno alla sezione, le relazioni sviluppate nei paragrafi precedenti sono ancora valide, con la sola condizione di porre il segno di n_d negativo. Quando l'asse neutro è esterno (piccola eccentricità) la sezione è interamente tesa e quindi solo l'acciaio contribuisce alla resistenza. La forza assiale massima di trazione è pertanto:

$$N_{u(max)}^- = (A_s + A'_s)f_{yd} \quad (4.59)$$

Forze maggiori non possono essere equilibrate; per valori inferiori si ha $|\sigma_s(\epsilon'_s)| < f_{yd}$, per cui l'acciaio meno teso è in campo elastico e l'equazione di equilibrio è:

$$N_d = -A_s f_{yd} + A'_s \sigma'_s \quad (N_d < 0)$$

da cui si ottiene:

$$\sigma'_s = \frac{N_d + A_s f_{yd}}{A'_s} \quad (4.60)$$

È evidente che questa soluzione è coerente solo se risulta $-f_{yd} \leq \sigma'_s < 0$. In questo caso il momento ultimo, relativamente al baricentro geometrico della sezione, è dato da:

$$M_u = -A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - d \right) + \sigma'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad (4.61)$$

4.3.2 Verifica della sezione

Come è stato già sottolineato più volte, quando la sollecitazione è composta dalla forza normale e dalla flessione il meccanismo di collasso non dipende solo dalla percentuale delle armature. Il meccanismo di rottura, fissate le armature, dipende dal valore di n . Il modo di procedere nella verifica di una sezione, per differenti valori della forza normale, è illustrato nel seguente esempio.

Esempio 4.7 Determinare i valori del momento ultimo di una sezione rettangolare di dimensioni $b = 30$ cm, $h = 50$ cm, con doppia armatura simmetrica $A_s = A'_s = 3\phi 20 = 9.42$ cm² e realizzata con i seguenti materiali:

Calcestruzzo	$R_{ck} = 30$ N/mm ²	$\bar{f}_{cd} = 13.23$ N/mm ² = 1.323 kN/cm ²
Acciaio	Fe b 44 K	$f_{yd} = 374$ N/mm ² = 37.4 kN/cm ²

considerando cinque valori della forza normale:

$$N_d = 2200; 1500; 800; 100; -500 \text{ kN}$$

Le percentuali meccaniche di armatura sono:

$$\mu = \mu' = \frac{9.42 \times 37.4}{30 \times 47 \times 1.323} = 0.18886$$

ed inoltre $\delta = 3/47 = 0.06383$ $\epsilon_y = 374/205000 = 1.824 \times 10^{-3}$ $\alpha_u = \epsilon_{cu}/\epsilon_y = 1.919$ $\alpha_l = \epsilon_{sl}/\epsilon_y = 5.482$

I valori caratteristici dello sforzo normale adimensionale, risultano:

$$\begin{aligned} n_{\max} &= 0.8(1 + \delta) + \mu + \mu' = 1.229 \\ n_0 &= 0.8(1 + \delta) + \mu \alpha_u \frac{\delta}{1 + \delta} + \mu' = 1.155 \\ n_1 &= 0.8 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} + \mu' - \mu = 0.526 \\ n_2 &= 0.207 + \mu' \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} - \mu = 0.207 \\ n_3 &= -\mu' \alpha_l \delta - \mu = -0.255 \end{aligned}$$

1) $N_d = 2200$ kN. Il corrispondente valore adimensionale è:

$$n_d = \frac{N_d}{bd\bar{f}_{cd}} = \frac{2200}{30 \times 47 \times 1.323} = 1.179$$

Poiché $n_{\max} > n_d > n_0$ il collasso avviene per piccola eccentricità. La forza assegnata è inferiore al valore massimo portato dalla sezione [eq. (4.45)]:

$$N_{u(mx)} = 0.8 \times 30 \times 50 \times 1.323 + (9.42 + 9.42)37.4 = 2292 \text{ kN}$$

e dunque la soluzione esiste e si ha [eq (4.46)]:

$$\sigma_s = \frac{2200 - 0.8 \times 30 \times 50 \times 1.323 - 9.42 \times 37.4}{9.42} = 27.61 \text{ kN/cm}^2$$

Quindi risulta $\epsilon_s = \sigma_s/E_s = 27.61/21000 = 1.3 \times 10^{-3}$; applicando l'eq. (4.47) si ottiene:

$$K' = \frac{2(47/50) - (3/7)1.3}{2 - 1.3} = 1.89$$

Il momento ultimo si determina applicando l'eq. (4.48):

$$M_u = 30 \times 50^2 \times 1.323 \frac{160}{147(7 \times 1.89 - 3)^2} + 9.42 \times 37.4(25 - 3) + 9.42 \times 27.61(25 - 47) = 3060 \text{ kNcm} = 30.6 \text{ kNm}$$

2) $N_d = 1500$ kN. Il corrispondente valore adimensionale è $n_d = 0.804$; perciò $n_0 > n_d > n_1$ e dunque il collasso avviene in campo 1. Applicando l'eq. (4.51) si ottiene: $K = 0.85$. I corrispondenti valori delle deformazioni delle armature sono dati dall'eq. (4.52):

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= 3.5 \times 10^{-3} \frac{0.85 - 1}{0.85} = -0.618 \times 10^{-3} \\ \epsilon'_s &= 3.5 \times 10^{-3} \frac{0.85 - 0.0638}{0.85} = 3.237 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Poiché risulta che $|\epsilon_s| < \epsilon_{sy}$ ed $\epsilon'_s > \epsilon_{sy}$ la soluzione è congruente con le ipotesi iniziali. Il momento ultimo si calcola quindi con l'eq. (4.53), e si ottiene:

$$M_u = 210.1 \text{ kNm}$$

3) $N_d = 800$ kN. Poiché il corrispondente valore adimensionale è $n_d = 0.434$ si verifica facilmente che il collasso avviene nel campo 2. Ipotizzando anche che l'armatura compressa sia plasticizzata si applica l'eq. (4.54), per cui si ha:

$$K = \frac{0.434 + 0.189 - 0.189}{0.81} = 0.5358$$

Applicando le eq. (4.52) si determinano i valori corrispondenti delle deformazioni:

$$\epsilon_s = -3.03 \times 10^{-3} \quad \epsilon'_s = 3.083 \times 10^{-3}$$

Poiché entrambe risultano, in valore assoluto, maggiori della deformazione di snervamento il risultato è coerente con le ipotesi. Applicando l'eq. (4.56) si ottiene quindi il valore del momento ultimo:

$$M_u = 271.1 \text{ kNm}$$

4) $N_d = 100$ kN. Si ha $n_d = 0.0536$ e perciò il collasso avviene nel campo 3. Ritenendo che l'armatura compressa sia elastica si applica l'eq. (4.58) e si ottiene $K = 0.169$, cui corrisponde,

tramite l'eq. (4.57), la deformazione $\epsilon'_s = 1.261 \times 10^{-3}$. Ora la soluzione è coerente, pertanto il momento si calcola mediante l'eq. (4.58), applicando la quale risulta: $M_u = 177$ kNm.

5) $N_d = -500$ kN. $n_d = -0.271 < n_3$, pertanto si può assumere che il meccanismo di collasso sia per trazione con piccola eccentricità. Per l'eq. (4.60):

$$\sigma'_s = \frac{-500 + 9.42 \times 37.4}{9.42} = -15.679 \text{ kN/cm}^2$$

che, in valore assoluto, non supera la tensione di plasticizzazione. Il momento ultimo è quindi dato dall'eq. (4.61): $M_u = 45$ kNm \square

Uso dei domini di resistenza

Fissata la forma della sezione, ad esempio rettangolare, e per un dato rapporto tra le armature di estremità, ad esempio per il caso di armatura simmetrica ($A'_s/A_s = 1$), i valori adimensionali della forza normale e del momento ultimi:

$$n_u = \frac{N_u}{bd\bar{f}_{cd}} \quad m_u = \frac{M_u}{bd^2\bar{f}_{cd}}$$

dipendono solo dalla percentuale meccanica di armatura μ_s e dal rapporto $\delta = d'/d$.¹

Pertanto si possono tracciare dei diagrammi del tipo di quelli riportati nella fig. 4.5, rappresentando nella stessa carta diverse curve in funzione di μ_s per un fissato valore di δ . Dato che quest'ultima grandezza non ha eccessiva influenza, pochi diagrammi coprono, per il tipo di sezione considerato, tutto lo spettro delle situazioni di interesse.

