

Capitolo 3

Elementi sollecitati da tensioni normali. La flessione

Sintetizzando quanto visto nel precedente capitolo, si può affermare che gli elementi strutturali in cemento armato sono costituiti da due materiali dalle caratteristiche molto diverse, uno dei quali, il calcestruzzo, ha un comportamento che segue poco il modello elastico, in particolare nei confronti delle sollecitazioni di trazione è fragile ed ha modesta resistenza.

Questi fatti implicano che i risultati della teoria dell'elasticità non possono essere estesi, se non con qualche mediazione ed approssimazione, alle strutture in cemento armato, anche per livelli di sollecitazione modesti, quali quelli associati ai carichi in esercizio. Un modello accurato per le strutture in cemento armato deve tener conto di queste caratteristiche, in particolare deve poter prevedere il fenomeno della fessurazione, dovuto al superamento della resistenza a trazione del conglomerato, e la conseguente perdita di continuità. Modelli di questo tipo, con diversi gradi di accuratezza, esistono e sono inseriti in codici agli elementi finiti non lineari, ma il loro impiego è molto oneroso, sia nel calcolo, sia nella preparazione dei dati e nell'interpretazione dei risultati; l'uso di questi programmi è giustificato solo per strutture di particolare impegno o per scopi di ricerca. Nella progettazione corrente si cerca di fare riferimento, con qualche aggiustamento, al semplice e collaudato calcolo elastico.

In particolare è importante disporre di una teoria della trave di semplicità confrontabile con quella di Navier – De Saint Venant per i materiali omogenei con elasticità lineare. E proprio in questa direzione che si dispone di modelli semplici ma ben collaudati dall'esperienza; questi modelli non sono in grado di cogliere tutte le sfumature del complesso comportamento del cemento armato, né hanno la coerenza della teoria della trave elastica: la loro principale giustificazione risiede nel collaudato successo della loro applicazione come strumenti di progetto.

In questo capitolo verrà analizzato il comportamento delle travi inflesse, nel prossimo quello degli elementi soggetti alla sollecitazione composta di flessione e pressione, in uno successivo verranno esaminate le sollecitazioni che inducono tensioni tangenziali: il taglio e la torsione. Sebbene la sollecitazione di taglio non sia mai disgiunta dalla flessione, una approssimazione accettata e confortata dall'esperienza consente di analizzarle separatamente, il che risulta molto vantaggioso dal punto di vista pratico.

3.1 Ipotesi di calcolo

Si immagini di eseguire un esperimento, applicando ad una trave semplicemente appoggiata due carichi uguali, posti alla stessa distanza dagli appoggi in modo che nella parte centrale la trave sia sollecitata a pura flessione, e di far crescere gradualmente il carico.

Inizialmente, per valori piccoli dei carichi, le tensioni nel calcestruzzo non supereranno la resistenza a trazione; inoltre il comportamento dei materiali (calcestruzzo e acciaio) si potrà ritenere, con buona approssimazione, lineare. Pertanto la trave seguirà lo schema previsto dal modello di Navier: sulla sezione si avrà un diagramma delle deformazioni (e delle tensioni) lineare “intrecciato”, con la massima compressione nel lembo superiore e la massima trazione in quello inferiore. Poiché l’armatura viene usata per compensare la deficienza di resistenza a trazione del conglomerato, è ovvio che essa sarà stata disposta il più vicino possibile al lembo inferiore (teso). Lo strato di calcestruzzo al di sotto delle barre d’armatura (usualmente $1.5 \div 2.5$ cm) è detto *copriferro* e serve a realizzare, oltre alla protezione delle barre dalla corrosione, l’aderenza tra l’armatura ed il calcestruzzo.

Al crescere del carico, in un punto di minor resistenza della fibra più tesa, si innescherà una fessura: poiché il formarsi di una lesione riduce la resistenza della sezione, la fessura tenderà a propagarsi rapidamente, interessando parti sempre maggiori della sezione. In assenza di armatura l’equilibrio diverrebbe impossibile e si avrebbe il collasso della trave. La presenza dell’armatura, invece, consente alle tensioni, che in precedenza erano sopportate dal calcestruzzo teso, di migrare nell’acciaio; la fessura si arresta creando una sezione composta, nella parte superiore, sopra la fessura, dal calcestruzzo compresso, ed in quella inferiore dal solo acciaio teso.

Si osservi che il calcestruzzo teso, nelle zone prossime alla fessura, risulta “scaricato” in quanto la forza ora è stata trasferita all’armatura; solo ad una certa distanza dalla fessura, quando l’aderenza avrà consentito il trasferimento della forza dall’acciaio al calcestruzzo, la sollecitazione sarà di nuovo abbastanza grande da superare la resistenza e produrre un’altra fessura. Quindi una trave inflessa sarà caratterizzata, nella parte tesa, da un certo numero di fessure separate da blocchi di calcestruzzo integro, nei quali le tensioni non hanno superato la resistenza.

La formazione delle fessure giustifica l’ipotesi, valida nell’analisi delle sezioni inflesse e presso-inflesse, di considerare nulla la resistenza a trazione; tuttavia questo non implica che il calcestruzzo possa in ogni caso trattarsi come un materiale privo di resistenza a trazione. I blocchi di calcestruzzo integro tra le fessure svolgono un ruolo essenziale nel trasferire le tensioni dalla parte compressa a quella tesa della sezione, e quindi sono essenziali nel funzionamento a taglio; inoltre consentono che, con buona approssimazione, si possa assumere ancora valida l’ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per cui l’acciaio ha la stessa deformazione del calcestruzzo circostante (in media ovviamente, in quanto in corrispondenza delle fessure il calcestruzzo non è presente).

Non si deve essere tratti in inganno: l’analisi della sezione fessurata si può condurre, con ottima approssimazione, trascurando la resistenza a trazione del conglomerato, ma questa resistenza è invece essenziale per garantire il funzionamento dell’insieme dei due materiali; i soli materiali realmente privi di resistenza a trazione sono quelli granulari sciolti, negli altri casi la resistenza a trazione, anche se piccola, è essenziale per spiegarne il comportamento. L’applicazione di modelli che, incondizionatamente, trascurano la capacità dei materiali di sopportare trazioni produce risultati paradossali, scarsamente utili per le applicazioni.

Le principali ipotesi su cui si basa l’analisi dello stato di tensione delle sezioni di travi sollecitate da azioni normali (flessione e pressione), sono le seguenti:

1. Conservazione delle sezioni piane; ne consegue che la deformazione in ogni punto della sezione è proporzionale alla distanza del punto considerato dall'asse neutro.
2. La resistenza del calcestruzzo teso è trascurabile. La parte tesa della sezione di conglomerato pertanto non contribuisce all'equilibrio: la *sezione reagente* è costituita solo dall'acciaio e dal calcestruzzo compresso.
3. Vi è perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo, pertanto la deformazione di ogni barra coincide con quella del calcestruzzo nei punti immediatamente circostanti.

I legami costitutivi che si adottano per l'acciaio e per il calcestruzzo compresso dipendono dal tipo di analisi: nel calcolo allo stato limite ultimo si usano i diagrammi di calcolo illustrati in precedenza, mentre per l'analisi in campo elastico si assume un legame lineare tra tensioni e deformazioni.

3.2 Calcolo elastico. Il metodo delle tensioni ammissibili

3.2.1 La sezione omogenizzata

La verifica delle strutture con il metodo delle tensioni ammissibili, come è stato illustrato nel precedente capitolo, consiste nel controllare che in nessun punto della struttura le tensioni superino i relativi valori ammissibili. Le tensioni vengono calcolate, per le azioni di esercizio, nell'ipotesi di comportamento elastico dei materiali; nel caso del calcestruzzo il comportamento elastico riguarda solo la parte compressa, mentre, come già sottolineato, il contributo del materiale teso viene trascurato.

Nelle sezioni composte da materiali diversi il modulo elastico E varia tra un punto e l'altro; se si assume l'assenza di scorrimenti, per cui le deformazioni in un punto non dipendono dal materiale che lo occupa, le tensioni risulteranno proporzionali al modulo elastico. Per un'areola dA contenente il punto P ove il materiale ha modulo $E(P)$, si ha allora una forza risultante:

$$dF = \epsilon E(P) dA$$

dove ϵ è la deformazione nel punto P .

Introducendo un modulo elastico di riferimento E_0 , moltiplicando e dividendo l'equazione precedente per questa grandezza, si ottiene:

$$dF = \epsilon E_0 \frac{E(P)}{E_0} dA$$

Questa relazione si può interpretare nel modo seguente: dF è la risultante delle tensioni, in un materiale di modulo E_0 , agenti sull'area dA pesata con il fattore $E(P)/E_0$. In questo modo ci si può riferire ad un materiale unico, di modulo E_0 , purché le aree degli elementi vengano pesate con il rapporto tra il modulo effettivo e quello di riferimento.¹

Questo artificio, detto *omogeneizzazione della sezione* in quanto virtualmente la riconduce ad una omogenea con modulo E_0 , risulta particolarmente conveniente nel calcolo elastico delle sezioni in cemento armato, perché le sezioni delle barre di armatura possono

¹Il vantaggio di questa operazione consiste nel fatto che, essendosi ricondotti al caso di un materiale omogeneo, sono ancora validi i teoremi geometrici della teoria della flessione, ad esempio le proprietà del baricentro e dell'ellisse di inerzia. Tali grandezze tuttavia dovranno riferirsi, ora, ad una sezione costituita da un materiale con "densità" variabile, pari a $E(P)/E_0$.

ragionevolmente considerarsi come elementi puntiformi di area A_{si} ; dopo l'omogeneizzazione si potrà assumere per ciascuna barra lo stesso modulo del calcestruzzo ed un'area omogeneizzata $(E_s/E_c)A_{si}$.

Il rapporto tra i moduli elastici dell'acciaio e del calcestruzzo è detto *coefficiente di omogeneizzazione*, ed abitualmente viene indicato con il simbolo n :

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.1)$$

il suo valore, fissato dalla normativa italiana, si assume uguale a 15.

È interessante osservare che, facendo uso dell'eq. (2.2), si ottengono per il calcestruzzo dei valori del modulo elastico compresi tra 22000 e 40000 N/mm², al variare di R_{ck} tra 15 e 50 N/mm². Poiché per il modulo elastico dell'acciaio si può assumere il valore di 205000 N/mm², dall'eq. (3.1) si ottengono valori di n compresi tra 9.5 e 5.25, quindi sensibilmente inferiori al 15 fissato dalle norme.

La spiegazione di questa apparente contraddizione sta nel fatto che il modulo elastico E_c tiene conto solo della deformabilità istantanea del calcestruzzo, mentre per l'azione dei carichi permanenti si sviluppa nel tempo anche la deformazione viscosa, la cui entità, come visto, è mediamente maggiore di quella istantanea. Il valore 15 del coefficiente di omogeneizzazione tiene conto, in modo forfettario e convenzionale, del contributo della viscosità alla deformazione del calcestruzzo.

Per quanto visto, nel calcolo elastico, le sezioni delle travi in cemento armato sollecitate da tensioni normali, possono considerarsi come composte di un unico materiale: il calcestruzzo. La *sezione reagente omogeneizzata* è pertanto costituita dalla parte compressa della sezione di calcestruzzo e dalle armature, le cui aree sono amplificate (omogeneizzate) mediante il modulo n . A questa sezione si possono applicare tutti i risultati della teoria elastica delle travi composte di materiale omogeneo.

Tuttavia il problema dell'analisi delle sezioni in cemento armato risulta sensibilmente più complesso; infatti, ad eccezione dei casi in cui la sezione è interamente compressa, la parte reagente non è nota a priori, in quanto dipende dallo stato di tensione che, ovviamente, è a sua volta funzione dalla geometria della sezione. Pertanto il problema dà luogo ad un sistema di equazioni la cui soluzione, con l'eccezione di alcuni casi semplici, non può ottenersi analiticamente, ma richiede l'impiego di procedure numeriche iterative.

Fortunatamente il caso più semplice da trattare, quello della flessione retta delle sezioni rettangolari, è anche il più frequente che si incontra in pratica. I casi più complessi poi si presentano oggi molto meno problematici che nel passato, data la grande diffusione di mezzi di calcolo potenti che consentono di risolverli, quando si disponga delle procedure opportune, in tempi estremamente brevi.

3.2.2 La flessione retta

Una sezione si dice che è sollecitata a flessione retta quando la risultante delle sollecitazioni è una coppia che appartiene ad un piano normale alla sezione che passa per uno degli assi principali di inerzia. In questo caso l'*asse neutro* risulta ortogonale all'*asse di sollecitazione* (traccia del piano della coppia sul piano della sezione) e quindi parallelo all'altro asse di inerzia.

Questa proprietà si applica anche alle sezioni in cemento armato ma, ovviamente, con riferimento alla sezione reagente; poiché questa non è nota a priori, normalmente non è possibile stabilire se una certa sollecitazione corrisponde o no ad una flessione retta.

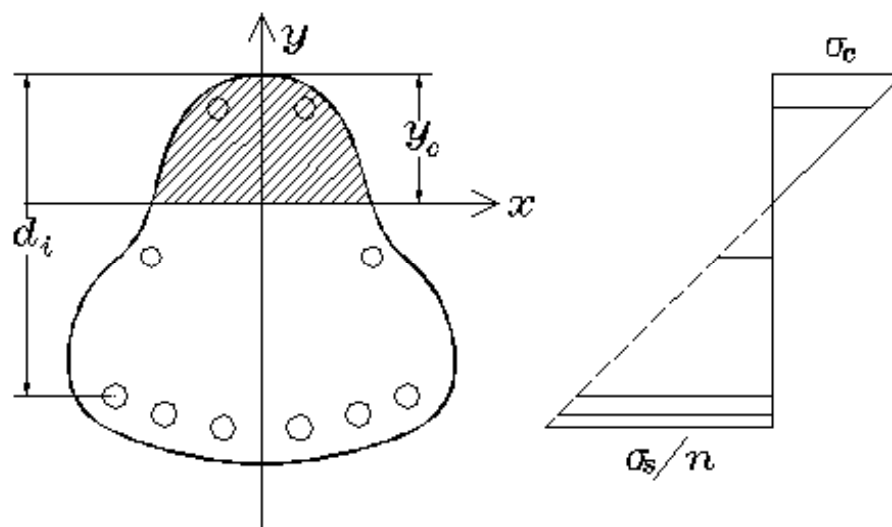


Figura 3.1: Sezione rettangolare in cemento armato sollecitata da flessione retta

Infatti la coincidenza dell'asse di sollecitazione con uno degli assi di inerzia della sezione geometrica non garantisce, in generale, che questa condizione sarà verificata anche per la sezione *parzializzata*. Fa eccezione il caso delle sezioni che hanno un *asse di simmetria*. L'asse di simmetria è, come noto, anche asse principale d'inerzia; se la sollecitazione agisce secondo quest'asse e l'asse neutro risulta ad esso perpendicolare, la sezione parzializzata sarà ancora simmetrica rispetto allo stesso asse e quindi la sollecitazione rimarrà retta anche con riferimento alla sezione reagente omogenizzata.