Queste curve si possono utilizzare sia per verificare sia per dimensionare le sezioni sollecitate da pressoflessione retta. Fissate le dimensioni b , d della sezione e selezionata la famiglia di curve corrispondenti al valore di δ più vicino a quello effettivo, si riportano sulla carta i punti di coordinate (n_{di}, m_{di}) relativi a tutte le condizioni di carico esaminate. Quando si vuole verificare una sezione la cui armatura è già fissata si deve controllare che nessun punto cada all'esterno del dominio delimitato dalla curva che corrisponde alla percentuale di armatura assegnata. In fase di progetto la quantità di armatura necessaria si determina cercando la curva più bassa che racchiude tutti i punti-sollecitazione. L'area di acciaio si determina in base al valore di μ_s che corrisponde alla curva prescelta, invertendo l'eq. (3.31) che definisce la percentuale meccanica di armatura:

$$A_s = \mu_s \frac{bd\bar{f}_{cd}}{f_{yd}}$$

L'armatura compressa quindi si ottiene in base al fissato rapporto $\alpha = A'_s/A_s$: $A'_s = \alpha A_s$. Se la soluzione trovata risulta insoddisfacente, ad esempio perché comporta quantitativi eccessivi di armatura, si procede ad un altro tentativo cambiando le dimensioni della sezione.

La forma delle curve di interazione mette in evidenza la necessità di esaminare tutte le possibili condizioni di carico. Se ad esempio N ed M sono indipendenti tra loro, in quanto prodotti da carichi diversi, si dovranno esaminare anche le condizioni in cui N anziché crescere diminuisce, ponendo uguale ad uno il coefficiente di sicurezza dei carichi

¹Questo non è del tutto esatto in quanto anche il valore della deformazione di snervamento $\epsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$ ha influenza sui risultati. Tuttavia, se l'intervallo di variazione della tensione di snervamento dell'acciaio non è troppo grande, si può trascurare l'influenza di questo parametro.

permanenti e zero quello dei carichi variabili, in quanto questa situazione in certi casi risulta più pericolosa di quella in cui N prende il valore massimo.

Quando non si dispone di tavole pre-calcolate la curva di interazione di una sezione può essere calcolata per punti. In genere è sufficiente esaminare pochi casi, raccordando i punti con segmenti rettilinei. Ad esempio si possono analizzare le seguenti condizioni:

Pressione centrata.	$\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{c1}$	$\epsilon_s = \epsilon_{c1}$
Diagramma triangolare	$\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$	$\epsilon_s = 0$
Acciaio al limite di snerv.	$\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$	$\epsilon_s = -\epsilon_{sy}$
Diagramma intermedio zona 2	$\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$	$\epsilon_s = -\epsilon_{sl}/2$
Rottura bilanciata	$\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$	$\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$
Diagramma intermedio zona 3	$\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{c1}$	$\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$
Trazione centrata	$\epsilon_{c(mx)} = -\epsilon_{sl}$	$\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$

Si deve far notare che fissando il diagramma delle deformazioni la posizione dell'asse neutro risulta nota a priori. Pertanto, almeno per la sezione rettangolare, il calcolo delle risultanti N_u, M_u si esegue facilmente, anche in presenza di più di due livelli di armatura, senza dover risolvere alcuna equazione.

Questo procedimento costituisce una valida alternativa al calcolo diretto di $M_u(N_d)$, in particolare se devono essere verificate numerose condizioni di carico, in quanto, una volta tracciata la curva, la verifica per ogni condizione di sollecitazione risulta immediata.

Esempio 4.8 Costruire il dominio di resistenza della sezione rettangolare di base $b = 25$ cm e altezza $h = 60$ cm ($d = 57$ cm), con armatura doppia simmetrica $A_s = A'_s = 4\phi 16 = 8.0$ cm². Resistenza caratteristica del calcestruzzo $R_{ck} = 30$ N/mm² ($\bar{f}_{cd} = 1.323$ kN/cm²), acciaio tipo Feb 44 k ($f_{yd} = 37.4$ kN/cm²).

1. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_s = \epsilon_{c1}; K' = \infty$ [(eq. (4.45) (4.48)].

$$N_u = 0.8 \times 25 \times 60 \times 1.323 + 2 \times 8.0 \times 34.7 = 2186 \text{ kN}$$

$$M_u = 0$$

2. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}, \epsilon_s = 0; K = 1$ [eq. (4.49) (4.53)].

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 57 \times 1.323 + 8.0 \times 37.4 = 1527 + 299.2 = 1826 \text{ kN}$$

$$M_u = 1527(30 - 0.416 \times 57) - 299.2(30 - 3) = 17680 \text{ kNcm}$$

3. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}, \epsilon_s = -\epsilon_{sy}/2$ [eq. (4.49) (4.52)].

$$\epsilon_{sy} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{37.4}{21000} = 1.78 \times 10^{-3} \quad \epsilon_s = -0.89 \times 10^{-3}$$

$$K = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + |\epsilon_s|} = 0.797 \quad \sigma_s = E_s \epsilon_s = 18.7 \text{ kN/cm}^2$$

$$y_c = Kd = 45.44 \text{ cm}$$

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 45.44 \times 1.323 + 8.0 \times 37.4 - 8.0 \times 18.7 = 1366.9 \text{ kN}$$

$$M_u = 1217(30 - 0.416 \times 45.44) + 8.0 \times 37.4 \times 27 + 8 \times 18.7 \times 27$$

$$= 25627 \text{ kNcm}$$

4. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}, \epsilon_s = -\epsilon_{sy}$ [eq. (4.49) (4.52)].

$$K = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sy}} = 0.663 \quad y_c = Kd = 37.78 \text{ cm}$$

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 37.78 \times 1.323 + 8.0 \times 37.4 - 8.0 \times 37.4 = 1012 \text{ kN}$$

$$M_u = 1012(30 - 0.416 \times 37.78) + 2 \times 8.0 \times 37.4 \times 27 = 30614 \text{ kNcm}$$

5. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$, $\epsilon_s = -3 \times 10^{-3}$ (Campo 2).

$$K = 0.3585 \quad y_c = 30.69 \text{ cm}$$

$$\delta = \frac{d'}{d} = \frac{3}{57} = 0.0526 \quad \epsilon'_s = \epsilon_{cu} \frac{K - \delta}{K} = 3.16 \times 10^{-3} > \epsilon_{sy}$$

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 30.69 \times 1.323 = 822.3 \text{ kN}$$

$$M_u = 822.3(30 - 0.416 \times 30.69) + 2 \times 8.0 \times 37.4 \times 27 = 30326 \text{ kNcm}$$

6. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$, $\epsilon_s = -5 \times 10^{-3}$ (Campo 2).

$$K = 0.4118 \quad y_c = 23.47 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_{cu} \frac{K - \delta}{K} = 3.05 \times 10^{-3} > \epsilon_{sy}$$

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 23.47 \times 1.323 = 628.8 \text{ kN}$$

$$M_u = 628.8(30 - 0.416 \times 23.47) + 2 \times 8.0 \times 37.4 \times 27 = 28881 \text{ kNcm}$$

7. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$, $\epsilon_s = -7.5 \times 10^{-3}$ (Campo 2).

$$K = 0.318 \quad y_c = 18.14 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_{cu} \frac{K - \delta}{K} = 2.92 \times 10^{-3} > \epsilon_{sy}$$

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 18.14 \times 1.323 = 485.9 \text{ kN}$$

$$M_u = 485.9(30 - 0.416 \times 18.14) + 2 \times 8.0 \times 37.4 \times 27 = 27067 \text{ kNcm}$$

8. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{cu}$, $\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$ (Rottura bilanciata).