Si può concludere che una sezione è sollecitata a flessione retta² se ha un asse di simmetria e questo coincide con l'asse di sollecitazione. La condizione di sollecitazione retta semplifica sensibilmente il problema; infatti nell'analisi delle sezioni in cemento armato è fondamentale la determinazione della posizione dell'asse neutro che, separando la sezione compressa da quella tesa, di fatto individua la parte di calcestruzzo reagente. In caso di sollecitazione retta l'asse neutro, essendo ortogonale a quello di sollecitazione, ha giacitura nota; pertanto il problema della sua individuazione presenta una sola incognita anziché due.

Formulazione generale

Si consideri una sezione simmetrica sollecitata a flessione semplice da una coppia di momento M agente secondo l'asse di simmetria della sezione; per quanto visto la sollecitazione è retta e pertanto l'asse neutro avrà giacitura ortogonale all'asse di sollecitazione. Come mostrato in fig. 3.1, si assuma un riferimento ortogonale, l'asse x coincidente con l'asse neutro e l'asse y con quello di simmetria. La condizione che, per la sollecitazione di flessione semplice, l'asse neutro passi per il baricentro della sezione omogenizzata, si esprime:

$$S_n^* = \int_{A^*} y dA = \int_{A_{cc}} y dA + n \sum_{i=1}^m y_{si} A_{si} = 0 \quad (3.2)$$

² analoghe considerazioni possono svolgersi per la sollecitazione di pressione eccentrica.

in cui A^* indica l'area della sezione omogenizzata, A_{cc} l'area della sezione di calcestruzzo reagente (compressa), mentre A_{si} è l'area della i -esima barra di ordinata y_{si} nel riferimento adottato.

La sola incognita nell'eq. (3.2) è y_c , che individua la posizione dell'asse neutro e quindi l'effettiva sezione reagente; la sua determinazione fornisce gli elementi necessari per il calcolo delle tensioni. Infatti posto:

$$I_G^* = \int_{A_{cc}} y^2 dA + n \sum_{i=1}^m y_{si}^2 A_{si} \quad (3.3)$$

in cui I_G^* è il momento di inerzia baricentrico della sezione omogenizzata, si ha:

$$\sigma_c(y) = \frac{M}{I_G^*} y \quad \sigma_{si} = n \frac{M}{I_G^*} y_{si} \quad (3.4)$$

dove $\sigma_c(y)$ indica la tensione nella fibra di ordinata y del calcestruzzo compresso e σ_{si} è la tensione nella i -esima barra di armatura. Si osservi che la tensione nell'armatura si ottiene con la stessa relazione impiegata nel calcestruzzo, ma amplificata del fattore n . Infatti poiché per l'ipotesi di perfetta aderenza i due materiali hanno la stessa deformazione si ha:

$$\sigma_s = E_s \epsilon = \frac{E_s}{E_c} E_c \epsilon = n \sigma_c$$

in cui $\sigma_c = E_c \epsilon$ è la tensione del calcestruzzo per effetto della deformazione ϵ .³

Pur essendo la sola incognita, y_c non compare esplicitamente nell'eq. (3.2); questa assume una forma più chiara se si esegue un cambiamento del riferimento, trasladandolo in direzione y della quantità y_c ed orientando le ordinate verso il basso. Indicando con ξ ed η gli assi del nuovo riferimento:

$$x = \xi \quad y = y_c - \eta$$

per le armature si ha $y_{si} = y_c - d_i$ ($d_i = \eta_{si}$ è la distanza della barra i dal lembo compresso della sezione). Sostituendo queste relazioni nell'eq. (3.2) si ottiene:

$$y_c A_{cc} - \int_{A_{cc}} \eta dA + n \left(y_c \sum_{i=1}^m A_{si} - \sum_{i=1}^m d_i A_{si} \right) = 0$$

Raccogliendo i termini in y_c questa equazione si scrive:

$$y_c A^* - \left(\int_{A_{cc}} \eta dA + n \sum_{i=1}^m d_i A_{si} \right) = 0 \quad (3.5)$$

dove $A^* = A_{cc} + n \sum_{i=1}^m A_{si}$ è l'area reagente omogenizzata.

L'equazione (3.5) non è ancora esplicita in y_c in quanto l'area A_{cc} della parte compressa della sezione dipende a sua volta dalla posizione dell'asse neutro; per essere resa esplicita occorre precisare la forma geometrica della sezione.

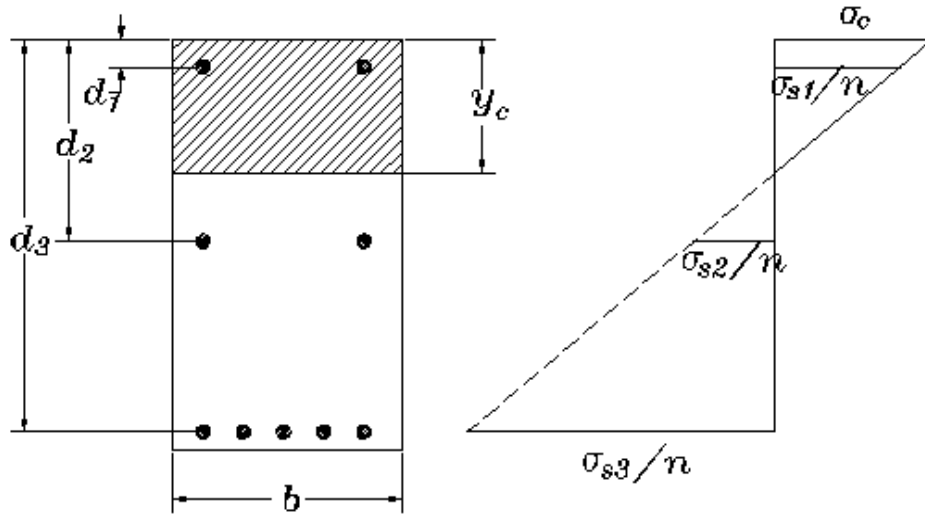


Figura 3.2: Schema della sezione rettangolare parzializzata

Sezione rettangolare

Per una sezione rettangolare, come quella illustrata in fig. 3.2, l'eq. (3.5) si esplicita facilmente. Infatti in tal caso si ha:

$$A^* = by_c + nA_s$$

$$\int_{A_{cc}} \eta dA = b \int_0^{y_c} \eta d\eta = \frac{1}{2}by_c^2$$

in cui $A_s = \sum_{i=1}^m A_{si}$ indica l'area totale delle armature. Sostituendo queste espressioni nell'eq. (3.5) risulta:

$$y_c(by_c + nA_s) - \frac{1}{2}by_c^2 - nd_GA_s = 0 \quad (3.6)$$

avendo indicato con d_G la distanza del baricentro delle armature dal lembo compresso della sezione:

$$d_G = \frac{\sum_{i=1}^m d_i A_{si}}{A_s}$$

Sviluppando l'eq. (3.6) si ottiene un'equazione di secondo grado in y_c :

$$y_c^2 + 2\frac{nA_s}{b}y_c - 2\frac{nA_s}{b}d_G = 0$$

la cui radice positiva fornisce la posizione dell'asse neutro:

$$y_c = \frac{nA_s}{b} \left(\sqrt{1 + 2\frac{bd_G}{nA_s}} - 1 \right) \quad (3.7)$$

³Qui in realtà si intende un materiale elastico con modulo E_c e quindi reagente anche a trazione.