$$K = 0.259 \quad y_c = 14.78 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_{cu} \frac{K - \delta}{K} = 2.79 \times 10^{-3} > \epsilon_{sy}$$

$$N_u = 0.81 \times 25 \times 14.78 \times 1.323 = 395.9 \text{ kN}$$

$$M_u = 395.9(30 - 0.416 \times 14.78) + 2 \times 8.0 \times 37.4 \times 27 = 25600 \text{ kNcm}$$

9. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{c1}$, $\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$ (Campo 3).

$$K = \frac{\epsilon_{c1}}{\epsilon_{c1} + \epsilon_{sl}} = 0.1667 \quad y_c = 9.5 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_{c1} \frac{K - \delta}{K} = 1.368 \times 10^{-3} < \epsilon_{sy} \quad \sigma'_s = E_s \epsilon'_s = 28.74 \text{ kN/cm}^2$$

Per le eq. (3.26) si ha:

$$\begin{aligned} N_u &= 0.667 \times 25 \times 9.5 \times 1.323 + 8.0 \times 28.74 - 8.0 \times 37.4 = \\ &= 209.5 - 69.3 = 140.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_u &= 209.5(30 - 0.375 \times 9.5) + 8.0 \times 28.74 \times 27 + 8.0 \times 37.4 \times 27 = \\ &= 19823 \text{ kNcm} \end{aligned}$$

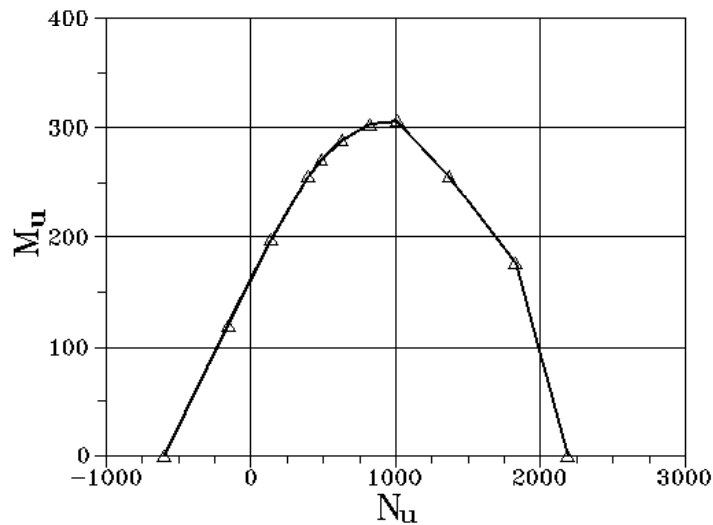


Figura 4.7: Dominio di resistenza di una sezione rettangolare ad armatura simmetrica.

10. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_{c1}/2$, $\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$ (Campo 3)

$$K = \frac{\epsilon_{c(mx)}}{\epsilon_{c(mx)} + \epsilon_{sl}} = 0.091 \quad y_c = 5.18 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_{c(mx)} \frac{K - \delta}{K} = 0.421 \times 10^{-3} < \epsilon_{sy} \quad \sigma'_s = E_s \epsilon'_s = 8.84 \text{ kN/cm}^2$$

Per le eq. (3.27) si ha ($\alpha = 0.5$):

$$\beta = 0.417 \quad \eta_c = 0.35y_c$$

pertanto

$$\begin{aligned} N_u &= 0.417 \times 25 \times 5.18 \times 1.323 + 8.0 \times 8.84 - 8.0 \times 37.4 = \\ &= 71.4 - 228.5 = -157.0 \text{ kN} \\ M_u &= 71.4(30 - 0.35 \times 5.18) + 8.0 \times 8.84 \times 27 + 8.0 \times 37.4 \times 27 = \\ &= 12000 \text{ kNcm} \end{aligned}$$

11. $\epsilon_{c(mx)} = \epsilon_s = -\epsilon_{sl}$ (Trazione pura).

$$\begin{aligned} N_u &= -2 \times 8.0 \times 37.4 = -598.4 \text{ kN} \\ M_u &= 0 \end{aligned}$$

I risultati sono riportati nella fig. 4.7. □

4.3.3 Sezioni di forma generica. Pressoflessione deviata

Quando la sezione ha forma meno semplice di quella rettangolare, ma è tuttavia sollecitata da pressoflessione retta, si applica il metodo generale esposto nel § (3.3.3) a proposito della flessione. Il metodo consiste nel determinare, avendo fissato il diagramma delle deformazioni ultime, la sollecitazione risultante mediante la somma dei contributi delle

sottili strisce in cui è stata idealmente suddivisa la sezione; quindi nel cercare per tentativi la posizione dell'asse neutro che uguaglia questa risultante alla forza normale agente sulla sezione. Le sole differenze rispetto a quanto esposto per la flessione sono le seguenti: i) l'eq. (3.67), che determina la posizione dell'asse neutro, ora è verificata quando $N = N_d$; ii) il momento ultimo, espresso dall'eq. (3.68), deve essere valutato relativamente ad un punto stabilito (ad esempio il baricentro della sezione in calcestruzzo) in quanto ora il valore del momento dipende dal polo di riduzione.

Se la sezione non è simmetrica o l'asse di sollecitazione non coincide con uno di simmetria, la direzione dell'asse neutro non è nota a priori. In questo caso il problema ha due incognite, come già si è visto a proposito della flessione. Le equazioni disponibili sono quelle di equilibrio [eq. (4.30)], già utilizzate per l'analogo problema in campo elastico. Il procedimento da seguire è simile a quello illustrato per la flessione nel § (3.3.4).

Indicando con x l'asse neutro e con y un'altro ad esso ortogonale, con s, t gli assi di un riferimento la cui origine coincide con quella del precedente e tale che ad s appartiene il centro di sollecitazione, si ha (fig. 4.4):

$$t = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

per cui la terza delle eq. (4.3) diviene:

$$\int_A \sigma(\epsilon) t dA = \cos \alpha \int_A \sigma(\epsilon) x dA - \sin \alpha \int_A \sigma(\epsilon) y dA = 0 \quad (4.62)$$

Fissata una direzione di tentativo x si cerca, mediante il procedimento visto in precedenza per la sollecitazione retta, la posizione dell'asse neutro che verifica la prima delle eq. (4.3) per $N = N_d$, quindi si verifica che l'eq. (4.62) sia soddisfatta, calcolando gli integrali con le relazioni riportate nel § 3.3.4. In caso positivo la posizione dell'asse neutro è quella corretta: quindi si può determinare il valore del momento ultimo facendo uso della seconda delle eq. (4.30). In caso contrario si fissa per x una nuova direzione e si ripete il procedimento fino a che tutte le equazioni sono verificate.

Domini di resistenza

Nel caso generale la sollecitazione agente in una sezione è individuata da un vettore con 3 componenti. Indicando con x, y un sistema di assi ortogonali nel piano della sezione, il vettore avrà le componenti: $\{N, M_x, M_y\}$, in cui N è la forza normale, $M_x = N e_x$, $M_y = N e_y$ sono le componenti del momento flettente agenti nelle direzioni degli assi. Ogni stato di sollecitazione individua quindi un punto in uno spazio a 3 dimensioni; i punti rappresentativi delle azioni che portano la sezione a raggiungere lo stato limite ultimo descrivono, in questo spazio, una superficie detta di *stato limite*. Un esempio è rappresentato in fig. (4.8).

Le curve che si ottengono intersecando questa superficie con piani che contengono l'asse N sono le curve di interazione della sezione relative alle sollecitazioni agenti secondo direzioni assegnate. In particolare quando il piano passa per un asse di simmetria (se esiste) della sezione, si ottiene la corrispondente curva di interazione per pressoflessione retta.

Le superfici di stato limite si possono rappresentare sotto forma di curve di livello, per esempio sul piano M_x, M_y relativamente a valori costanti di N . Tuttavia il numero dei parametri necessari per individuare ciascuna curva diviene ora eccessivo perché sia conveniente l'utilizzo di abachi precalcolati; inoltre anche il calcolo diretto di ciascuna

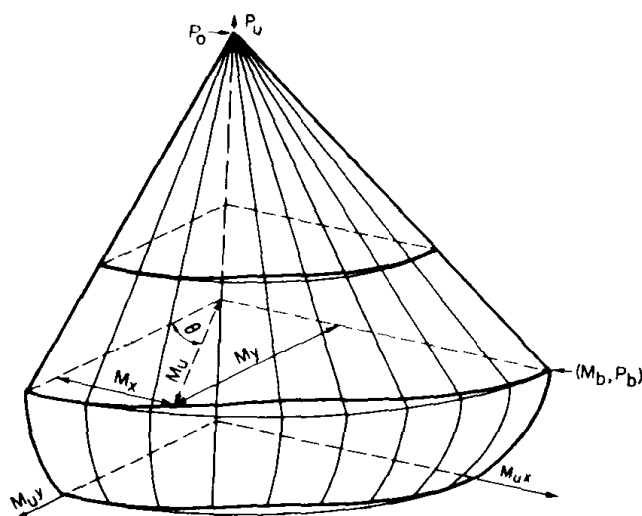


Figura 4.8: Dominio di resistenza di una sezione in cemento armato sollecitata da pressoflessione deviata

superficie risulta piuttosto oneroso. Pertanto, a differenza delle curve di interazione del caso monoassiale, le superfici di stato limite non trovano un utilizzo pratico per la verifica ed il progetto delle sezioni sollecitate da pressoflessione deviata. In questo caso l'approccio diretto, descritto in precedenza, è il più conveniente; sebbene anch'esso sia oneroso, quando la procedura è trasferita in un programma per il calcolatore, diviene possibile applicarlo agevolmente al pari delle verifiche relative alla sollecitazione retta.

Metodi approssimati

Quando non è disponibile un programma per la verifica "esatta" per pressoflessione deviata, almeno per le sezioni rettangolari è possibile usare uno dei metodi approssimati che riconducono il calcolo a due verifiche per sollecitazione retta; qui se ne espongono succintamente due.

Il primo è adottato dal Codice Russo, seguendo i risultati di un lavoro di Bresler: il carico ultimo N_u , di una sezione sollecitata da forza normale eccentrica con componenti flessionali, relative agli assi principali, M_{dx} , M_{dy} , si ottiene con la relazione:

$$\frac{1}{N_u} \simeq \frac{1}{N_{ux}} + \frac{1}{N_{uy}} + \frac{1}{N_{u0}} \quad (4.63)$$

in cui N_{ux} ed N_{uy} sono le forze assiali ultime corrispondenti all'azione separata dei momenti M_{dx} ed M_{dy} rispettivamente, mentre N_{u0} è la forza ultima per pressione centrata. I confronti fatti con le soluzioni "esatte" hanno dimostrato che l'eq. (4.63) dà risultati abbastanza accurati.

Una via alternativa consiste nel cercare un'espressione approssimata delle curve di livello, per $N = \text{cost}$, della superficie di stato limite. Tuttavia la forma di queste curve è funzione di molti parametri: la geometria della sezione, la quantità e la disposizione delle armature, l'entità della forza assiale. Una semplice relazione approssimante è:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ux0}} \right)^n + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uy0}} \right)^m = 1 \quad (4.64)$$

in cui M_{ux0} e M_{uy0} sono i momenti ultimi per pressoflessione retta agente nelle due direzioni principali. Per $m = n = 1$ l'eq. (4.64) corrisponde ad una retta passante per i due punti di stato limite ultimo per pressoflessione retta. Questa ipotesi è certamente prudentiale, in quanto le curve di livello reali presentano sempre una certa convessità verso l'origine, in particolare per valori elevati di N_d . Un criterio ragionevole è quello di assumere il valore di $n = m$ linearmente variabile tra 1 e 2 in funzione del rapporto N_d/N_{u0} , dove N_{u0} è il carico ultimo per pressione centrata.

4.4 Pilastri snelli

Nei paragrafi precedenti di questo capitolo è stato analizzato il comportamento delle sezioni sollecitate da una forza assiale eccentrica. Nel caso di elementi tozzi, cioè per i quali il rapporto tra la lunghezza e la minore delle dimensioni della sezione è sufficientemente piccolo, il problema di valutare la capacità portante dell'elemento è equivalente a quello dell'analisi della sua sezione più sollecitata (ammesso che tutte abbiano la medesima resistenza). Quando un elemento (pilastro) è sollecitato da una forza di compressione, più o meno eccentrica, se è snello, ossia il rapporto tra la dimensione longitudinale e quella trasversale è abbastanza elevato, insorgono altri effetti che ne modificano il comportamento rispetto a quello della sezione considerata isolatamente.

In generale la variazione di configurazione dei corpi prodotta dalla deformazione modifica le sollecitazioni che pertanto vengono a dipendere dalle deformazioni in modo tale che le equazioni di equilibrio divengono non lineari. Tuttavia, poiché normalmente gli spostamenti prodotti dai carichi sono piccoli, si ritiene che l'influenza di questi sulle sollecitazioni sia trascurabile e si assume che lo stato di sollecitazione coincida con quello relativo alla configurazione iniziale non deformata. Tale approssimazione, spesso valida, è detta *teoria del primo ordine* e le sollecitazioni relative alla configurazione indeformata *sollecitazioni del primo ordine*. In alcuni casi però questa semplificazione non è accettabile in quanto gli effetti delle deformazioni sulle sollecitazioni non sono trascurabili; le variazioni delle sollecitazioni prodotte da questi fenomeni sono dette *termini del secondo ordine*.

Un esempio celebre è costituito dall'asta di Eulero; una mensola sollecitata da una forza di compressione N con eccentricità e . La deformazione prodotta dalla flessione aumenta l'eccentricità del carico e pertanto accresce l'entità della flessione: quando il carico approssima il valore critico:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EI \quad (4.65)$$

l'equilibrio diviene impossibile, per quanto piccola sia l'eccentricità iniziale e .

Al carico critico corrisponde una tensione critica:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

dove $\lambda = 2l/\rho$ è il rapporto tra la *lunghezza libera di inflessione*, che per la mensola è il doppio della lunghezza l , ed il raggio di inerzia $\rho = \sqrt{I/A}$; λ viene detta la *snellezza* della trave. Per elementi con piccola snellezza σ_{cr} risulta molto più grande della resistenza del materiale; per questi elementi (tozzi) il collasso avviene prima che gli effetti del secondo ordine possano divenire significativi e pertanto la teoria del primo ordine risulta soddisfacente. Al contrario, quando λ è molto elevato, la tensione critica è molto inferiore alla resistenza; per questi elementi il collasso sopraggiunge a causa dei fenomeni del secondo

ordine mentre in loro assenza il materiale sarebbe ancora in campo elastico. In tal caso la teoria di Eulero, basata sull'ipotesi di comportamento elastico della trave, è adeguata ed il valore di riferimento è effettivamente il carico critico fornito dall'eq. (4.65).² Infine per i valori intermedi di λ vi è una forte interazione tra gli effetti del secondo ordine (non linearità geometrica) e la non linearità del materiale, per cui il carico critico non coincide con quello previsto dalla teoria di Eulero, ma deve essere corretto per tener conto della reale legge tensione-deformazione del materiale. Per gli elementi in cemento armato che, a causa della trascurabile resistenza a trazione del calcestruzzo, dimostrano una rapida deviazione dalla linearità, la teoria di Eulero non è in pratica mai utilizzabile, se non con opportuni aggiustamenti e correzioni.

Poiché, come si è detto, i fenomeni del secondo ordine sono trascurabili quando σ_{cr} è molto maggiore della resistenza, è evidente che questi fenomeni sono generalmente tanto più importanti quanto più la struttura è realizzata con materiali di elevata resistenza; ciò spiega perché i fenomeni del secondo ordine sono particolarmente importanti nello studio delle strutture in acciaio. Per il cemento armato, data la resistenza assai più modesta del calcestruzzo, essi sono generalmente meno importanti; solitamente gli elementi strutturali in cemento armato sono sufficientemente tozzi da consentirne lo studio mediante l'approssimazione del primo ordine. Tuttavia non sono nemmeno rari i casi in cui questo non è vero; ad esempio se si devono realizzare pilastri alti il pericolo delle sollecitazioni del secondo ordine non può essere trascurato.