Calcolata la posizione dell'asse neutro è immediato determinare il momento di inerzia baricentrico della sezione omogenizzata; per l'eq. (3.3) si ha:

$$I_G^* = \frac{1}{3}by_c^3 + n \sum_{i=1}^m (y_c - d_i)^2 A_{si} \quad (3.8)$$

e quindi i valori massimi delle tensioni di compressione nel calcestruzzo e di trazione nell'acciaio sono dati dalle relazioni (eq. (3.4)):

$$\sigma_{cm} = \frac{M}{I_G^*} y_c \quad \sigma_{sm} = n \frac{M}{I_G^*} (y_c - d_m) \quad (3.9)$$

avendo indicato con d_m la distanza dell'armatura più lontana dal lembo compresso.⁴

Dimensionamento della sezione

La progettazione strutturale si svolge mediante un procedimento di prova e correzione: assegnate le dimensioni degli elementi strutturali e valutati i carichi se ne determinano le sollecitazioni e quindi si verifica che queste non superino i limiti stabiliti; se qualche condizione non è soddisfatta si modificano le dimensioni degli elementi interessati e si esegue una nuova verifica. Questo avviene non soltanto perché il procedimento diretto del calcolo delle dimensioni degli elementi è troppo complesso per essere perseguito, ma anche perché il problema è largamente indeterminato ed inoltre spesso esistono vincoli di altro genere, architettonici, costruttivi, ecc . . . , che impongono delle ulteriori condizioni alle dimensioni delle strutture.

Ciò premesso, è tuttavia utile disporre di semplici relazioni per il dimensionamento delle sezioni, da impiegarsi ad esempio nell'analisi preliminare. Si deve tener conto inoltre che usualmente l'analisi strutturale delle opere in cemento armato viene condotta con riferimento alle sezioni geometriche in calcestruzzo, considerate elastiche e reagenti a trazione, senza tener conto dell'armatura: l'armatura quindi si può calcolare in modo diretto, in quanto le sollecitazioni, nei limiti di questa approssimazione, non dipendono da essa.

Formule di progetto si ottengono facilmente per le sezioni rettangolari con un solo livello di armatura. Benché formule più complesse si possano ottenere per le sezioni con armatura posta anche al lembo compresso, non vale la pena soffermarsi su esse, poiché ai fini pratici sono sufficienti quelle relative alla sezione semplicemente armata, i cui risultati si possono estendere, con qualche approssimazione, anche ai casi più generali.

Si consideri una sezione rettangolare, come quella illustrata in fig. 3.3, con un solo livello di armatura e sollecitata a flessione retta da una coppia di momento M . Si vogliono determinare le dimensioni della sezione e l'armatura necessaria perché le tensioni massime nei materiali siano esattamente quelle ammissibili.

Come si vede dal digramma delle tensioni riportato in fig. 3.3, questa condizione implica che il rapporto $K = y_c/d$ risulta definito dai valori ammissibili delle tensioni nei materiali:

$$K = \frac{y_c}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s/n} \quad (3.10)$$

⁴Normalmente si indicano con segno positivo le tensioni di trazione. Nel cemento armato tuttavia è conveniente rovesciare questa convenzione, assumendo positive le compressioni. Poiché usualmente la verifica riguarda il massimo (in valore assoluto) della compressione del calcestruzzo e della trazione dell'acciaio, quando questo non induce ambiguità, si farà riferimento al valore assoluto delle tensioni.

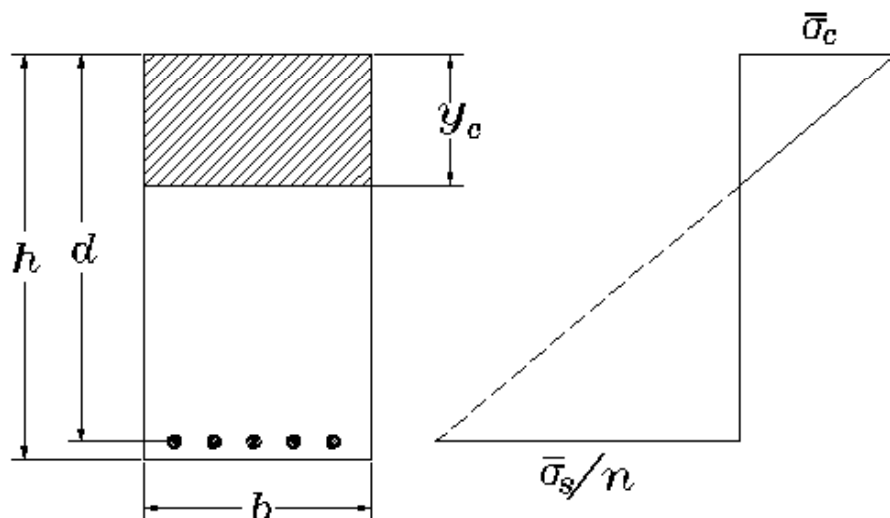


Figura 3.3: Sezione rettangolare con semplice armatura: condizioni di progetto.

Per l'equilibrio della sezione, la risultante C delle tensioni di compressione del calcestruzzo e quella T delle trazioni nell'armatura formano una coppia di momento M . Il braccio della coppia, z , è la distanza tra queste risultanti. Poiché la sezione è rettangolare ed il diagramma delle compressioni è un triangolo di altezza y_c , tale risultante passa per il punto, sull'asse di simmetria, distante $y_c/3$ dal lembo compresso della sezione; pertanto:

$$z = d - \frac{y_c}{3} = d \left(1 - \frac{K}{3} \right) = d\zeta$$

dove $\zeta = 1 - K/3$ è il rapporto tra il braccio z e l'altezza utile d .⁵

Sostituendo nell'equazione precedente l'espressione di K (eq. (3.10)), si ha:

$$\zeta = \frac{2n\bar{\sigma}_c + 3\bar{\sigma}_s}{3(n\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s)} \quad (3.11)$$

Per l'equilibrio della sezione, il momento esterno M dovrà uguagliare quello della coppia interna:

$$M = Cz = Tz \quad (3.12)$$

dove C e T valgono rispettivamente:

$$C = \int_{A_{cc}} \sigma_c dA = \frac{1}{2} b y_c \bar{\sigma}_c \quad T = A_s \bar{\sigma}_s \quad (3.13)$$

Sostituendo l'espressione di C nell'eq. (3.12) e tenendo conto delle definizioni di z e K si ha:

$$M = \frac{1}{2} K \zeta \bar{\sigma}_c b d^2$$

⁵L'altezza utile delle sezioni in cemento armato è la distanza tra il lembo compresso e l'armatura maggiormente tesa. Normalmente differisce dall'altezza effettiva h della sezione in calcestruzzo per l'altezza del copriferro.

$\bar{\sigma}_c$	$\bar{\sigma}_s = 115$		$\bar{\sigma}_s = 155$		$\bar{\sigma}_s = 215$		$\bar{\sigma}_s = 255$	
	α	ζ	α	ζ	α	ζ	α	ζ
6.0	0.0298	0.854	0.0321	0.877	0.0354	0.902	0.0374	0.913
6.5	0.0281	0.847	0.0302	0.871	0.0332	0.896	0.0350	0.908
7.0	0.0267	0.841	0.0286	0.865	0.0313	0.891	0.0329	0.903
7.5	0.0254	0.835	0.0271	0.860	0.0296	0.885	0.0311	0.898
8.0	0.0243	0.830	0.0259	0.854	0.0281	0.881	0.0296	0.893
8.5	0.0233	0.825	0.0248	0.849	0.0269	0.876	0.0282	0.889
9.0	0.0224	0.820	0.0238	0.845	0.0257	0.871	0.0269	0.885
9.5	0.0216	0.815	0.0229	0.840	0.0247	0.867	0.0258	0.880
10.0	0.0209	0.811	0.0220	0.836	0.0237	0.863	0.0248	0.876
10.5	0.0202	0.807	0.0213	0.832	0.0229	0.859	0.0239	0.873
11.0	0.0196	0.803	0.0206	0.828	0.0221	0.855	0.0231	0.869

Tabella 3.1: Valori dei coefficienti α e ζ . Tensioni in N/mm²; M in kN×m, b e d in m.

Questa equazione si può risolvere rispetto a d o b , ottenendo:

$$d = \alpha \sqrt{\frac{M}{b}} \quad b = \alpha^2 \frac{M}{d^2} \quad (3.14)$$

in cui α è un coefficiente, funzione di n e dei valori delle tensioni ammissibili dei materiali:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{K\zeta\bar{\sigma}_c}} \quad (3.15)$$

Per le relazioni (3.14), fissata una delle dimensioni della sezione (b o d), se ne può determinare l'altra in modo che la tensione nel calcestruzzo sia quella fissata.

Dalla seconda delle equazioni (3.12), noto d , si calcola facilmente l'area di armatura occorrente:

$$T = A_s \bar{\sigma}_s = \frac{M}{z} = \frac{M}{\zeta d}$$

da cui:

$$A_s = \frac{M}{\zeta d \bar{\sigma}_s} \quad (3.16)$$

I valori dei coefficienti α e ζ che compaiono nelle formule di progetto (3.14) e (3.16) dipendono, oltre che dal coefficiente n , dalle tensioni ammissibili del calcestruzzo e dell'acciaio e sono riportati, per i valori più frequenti di $\bar{\sigma}_c$ e $\bar{\sigma}_s$, nella tabella 3.1.

L'equazione (3.16) è particolarmente importante; in essa l'unico parametro che dipende da $\bar{\sigma}_c$ e da n è il coefficiente del braccio delle forze interne ζ . Un esame della tabella 3.1 dimostra che ζ è poco sensibile alle variazioni delle tensioni ammissibili: nel campo dei valori riportati in tabella la variazione è circa compresa tra 0.8 e 0.9.⁶ Questo fatto è importante per diversi motivi: 1) giustifica in parte l'adozione di un coefficiente di omogeneizzazione forfettario e convenzionale, indipendente dal reale modulo elastico del calcestruzzo, in quanto l'area di armatura richiesta per resistere ad un momento M è praticamente indipendente dal valore di n ; 2) consente di dimensionare l'armatura tesa occorrente, quando sia fissata l'altezza della sezione, senza necessità di determinare la tensione del calcestruzzo.

⁶Anche se qui non è analizzata, vi è una analoga scarsa sensibilità anche nei confronti di n .

Quest'ultima osservazione semplifica notevolmente il dimensionamento delle armature: si tenga presente che generalmente in una trave la sollecitazione massima viene raggiunta in una sezione; tuttavia, per ragioni costruttive, la sezione di calcestruzzo comunemente è mantenuta costante in tutta la campata, spesso anche in più campate di uno stesso allineamento. Non però l'armatura, che viene fatta variare di sezione in sezione (ovviamente in modo discreto), seguendo la legge di variazione del momento. Le verifiche delle sezioni possono limitarsi a quelle critiche più sollecitate, mentre la determinazione dell'armatura occorrente nelle sezioni intermedie si calcola facilmente con l'eq. (3.16).

Comunemente si assume $\zeta \sim 0.9$. Questo è un poco maggiore della media dei valori riportati nella tabella 3.1, ma si deve tener presente che se, come accade sovente, vi è un certo quantitativo di armatura nella zona compressa, il braccio delle risultanti delle tensioni aumenta; inoltre gli acciai di qualità inferiore, a cui corrispondono i valori minori di ζ , sono oggi raramente usati.

Sezioni a T ed I

La forma rettangolare è praticamente la sola per cui l'integrale nell'eq. (3.5) si esplicita facilmente in modo tale che se ne possa dare una soluzione in forma chiusa. Generalmente questa equazione deve essere risolta numericamente con un procedimento iterativo; un metodo di facile applicazione sarà illustrato nel successivo paragrafo.

Come è già stato notato, la sezione rettangolare è quella che in pratica si incontra più di frequente; tuttavia è anche abbastanza comune l'impiego delle sezioni a T; questo avviene non soltanto perché questa forma è la più razionale nelle sezioni inflesse, poiché concentra l'area dove il materiale è maggiormente sollecitato, ma anche in quanto l'intersezione delle travi con le solette da esse portate genera, anche involontariamente, una sezione resistente che assume la forma a T.

A questo proposito la normativa italiana prescrive quanto segue:

Nel calcolo di nervature solidali con solette, salvo più accurata determinazione, si può ammettere, nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, come collaborante con la nervatura, da ciascun lato, una striscia di soletta di larghezza pari alla maggiore fra le dimensioni seguenti:

- un decimo della luce della nervatura;
- cinque volte lo spessore della soletta più una volta la larghezza dell'eventuale raccordo della soletta.

In nessun caso la larghezza di soletta collaborante da ciascun lato può superare la distanza fra la sezione in esame e quella in cui ha termine la soletta, né la metà della luce fra le nervature.

Per luci di qualche importanza e comunque superiori a 5 m, o in presenza di rilevanti carichi concentrati, sono da prevedersi adeguati dispositivi di ripartizione.

Il calcolo delle sezioni a T si riconduce facilmente al caso delle sezioni rettangolari. Infatti si possono verificare due situazioni, illustrate nella fig. 3.4:

1. L'asse neutro taglia la sezione in corrispondenza delle ali ($y_c \leq s$).

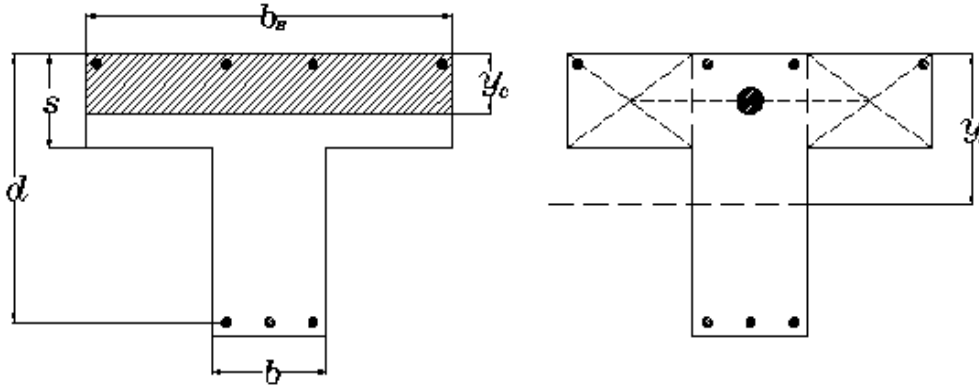


Figura 3.4: Sezione a T: (a sinistra) l'asse neutro attraversa la soletta e (a destra) l'asse neutro è al di sotto della soletta

2. L'asse neutro attraversa la sezione al di sotto delle ali ($y_c > s$).

Nel primo caso la situazione è del tutto identica, ai fini della resistenza a flessione, a quella di una sezione rettangolare di base b_s (larghezza in corrispondenza delle ali). Infatti il calcestruzzo al di sotto dell'asse neutro viene trascurato e pertanto, ai fini del calcolo delle tensioni normali, la sua presenza è inutile. Quindi, se si verifica la situazione (1), il calcolo delle sollecitazioni si svolge usando le eq. (3.7) – (3.9), ponendo b_s in luogo di b .