Tenere conto correttamente dei fenomeni del secondo ordine nelle strutture in cemento armato è un problema complesso: infatti occorre determinare in modo preciso le deformazioni della struttura, compito difficile a causa della fessurazione del materiale. L'analisi della sezione, condotta in precedenza, riguarda il comportamento delle sezioni fessurate. Come verrà chiarito meglio in un successivo capitolo questo stato non riguarda tutte le sezioni dell'elemento; la fessurazione è un fenomeno discreto: tra le fessure rimangono blocchi di calcestruzzo integro e pertanto la reale rigidezza della trave, oltre a variare con la sollecitazione, varia rapidamente da un punto all'altro, assumendo il minimo in corrispondenza delle fessure. La rigidezza "media" dell'elemento risulta compresa tra quella della sezione integra e quella fessurata, avvicinandosi a quest'ultima nelle zone di elevata sollecitazione flessionale. La valutazione accurata della deformabilità di una trave in cemento armato richiede pertanto l'analisi di fenomeni complessi, come l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo, ed è difficile da ottenere, anche con modelli numerici raffinati. Infine si deve tenere presente che le leggi semplificate usate per il calcolo della resistenza ultima della sezione, come la legge parabola-rettangolo del calcestruzzo o quella elasto-plastica senza incrudimento dell'acciaio, sono state fissate con l'ottica di valutare la resistenza, non la deformabilità della sezione; per una valutazione accurata di quest'ultima grandezza si dovrebbero utilizzare relazioni più realistiche, come ad esempio, per il calcestruzzo, l'eq. (2.1).

Nei paragrafi che seguono si analizzeranno alcuni metodi relativi alla valutazione della sicurezza dei pilastri "snelli", soggetti alla sollecitazione di pressoflessione; si esaminerà prima il caso "canonico" della trave vincolata con carrello e cerniera, sollecitata da uno sforzo normale eccentrico con eccentricità costante (asta di Eulero), quindi si tratterà dell'influenza della variazione del momento lungo l'asse ed infine si esaminerà il caso del pilastro inserito in una struttura intelaiata.

²In realtà questa affermazione è vera solo per $e \rightarrow 0$ (asta caricata di punta), altrimenti vi è comunque una certa influenza del comportamento non lineare del materiale.

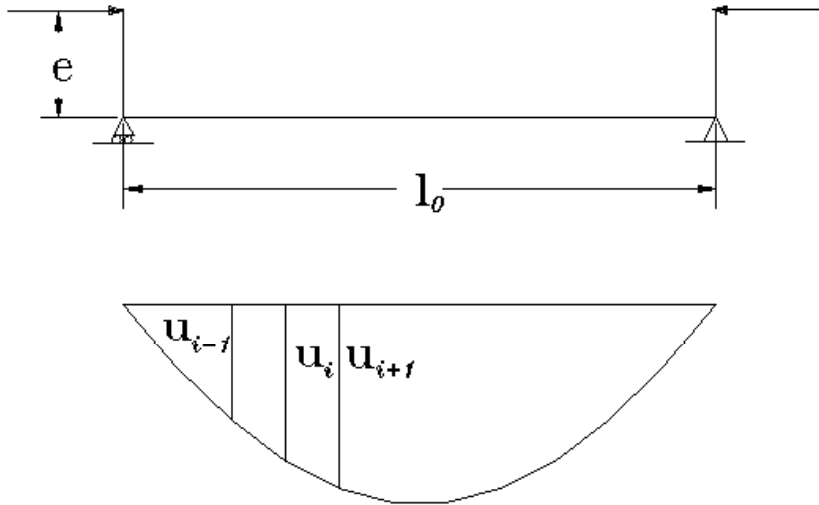


Figura 4.9: Schema dell'asta di Eulero

4.4.1 Il metodo “esatto”

Supponendo di saper determinare, in modo più o meno accurato, la legge momento-curvatura di ciascuna sezione, opportunamente corretta per tener conto del contributo delle parti non fessurate, l'equazione di equilibrio dell'asta di Eulero, vincolata alle estremità con cerniera e carrello e sollecitata da una forza normale con eccentricità costante (fig. 4.9) si scrive facilmente:

$$M(\theta) = N[e + v(x)] \quad (4.66)$$

in cui $v(x)$ indica lo spostamento della linea elastica della trave, $\theta \simeq -d^2v/dx^2$ è la curvatura, N la forza di compressione di eccentricità iniziale e ed $M(\theta)$ indica la legge momento-curvatura della sezione. In condizioni di funzionamento elastico $M = EI\theta$ e la soluzione dell'eq. (4.66) si ottiene con semplici procedimenti analitici.

Nel caso generale in cui $M(\theta)$ è non lineare la soluzione di questa equazione si può ottenere con un procedimento numerico. Divisa l'asta in n conci di lunghezza Δx l'eq. (4.66) si può scrivere in ciascuna delle $n - 1$ sezioni di estremità dei conci, ottenendo così le $n - 1$ equazioni seguenti:

$$M_i(\theta_i) = N(e + v_i) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4.67)$$

Il legame tra gli spostamenti v_i e le curvature θ_i è dato in termini di differenze finite (fig. 4.9):

$$\theta_i = -\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (4.68)$$

Se ora $\{v_i^{(k)}\}$ è una soluzione approssimata dell'eq. (4.67) e $\{\theta_i^{(k)}\}$ è il corrispondente vettore delle curvature, esprimendo il termine non lineare dell'eq. (4.67) con una serie di Taylor troncata al primo ordine nell'intorno di $\{\theta_i^{(k)}\}$, si ha:

$$M_i(\theta_i^{(k)}) + DM_i(\theta_i^{(k)})(\theta_i - \theta_i^{(k)}) = N(e + v_i)$$

dove DM indica la derivata della funzione $M(\theta)$ ed è pertanto la *rigidezza tangente* $K_i^{(k)}$ della sezione i nel punto $\theta_i^{(k)}$. Tenendo conto dell'eq. (4.68) si ottiene quindi il sistema lineare:

$$-K_i^{(k)}v_{i-1} + (2K_i^{(k)} - N\Delta x^2)v_i - K_i^{(k)}v_{i+1} = \Delta x^2 \left(Ne - M_i(\theta_i^{(k)}) + K_i^{(k)}\theta_i^{(k)} \right)$$

risolvendo il quale si ottiene il vettore $\{v_i^{(k+1)}\}$ di successiva approssimazione. Da questo, tramite le (4.68), si ottengono i corrispondenti valori di $\theta_i^{(k+1)}$ ed il procedimento può essere iterato fino a convergenza.

Questo metodo, illustrato per il caso di sollecitazione costante, si può generalizzare senza difficoltà anche per casi in cui la sollecitazione varia lungo l'asse della trave e si può facilmente inserire in un programma di calcolo. La maggiore difficoltà, come si è detto in precedenza, consiste nel determinare in modo corretto la legge momento-curvatura delle sezioni. Quando interessa una stima della capacità massima della resistenza del pilastro, considerando che in prossimità del collasso la fessurazione è molto estesa ed operando a favore di sicurezza, si può assumere che la deformabilità della trave coincida con quella della sezione. In tal caso, con discreta approssimazione, la legge momento-curvatura può essere assimilata ad una spezzata composta con tre tratti rettilinei che congiungono i punti di coordinate $(0, 0) - (\theta_f, M_f) - (\theta_y, M_y) - (\theta_u, M_u)$, dove (θ_f, M_f) è il punto di inizio fessurazione, caratterizzato dal raggiungimento della resistenza a trazione del calcestruzzo, e si ha $\theta_f = M_f/E_c I^*$ (I^* è il momento di inerzia dell'intera sezione omogenizzata); (θ_y, M_y) e (θ_u, M_u) sono i punti relativi al raggiungimento della tensione di snervamento dell'acciaio teso e della resistenza ultima della sezione e si calcolano facilmente mediante i procedimenti indicati nella prima parte di questo capitolo. Determinata la posizione dell'asse neutro y_c , la curvatura si ottiene mediante la relazione:

$$\theta = \frac{|\epsilon_s|}{d - y_c}$$

essendo ϵ_s la deformazione dell'acciaio e d l'altezza utile della sezione.

Il procedimento che è stato illustrato in questo paragrafo, anche se certamente abordabile se si dispone di un calcolatore e di un idoneo programma, rimane comunque abbastanza impegnativo ed in molti casi sproporzionato agli scopi della progettazione corrente. Per tale motivo sono stati sviluppati dei metodi alternativi, certamente meno accurati e generali, ma verificati essere sufficientemente sicuri, che richiedono uno sforzo di calcolo molto più limitato. I due metodi più diffusi sono descritti nei paragrafi seguenti.

4.4.2 Il metodo della colonna modello

Il metodo della "colonna modello" consiste nell'assumere che la linea d'asse deformata della trave sia nota a meno di un parametro che ne definisce l'ampiezza.

Considerando la solita trave vincolata alle estremità con carrello e cerniera e sollecitata da due forze opposte di eccentricità e (fig. 4.9), si assume che l'equazione della deformata della trave sia una senoide:

$$v(x) = f \sin\left(\pi \frac{x}{l_0}\right) \quad (4.69)$$

dove l_0 è la lunghezza della trave e f indica la deformata massima (freccia). Derivando due volte l'eq. (4.69) si ottiene che anche la curvatura è espressa da una legge analoga il

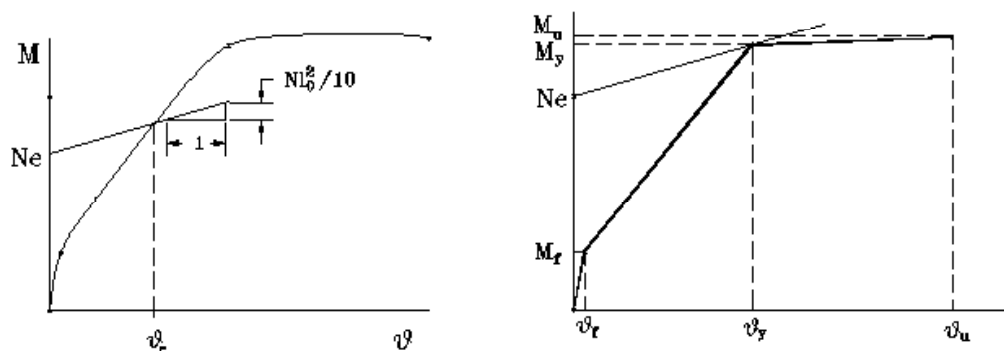


Figura 4.10: Soluzione del problema dell'asta snella con il metodo della colonna modello

cui massimo, raggiunto nella sezione di mezzo, vale:

$$\theta_m = \frac{1}{r} = |v''(l_0/2)| = \frac{\pi^2 f}{l_0^2} \simeq \frac{10f}{l_0^2} \quad (4.70)$$

La verifica del pilastro si esegue controllando che, nella sezione di momento massimo, sia possibile soddisfare l'equazione di equilibrio:

$$M(\theta) = N(e + f) \quad (4.71)$$

tenendo conto dell'eq. (4.70) e della legge momento-curvatura della sezione. La soluzione di questa equazione si può ottenere graficamente (fig. 4.10), riportando sul piano M, θ la legge momento-curvatura della sezione ed una retta di equazione:

$$M = N(e + l_0^2 \theta / 10)$$

Il punto di intersezione, se esiste, tra questa retta e la curva individua il punto di equilibrio.

Se la retta non interseca la curva l'equilibrio è impossibile in quanto la sollecitazione supera la resistenza per ogni valore di θ . Il carico ultimo del pilastro è il massimo valore di N per cui l'eq. (4.71) ha una soluzione, cioè il valore di N per cui la retta di carico diviene tangente a quella della resistenza della sezione.

Come si è già detto, la legge $M(\theta)$ può essere approssimata con una spezzata di due o tre lati; in questo caso il punto di tangenza con la retta di carico deve coincidere o con il punto di collasso della sezione (θ_u, M_u) o con quello di snervamento dell'acciaio (θ_y, M_y). L'inclinazione dell'ultimo tratto della curva $M(\theta)$ è generalmente piccola, pertanto, poiché il primo caso si verifica solo quando la pendenza della curva di carico è inferiore a quella dell'ultimo ramo della spezzata, esso può aversi solo se la quantità $Nl_0^2/10$ è piccola. In termini adimensionali, dividendo le forze per bdf_{cd} e le lunghezze per d , questa condizione implica che la trave abbia una piccola snellezza. In tal caso il carico ultimo così ottenuto è di poco inferiore a quello della sezione.

Nei casi di maggiore interesse, quando la snellezza è abbastanza elevata, il punto di tangenza coincide con quello di snervamento, come mostrato nella fig. 4.10; quindi l'equazione di equilibrio in condizioni critiche si scrive:

$$M_y = N_u(e + l_0^2 \theta_y / 10)$$

da cui si ottiene:

$$N_u = \frac{M_y}{e + l_0^2 \theta_y / 10} \quad (4.72)$$

Questa equazione non fornisce tuttavia una soluzione esplicita del problema poiché M_y e θ_y sono a loro volta funzioni di N . Pertanto la determinazione della soluzione richiede un certo numero di iterazioni, come illustrato nell'esempio che segue.

Esempio 4.9 Per un pilastro di sezione $30 \times 30 \text{ cm}^2$ e con lunghezza libera di inflessione $l_0 = 7 \text{ m}$, armato simmetricamente con $3\phi 22$ ($A = A' = 11.4 \text{ cm}^2$), sollecitato da un carico eccentrico ($e = 30 \text{ cm}$), determinare il carico ultimo con il metodo della colonna modello.

Si prevede l'impiego dei seguenti materiali: Calcestruzzo $R_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$, Acciaio Fe b 44k.

Fissato N si calcolano M_y e θ_y che da esso dipendono; quindi mediante l'eq. (4.72) si calcola N_u . Utilizzando N_u come nuovo valore di N , si itera il procedimento fino a quando $N_u \simeq N$.

N (kN)	M_y (kN cm)	θ_y (cm^{-1})	N_u (kN)
0	10258	$.1139 \times 10^{-3}$	288.3
288.3	13127	$.1390 \times 10^{-3}$	356.6
356.6	13763	$.1454 \times 10^{-3}$	370.7
370.7	13890	$.1467 \times 10^{-3}$	373.5
373.5	13920	$.1470 \times 10^{-3}$	374.1
374.1	13924	$.1471 \times 10^{-3}$	374.2

Il carico ultimo del pilastro risulta $N_u = 374 \text{ kN}$ mentre quello della sezione è 482 kN ; gli effetti del secondo ordine pertanto producono una riduzione della capacità portante di circa il 22%.

Applicando il "metodo esatto" descritto nel paragrafo precedente, discretizzando il pilastro con 11 conci ed utilizzando leggi momento-curvatura bilineari, si ottiene per il carico ultimo il valore $N_u = 357 \text{ kN}$ corrispondente allo spostamento massimo $f = 8.5 \text{ cm}$, maggiore di quello (7.2 cm) previsto dalla colonna modello. \square

Il confronto dei risultati del metodo della colonna modello con quelli del "metodo esatto" condotto nel precedente esempio mostra come l'approssimazione del metodo non sia dalla parte della sicurezza. Questo non deve sorprendere in quanto la forma sinusoidale, adottata per la linea elastica, dà luogo a curvatura nulla agli estremi, quindi è in equilibrio con una legge dei momenti meno severa di quella effettiva. Peraltro si deve sottolineare che al contrario la legge momento-curvatura della sezione fessurata, usata nel metodo "esatto", è invece troppo onerosa perché, come si è già fatto notare, non tiene conto del contributo delle zone non fessurate. Si può ritenere quindi che l'errore per difetto commesso con il metodo della colonna modello sia almeno in parte compensato da quello per eccesso dovuto all'aver sottostimato la rigidezza reale della trave.

La bozza delle Norme Europee per il cemento armato (EC2), suggerisce, per la verifica delle colonne snelle, il metodo della colonna modello. L'uso è limitato ai casi di snellezze λ inferiori a 140 e per eccentricità del carico non inferiori ad un decimo dell'altezza della sezione ($e \geq 0.1h$).