Nel secondo caso tutto il calcestruzzo delle ali risulta compresso ed è pertanto reagente; pur non essendo indispensabile, anche questo caso si può ricondurre a quello della sezione rettangolare con base uguale alla larghezza dell'anima b , trasformando l'area delle ali in quella di una barra di acciaio equivalente:

$$A_{se} = \frac{(b_s - b)s}{n}$$

concentrata nel baricentro alla distanza $d_e = s/2$ dal lembo compresso. Le formule (3.7) – (3.9) si applicano ancora, ove si sostituisca all'area totale delle armature, A_s , l'area equivalente $A_t = A_s + A_{se}$ posta nel baricentro $d_t = (d_G A_s + d_e A_{se})/A_t$.

Determinata la posizione dell'asse neutro, nel calcolo del momento di inerzia della sezione omogenizzata si deve tener conto che l'area delle ali è diffusa su di un'altezza s e non concentrata nel baricentro; pertanto il calcolo si svolge con riferimento alla sezione effettiva e non a quella rettangolare equivalente:

$$I_G^* = \frac{1}{3} [b_s y_c^3 - (b_s - b)(y_c - s)^3] + n \sum_{i=1}^m A_{si} (y_c - d_i)^2 \quad (3.17)$$

Ovviamente a priori non è nota quale delle due situazioni si verifichi. Pertanto è necessario procedere per tentativi: supponendo valida l'ipotesi (1) si calcola la posizione dell'asse neutro per una sezione rettangolare di base b_s ; se risulta $y_c \leq s$ l'ipotesi è verificata e pertanto si può continuare il calcolo come indicato nel primo caso; se invece $y_c > s$ l'ipotesi (1) risulta falsa ed il calcolo deve essere ripetuto assumendo valida l'ipotesi (2) che, per esclusione, deve essere necessariamente vera.

Si deve peraltro osservare che se l'asse neutro cade poco al di sotto della soletta lo scarto tra le due soluzioni risulta minimo, in quanto il contributo della zona di calcestruzzo al di sotto delle ali, che non esiste ma viene messa in conto dalla prima soluzione, è piccolo poiché, essendo prossima all'asse neutro, su essa agirebbero tensioni molto piccole. Questo è utile non tanto ai fini della verifica, per cui non è difficile utilizzare la soluzione esatta, ma per il dimensionamento, che si può fare, nella maggior parte dei casi, usando le formule valide per la sezione rettangolare, assumendo per b il valore della larghezza delle ali compresse.

Nel caso in cui il verso del momento esterno è tale da comprimere le fibre inferiori, assumendo che, come avviene di solito, l'asse neutro cada al di fuori della soletta, questa risulta tesa e non svolge alcun ruolo. Pertanto la sezione si comporta in questa situazione come se fosse rettangolare con base uguale alla larghezza b dell'anima.

Le sezioni ad I (o doppio T), sono di impiego meno frequente nel cemento armato ordinario, mentre sono spesso usate in quello precompresso. Se si assume, come è lecito attendersi, che l'asse neutro cada al di sopra delle ali inferiori della trave, queste sezioni si comportano esattamente come delle analoghe a semplice T, e la presenza della soletta inferiore può essere ignorata.

Sezioni di forma arbitraria. Il metodo delle strisce

Nel caso di sezioni di forma qualsiasi (ma simmetriche) come quella di fig. 3.1, l'equazione (3.5) si può risolvere mediante un semplice procedimento iterativo. Dividendo la sezione in strisce sottili di altezza $\Delta\eta_i$, indicando con η_i l'ordinata del baricentro della striscia, si avrà:

$$A_{cc} = \int_0^{y_c} b(\eta) d\eta \simeq \sum_i b(\eta_i) \Delta\eta_i$$

$$\int_0^{y_c} \eta b(\eta) d\eta \simeq \sum_i \eta_i b(\eta_i) \Delta\eta_i$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le strisce compresse, cioè che giacciono al di sopra dell'asse neutro, e $b(\eta)$ indica la larghezza della sezione in corrispondenza della fibra posta a distanza η dal lembo compresso.

Sostituendo le due espressioni precedenti nell'eq. (3.5) risulta rispetto ad y_c , si ha:

$$y_c \simeq \frac{\sum_i \eta_i b(\eta_i) \Delta\eta_i + n \sum_{j=1}^m d_{sj} A_{sj}}{\sum_i b(\eta_i) \Delta\eta_i + n \sum_{j=1}^m A_{sj}} \quad (3.18)$$

Il procedimento consiste nell'aggiungere termini alle sommatorie relative alle strisce della sezione di calcestruzzo fino a che non risulta:

$$y_c \sim \eta_k + \frac{\Delta\eta_k}{2}$$

in cui k è l'indice dell'ultima striscia sommata; questo implica che nelle sommatorie che approssimano gli integrali è stata presa in conto tutta e sola la parte di sezione compressa.

Trovata la posizione dell'asse neutro, il momento di inerzia della sezione reagente si calcola agevolmente con una analoga approssimazione. Se le strisce sono abbastanza sottili da poterne trascurare il momento di inerzia proprio si ha:

$$I_G^* \simeq \sum_{i=1}^k y_i^2 b(y_i) \Delta\eta_i + n \sum_{j=1}^m (y_c - d_j)^2 A_{sj}$$

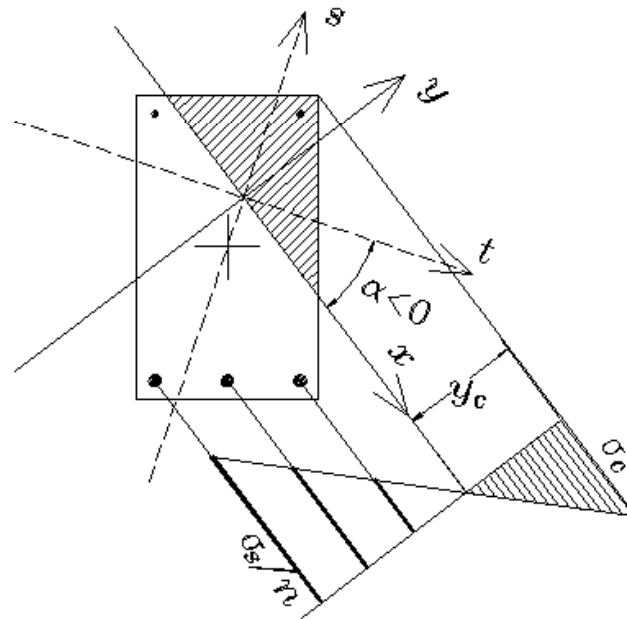


Figura 3.5: Sezione soggetta a flessione deviata

in cui $y_i = y_c - \eta_i$ sono le distanze dall'asse neutro dei baricentri delle strisce. Le tensioni massime nel calcestruzzo e nell'acciaio si calcolano quindi mediante le eq. (3.9).