La legge curvatura-freccia proposta dalle stesse norme differisce da quella ottenuta in precedenza per un coefficiente k_1 :

$$f = k_1 \frac{l_0^2}{10} \theta$$

che dipende dalla snellezza della trave nel modo seguente:

$$K_1 = \begin{cases} (\lambda - 15)/20 & \text{se } 15 \leq \lambda \leq 35 \\ 1 & \text{se } \lambda > 35 \end{cases}$$

4.4.3 Il metodo del momento amplificato

Il metodo del momento amplificato (*moment magnifier method*) è indicato, come procedimento approssimato, dalla normativa statunitense ACI.

Sempre ipotizzando che la deformata sia rappresentabile con una sinusoidale di ampiezza f , in condizioni elastiche, nella sezione di momento massimo si ha:

$$M_{mx} = -EIu''(l_0/2) = EI \frac{\pi^2}{l_0^2} f \sin\left(\frac{\pi x}{l_0}\right)_{x=l_0/2} = EI \frac{\pi^2}{l_0^2} f = N_{cr} f$$

dove si è tenuto conto che $EI\pi^2/l_0^2 = N_{cr}$ è il valore del carico critico euleriano di un'asta con lunghezza libera l_0 .

Dall'equilibrio tra i momenti interni e quelli esterni di questa sezione si ottiene quindi:

$$M_{mx} = N(e + f) = N_{cr} f$$

da cui segue:

$$f = \frac{Ne}{N_{cr} - N}$$

e quindi il momento massimo agente sulla trave risulta:

$$N(e + f) = Ne \frac{1}{1 - N/N_{cr}} = M_0 \delta$$

dove $M_0 = Ne$ è il momento del primo ordine e δ è il fattore di amplificazione, che tiene conto degli effetti del secondo ordine, ed è definito dalla relazione:

$$\delta = \frac{1}{1 - N/N_{cr}} \quad (4.73)$$

Partendo da questa relazione la normativa ACI suggerisce di usare, come sollecitazioni di calcolo nella sezione critica del pilastro, il carico assiale N_d ed il momento $M_d \delta$, dove N_d ed M_d sono le sollecitazioni che derivano dall'analisi usuale della struttura (trascurando i fenomeni del secondo ordine) e δ è il fattore di amplificazione fornito dall'eq. (4.73).

Il valore di δ dipende in modo essenziale da N_{cr} , che a sua volta è funzione della rigidezza EI della sezione. Questa rigidezza, rispetto a quella della sezione intera, deve essere ridotta per tener conto degli effetti della fessurazione; le norme ACI suggeriscono due formule alternative:

$$EI = \frac{E_c I_g}{2.5} \frac{1}{1 + \beta_d} \quad \text{o} \quad EI = \left(\frac{E_c I_g}{5} + E_s I_s \right) \frac{1}{1 + \beta_d} \quad (4.74)$$

dove E_c ed E_s sono i moduli elastici del calcestruzzo e dell'acciaio, I_g è il momento d'inerzia dell'intera sezione di calcestruzzo, I_s quello dell'armatura rispetto al baricentro della sezione ed il coefficiente β_d tiene conto delle deformazioni viscosse che di fatto riducono la rigidezza secante dell'elemento. Nelle predette norme questo coefficiente viene preso pari al rapporto tra la quota di N_d dovuta ai carichi permanenti ed il totale:

$$\beta_d = (N_d)_{\text{perm}}/N_d$$

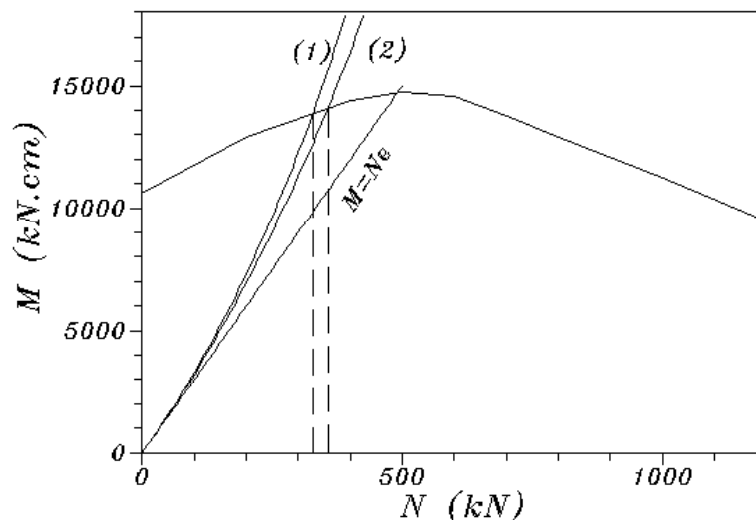


Figura 4.11: Determinazione del carico ultimo di un pilastro snello con il metodo del momento amplificato

Esempio 4.10 Verificare il pilastro dell'esempio 4.9 con il metodo dell'amplificazione del momento.

Per $\beta_d = 0.5$ ed $E_c = 31220 \text{ N/mm}^2$, essendo $I_g = 67500 \text{ cm}^4$, dalla prima delle eq. (4.74) si ha:

$$EI = 5.62 \times 10^7 \text{ kNcm}^2$$

da cui, segue: $N_{cr} = 1131 \text{ kN}$. Analogamente, valutando EI mediante la seconda delle eq. (4.74), si ottiene $N_{cr} = 1490 \text{ kN}$.

La determinazione di N_u , ossia della massima forza di eccentricità e sopportata dal pilastro, si calcola nel modo seguente: sul piano N, M si riporta il dominio di resistenza della sezione e la curva di equazione $M = Ne/(1 - N/N_{cr})$; il punto di intersezione di questa con la frontiera del dominio di resistenza individua il punto di collasso della sezione, e quindi dell'intero pilastro.

Nella fig. 4.11 il procedimento è illustrato per l'esempio in esame; la curva (1) si riferisce al caso con $N_{cr} = 1131 \text{ kN}$, da cui si ottiene $N_u \simeq 330 \text{ kN}$, mentre ad $N_{cr} = 1490 \text{ kN}$ (curva 2) corrisponde $N_u \simeq 360 \text{ kN}$; quest'ultimo valore è molto prossimo a quello ottenuto con il "metodo esatto". □

Quest'ultima osservazione non deve essere interpretata come un significativo test di validità; si tenga presente che nel metodo del momento amplificato un ruolo importante spetta al coefficiente di viscosità β_d , di cui non si tiene conto negli altri metodi; una scelta diversa del valore di β_d , conseguente ad una diversa ipotesi di ripartizione tra i carichi permanenti e variabili, avrebbe condotto a diversi risultati. Inoltre, giova ripeterlo, il "metodo esatto" esatto lo è solo concettualmente, in quanto le leggi momento-curvatura adottate negli esempi sono largamente approssimate.

4.4.4 Momento variabile

La variazione del momento lungo l'altezza del pilastro ha spesso notevole influenza sull'entità degli effetti del secondo ordine. Poiché di solito sui pilastri non agiscono forze significative lungo il loro asse, il momento ha andamento lineare, e quindi i valori massimi sono raggiunti nelle sezioni di estremità. Se gli spostamenti laterali delle estremità

del pilastro sono impediti, gli effetti del secondo ordine in queste sezioni sono nulli ed il momento agente coincide con quello del primo ordine. Gli spostamenti massimi si raggiungono in qualche sezione intermedia ed è in questa che gli effetti del secondo ordine saranno maggiori; la situazione più gravosa si verifica quando nella stessa sezione sono massimi entrambi i termini, il che si verifica quando il momento ha valore costante.

Gli effetti discussi in precedenza divengono particolarmente rilevanti se i due momenti di estremità hanno segno opposto; in tal caso la deformazione della linea d'asse è sensibilmente minore che nel caso di un'asta sollecitata da momenti di uguale segno e lo spostamento massimo si verifica in una sezione dove il momento del primo ordine è sensibilmente minore di quello massimo.