3.2.3 Flessione deviata

Quando la sezione non ha un asse di simmetria o, pur avendolo, l'asse di sollecitazione non coincide con esso, la giacitura dell'asse neutro non risulta più perpendicolare alla direzione della sollecitazione e pertanto non è più nota a priori. Il problema presenta dunque due incognite, i due parametri necessari a definire la posizione dell'asse neutro, e quindi richiede la soluzione di un sistema di due equazioni.

Le due equazioni sono fornite dalle condizioni che siano nulli il momento statico rispetto all'asse neutro ed il momento centrifugo tra l'asse neutro e quello di sollecitazione della sezione omogenizzata. Questo è ben noto dalla teoria elastica delle sezioni inflesse, e si può dedurre facilmente in modo diretto.

Come illustrato in figura 3.5, indicando con (x, y) un riferimento ortogonale, l'asse x coincidente con l'asse neutro, e con (t, s) un altro riferimento in cui s è l'asse di sollecitazione, per le ipotesi di conservazione delle sezioni piane e di comportamento lineare dei materiali, si può porre:

$$\sigma(y) = \theta y \quad (3.19)$$

in cui $\theta = \sigma_{cm}/y_c$ è la tangente del diagramma delle sollecitazioni.

Per l'equilibrio tra le sollecitazioni e le risultanti delle tensioni si ha:

$$\begin{aligned}\int_{A^*} \sigma(y) dA &= 0 \\ \int_{A^*} \sigma(y)t dA &= 0 \\ \int_{A^*} \sigma(y)s dA &= M\end{aligned}\tag{3.20}$$

Sostituendo l'eq. (3.19) nelle prime due equazioni (3.20) si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{A^*} y dA &= 0 \\ \int_{A^*} yt dA &= 0\end{aligned}\tag{3.21}$$

che esprimono in forma analitica le due condizioni sopra citate.

Indicando con α l'angolo formato dall'asse neutro con la perpendicolare all'asse di sollecitazione (preso positivo se di verso antiorario), il passaggio dal riferimento (x, y) a quello (t, s) è dato dalle relazioni:

$$\begin{aligned}t &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ s &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di t nella seconda delle eq. (3.21) si ha:

$$\cos \alpha \int_{A^*} xy dA - \sin \alpha \int_{A^*} y^2 dA = 0$$

da cui si ottiene:

$$\tan \alpha = \frac{\int_{A^*} xy dA}{\int_{A^*} y^2 dA}\tag{3.22}$$

Solo in apparenza l'eq. (3.22) fornisce esplicitamente l'incognita α : infatti gli integrali a secondo membro dipendono dall'area della sezione reagente e dunque dalla posizione dell'asse neutro. Tuttavia questa relazione può essere utilizzata in uno schema iterativo.

Fissata una giacitura di tentativo, individuata dall'angolo $\alpha^{(1)}$, si può determinare, per esempio con il metodo delle strisce visto nel paragrafo precedente, la posizione di x che soddisfa la prima delle eq. (3.20). Definita così la sezione reagente, si possono calcolare gli integrali dell'eq. (3.22), da cui si ottiene un valore di α di seconda approssimazione. Se questo coincide, a meno di una tolleranza fissata, con il valore precedente, si è raggiunta la soluzione, altrimenti si sostituisce ad $\alpha^{(1)}$ l'ultimo valore trovato e si ripete il procedimento fino a convergenza.

Determinata la posizione dell'asse neutro, dalla terza delle eq. (3.20) si ricava facilmente:

$$\theta = \frac{M}{I_x^* \cos \alpha + I_{xy}^* \sin \alpha}$$

in cui I_x^* è il momento di inerzia relativo all'asse neutro e I_{xy}^* è il momento centrifugo relativo ai due assi ortogonali della sezione reagente omogenizzata. Noto θ la tensione in

ogni punto del calcestruzzo compresso è data dall'eq. (3.19), mentre per l'acciaio questo valore deve, come sempre, essere moltiplicato per il coefficiente n .

Per la flessione deviata non è utile specializzare il problema a casi particolari: infatti anche nei più semplici, come la sezione rettangolare, la parte reagente ha in genere forma irregolare e la soluzione esplicita delle equazioni (3.21) risulta generalmente impossibile. Pertanto è preferibile in ogni caso fare riferimento alla procedura generale indicata sopra. L'applicazione manuale è piuttosto lunga e tediosa; tuttavia il metodo si può facilmente programmare, rendendolo in tal modo rapido e preciso.

Infine è necessario osservare che la flessione deviata si incontra di rado nelle applicazioni.⁷ Il motivo è che raramente le travi esistono come elementi isolati; normalmente esse sono vincolate dalla continuità con solai e solette che ne condizionano le possibilità di deformarsi. Ad esempio le travi di bordo degli edifici hanno spesso sezione a forma di Γ , quindi non sono simmetriche e, per quanto visto, dovrebbero essere soggette a flessione deviata; tuttavia la presenza della soletta costringe il piano di inflessione a restare retto e queste travi praticamente si comportano come se avessero sezione a T simmetrica, ovviamente con uguale larghezza delle ali.

3.2.4 Esempi

Nel seguito si riportano alcuni esempi, relativi alla verifica od al dimensionamento, con il metodo delle tensioni ammissibili, di sezioni in cemento armato sollecitate a flessione retta.

Esempio 3.1 Calcolare i valori massimi della tensione nel calcestruzzo e nell'acciaio in una sezione rettangolare di base $b = 30$ cm, altezza $h = 45$ cm, con doppia armatura:

$$\begin{aligned} A_{s1} &= 2\phi 12 = 2.26 \text{ cm}^2 & d_1 &= 3.0 \text{ cm} \\ A_{s2} &= 3\phi 18 = 7.60 \text{ cm}^2 & d_2 &= 42.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

e sollecitata a flessione da un momento $M = 75$ kNm.

L'armatura risultante è data da:

$$\begin{aligned} A_s &= A_{s1} + A_{s2} = 2.26 + 7.60 = 9.86 \text{ cm}^2 \\ d_G &= \frac{d_1 A_{s1} + d_2 A_{s2}}{A_s} = \frac{3. \times 2.26. + 42. \times 7.60}{9.86} = 33.06 \text{ cm} \end{aligned}$$

La posizione dell'asse neutro si calcola utilizzando l'eq. (3.7):

$$y_c = \frac{nA_s}{b} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{b}{nA_s} d_G} - 1 \right) = 13.79 \text{ cm}$$

Quindi, dalla eq. (3.8) si ha il momento di inerzia della sezione omogenizzata:

$$I_G^* = \frac{1}{3} b y_c^3 + n[(y_c - d_1)^2 A_{s1} + (y_c - d_2)^2 A_{s2}] = 120892 \text{ cm}^4$$

Infine le sollecitazioni si ottengono applicando le eq. (3.9)

$$\begin{aligned} \sigma_{cm} &= \frac{M}{I_G^*} y_c = \frac{7500000}{1208920} 13.79 = 855 \text{ N/cm}^2 = 8.55 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{sm} &= n \frac{M}{I_G^*} (y_c - d_2) = 15 \frac{7500000}{120892} (13.79 - 42) = \\ &= -26260 \text{ N/cm}^2 = -262.6 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

□

⁷Al contrario la sollecitazione di pressoflessione deviata è molto comune nei pilastri degli edifici.