Con il metodo "esatto" non vi è difficoltà nel tener conto dell'andamento variabile del momento, anche per effetto di eventuali carichi agenti lungo l'asse della trave, ma i metodi approssimati, colonna modello ed amplificazione del momento, sono calibrati sul caso di un'asta sollecitata da un momento (del primo ordine) costante. Per poter continuare ad usare questi procedimenti anche in situazioni più complesse e di maggiore interesse pratico si deve determinare un "momento equivalente" che tenga conto degli effetti del reale andamento.

Per il caso di variazione lineare del momento, sia le norme ACI che le EC2 propongono di utilizzare i metodi approssimati illustrati nei paragrafi precedenti, considerando un pilastro sollecitato da un carico con eccentricità costante:

$$|e| = \max\{|0.6e_2 + 0.4e_1|, 0.4|e_2|\} \quad (4.75)$$

dove e_1 ed e_2 sono le eccentricità del carico nelle sezioni di estremità e si ha $|e_2| \geq |e_1|$.

Esempio 4.11 Verificare il pilastro dell'esempio 4.9 nel caso che l'eccentricità del carico vari linearmente tra $e_1 = 20$ cm ed $e_2 = 30$ cm, utilizzando il metodo della colonna modello.

Per l'eq. (4.75) si ha:

$$e = 0.6 \times 30 + 0.4 \times 20 = 26 \text{ cm} > 0.4e_2$$

quindi si procede come nell'esempio 4.9; partendo da un valore di tentativo per N di 400 kN si ottiene:

N (kN)	M_y (kN cm)	θ_y (cm ⁻¹)	N_u (kN)
400	14048	0.148×10^{-3}	422
422	14247	0.150×10^{-3}	427
427	14292	0.151×10^{-3}	428

Quindi il carico ultimo, calcolato con lo schema della colonna modello, risulta $\simeq 428$ kN. Con il metodo "esatto", sempre rappresentando la legge $M(\theta)$ con una bilatera, si ottiene $N_u = 415$ kN. \square

4.4.5 Influenza dei vincoli

Le analisi precedenti sono state svolte per il semplice schema della trave appoggiata. Per il carico di punta ($e \rightarrow 0$) e nel caso di comportamento elastico della trave, ogni altra condizione di vincolo si riconduce a questo schema scegliendo opportunamente la *lunghezza libera di inflessione* l_0 . Per esempio la mensola ha lunghezza libera pari al doppio di quella effettiva ($l_0 = 2l$); la trave doppiamente incastrata, ma ovviamente libera di accorciarsi, ha $l_0 = l/2$ e la trave vincolata da glifi, in modo che siano impediti le rotazioni e permessi gli spostamenti orizzontali, ha $l_0 = l$. In alcuni casi questi risultati derivano solo da condizioni

di simmetria, quindi hanno validità generale, anche se il carico è eccentrico ed i materiali hanno comportamento non lineare.

I pilastri di un edificio con struttura a telaio sono vincolati elasticamente alle estremità dalle travi; le sezioni di estremità pertanto possono parzialmente ruotare. Inoltre queste sezioni possono subire uno spostamento relativo in direzione orizzontale, dovuto allo scorrimento relativo tra i piani. Quest'ultimo moto dipende dalla rigidità di tutti gli elementi verticali della struttura. Se il telaio è dotato di elementi di controvento o di rigide pareti di taglio, gli spostamenti orizzontali risultano molto piccoli e si possono trascurare. In tale caso il telaio viene considerato a nodi fissi ed i pilastri si considerano come elementi isolati dotati di vincoli rigidi nei confronti degli scorrimenti ed elastici per le rotazioni. Quando non esistono elementi di controvento ed i pilastri non sono sufficientemente rigidi, il telaio viene classificato a nodi mobili e nella verifica dei pilastri si deve tener conto della possibilità che si verifichi lo scorrimento interpiano.

In entrambi i casi si può tener conto delle condizioni di vincolo scegliendo un valore opportuno per la lunghezza libera di inflessione del pilastro: questo si ottiene tramite il coefficiente k definito come il rapporto tra la lunghezza libera di inflessione e quella effettiva dell'elemento:

$$l_0 = kl$$

La lunghezza effettiva del pilastro l è definita come la distanza tra gli assi dei vincoli. Il coefficiente k dipende dalla rigidità relativa delle travi e dei pilastri tramite i parametri:

$$\psi = \frac{\sum E_c I_{col} / l_{col}}{\sum E_c \alpha I_b / l_{eff}} \quad (4.76)$$

dove:

E_c Modulo di elasticità del calcestruzzo.

I_{col}, I_b Momenti di inerzia della sezione di calcestruzzo dei pilastri e delle travi.

l_{col} Lunghezza dei pilastri (distanza tra gli assi dei vincoli).

l_{eff} Luce effettiva della trave.

α Coefficiente funzione del vincolo alle estremità delle travi: trave continua ad entrambi gli estremi $\alpha = 1$; trave libera di ruotare all'estremità opposta $\alpha = 0.5$; mensola $\alpha = 0$.

Le somme si estendono a tutti i pilastri e le travi contenute nel piano di inflessione e convergenti al nodo esaminato.

Calcolati i coefficienti ψ_A e ψ_B relativi ai nodi di estremità di ogni pilastro, il coefficiente k si determina mediante il nomogramma riportato in fig. 4.12. Il nomogramma (a) si riferisce ai telai a nodi fissi, quello (b) ai telai a nodi mobili. Si osservi che $\psi = 0$ corrisponde all'incastro, $\psi = \infty$ alla cerniera. Nel caso di spostamenti impediti k varia tra 0.5 (doppio incastro) ed 1 (doppia cerniera). Per i telai a nodi mobili k varia tra 1 (vincoli di incastro e glifo) ed ∞ per i vincoli di cerniera e carrello; in tal caso infatti il pilastro diviene un pendolo che non è in grado di garantire l'equilibrio alle forze laterali.

Le norme europee EC2 sconsigliano di assumere per ψ_A e ψ_B valori inferiori a 0.4.

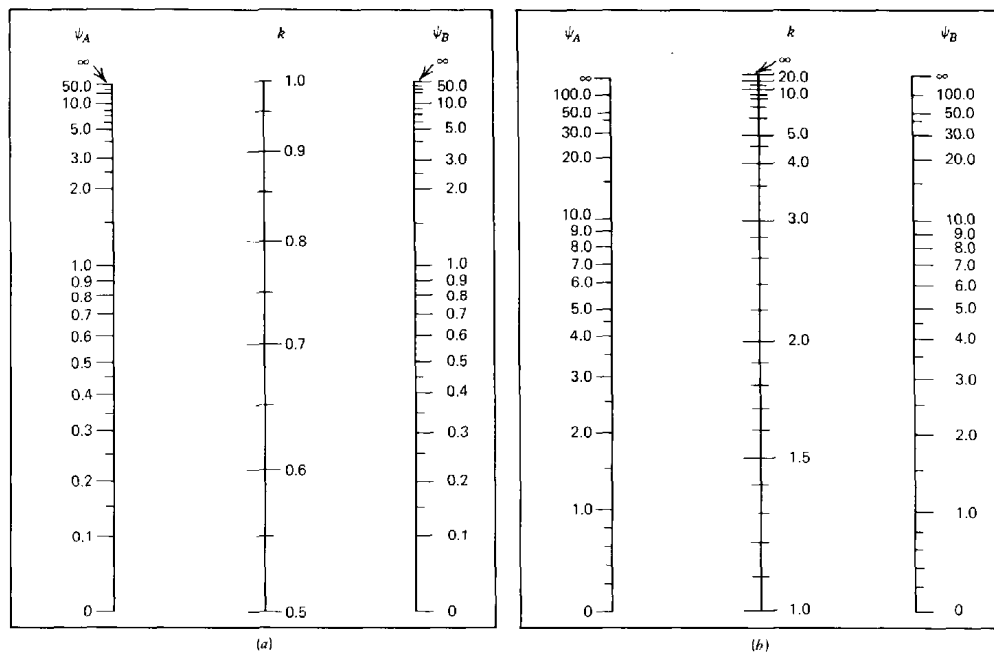


Figura 4.12: Nomogrammi per la determinazione della lunghezza libera di inflessione dei pilastri delle strutture intelaiate