Esempio 3.2 Dimensionare una sezione rettangolare in cemento armato sollecitata a flessione con $M = 120$ kNm, ipotizzando i seguenti materiali:

$$\begin{array}{ll} \text{Calcestruzzo} & R_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2 \quad \bar{\sigma}_c = 9.75 \text{ N/mm}^2 \\ \text{Acciaio} & \text{Fe B 44 k} \quad \bar{\sigma}_s = 255 \text{ N/mm}^2 \end{array}$$

Dalle eq. (3.10), (3.11) e (3.15) o dalla tabella 3.1 si ottiene:

$$K = \frac{9.75}{9.75 + 255/15} = 0.364 \quad \zeta = 0.878 \quad \alpha = 0.0253$$

Assumendo la base $b = 30$ cm, dalla prima delle eq. (3.14) si ha:

$$d = 0.0253 \sqrt{\frac{120}{0.30}} = 0.509 \text{ m}$$

Si pone quindi $h = 55$ cm ($d = 52$ cm); l'area dell'armatura è data dall'eq. (3.16):

$$A_s = \frac{M}{\zeta d \bar{\sigma}_s} = \frac{120000}{0.878 \times 0.52 \times 255} = 1030 \text{ mm}^2 = 10.3 \text{ cm}^2$$

Si impiegano $2\phi 16 + 2\phi 20 \rightarrow A_s = 10.28 \text{ cm}^2$. □

Esempio 3.3 Verificare la sezione dimensionata nell'esempio precedente.

Altezza della zona compressa:

$$y_c = \frac{15 \times 10.28}{30} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{30}{15 \times 10.28} 52} - 1 \right) = 18.54 \text{ cm}$$

Momento di inerzia della sezione omogenizzata:

$$I_G^* = \frac{1}{3} 30 \times 18.54^3 + 15(18.54 - 52)^2 10.28 = 236365 \text{ cm}^4$$

Tensioni massime nei materiali:

$$\begin{aligned} \sigma_{cm} &= \frac{12000000}{236365} 18.54 = 942. \text{ N/cm}^2 = 9.42 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{sm} &= 15 \frac{12000000}{236365} (18.54 - 52) = -25480. \text{ N/cm}^2 = -254.8 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

□

Esempio 3.4 Verificare la sezione a T rappresentata nella fig. 3.6, sollecitata a flessione con $M = 240$ kNm.

Armatura:

$$\begin{array}{ll} A_{s1} = 4\phi 10 = 4.42 \text{ cm}^2 & d_1 = 3 \text{ cm} \\ A_{s2} = 6\phi 22 = 22.8 \text{ cm}^2 & d_2 = 47 \text{ cm} \end{array}$$

Supponendo che l'asse neutro cada nella soletta, si pone $b = 80$ cm; l'armatura risultante è:

$$A_s = 4.42 + 22.80 = 27.32 \text{ cm}^2 \quad d_G = 39.72 \text{ cm}$$

Dall'eq. (3.7) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{nA_s}{b} &= \frac{15 \times 27.32}{80} = 5.122 \text{ cm} \\ y_c &= 5.122 \left(\sqrt{1 + \frac{2 \times 39.72}{5.122}} - 1 \right) = 15.69 \text{ cm} < 20. \text{ cm} \end{aligned}$$

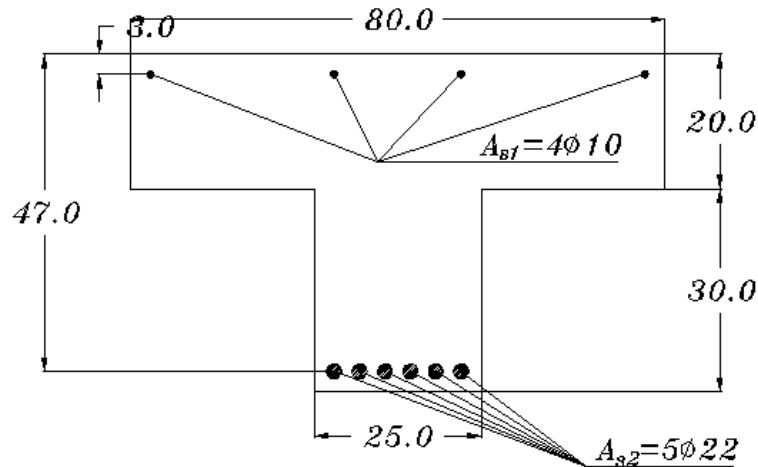


Figura 3.6: Sezione a T da verificare

Essendo $y_c < s$, l'ipotesi è confermata; dunque per le eq. (3.8) il momento di inerzia della sezione reagente è:

$$\begin{aligned} I_G^* &= \frac{1}{3} 80 \times 15.69^3 + 15[(15.69 - 3)^2 4.52 + (15.69 - 47.)^2 22.8] = \\ &= 449186 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

e le tensioni massime risultano:

$$\begin{aligned} \sigma_{cm} &= \frac{M}{I_G^*} y_c = 8.38 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{sm} &= n \frac{M}{I_G^*} (y_c - d_2) = 251.0 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

□

Esempio 3.5 Verificare la sezione in cemento armato illustrata nella fig. 3.7 e sollecitata a flessione retta con $M = 400 \text{ kNm}$: $A_s = 5\phi 24 = 22.6 \text{ cm}^2$, $d = 77 \text{ cm}$.

Si fa l'ipotesi che l'asse neutro tagli la soletta. In tal caso si applica l'eq. (3.7) con $b = 60 \text{ cm}$:

$$\begin{aligned} \frac{nA_s}{b} &= \frac{15 \times 22.6}{60} = 5.65 \text{ cm} \\ y_c &= 5.65 \left(\sqrt{1 + \frac{2 \times 77}{5.65}} - 1 \right) = 24.38 \text{ cm} > 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Questo risultato contraddice l'ipotesi fatta: pertanto l'asse neutro è al di sotto della soletta. L'armatura equivalente al calcestruzzo delle ali è:

$$A_{se} = \frac{(60 - 25)15}{15} = 35 \text{ cm}^2 \quad d_e = 7.5 \text{ cm}$$

per cui l'armatura risultante:

$$A_t = 22.6 + 35. = 57.6 \text{ cm}^2 \quad d_t = \frac{22.6 \times 77 + 35 \times 7.5}{57.6} = 34.77 \text{ cm}$$

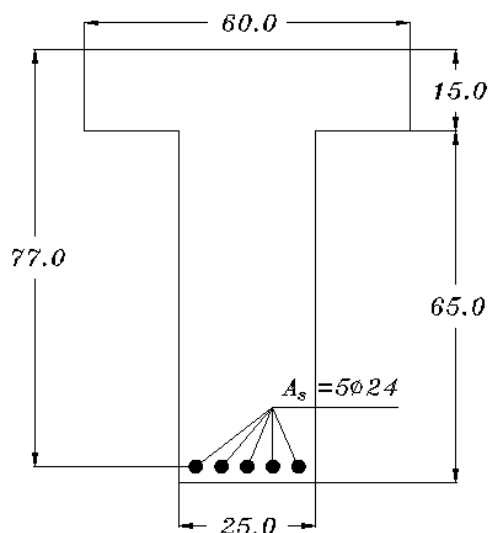


Figura 3.7:

Posto $b = 25$ cm, dall'eq. (3.7) si ottiene la posizione dell'asse neutro:

$$\frac{nA_t}{b} = \frac{15 \times 57.6}{25} = 34.56 \text{ cm}$$

$$y_c = 34.56 \left(\sqrt{1 + \frac{3 \times 34.77}{34.56}} - 1 \right) = 25.42 \text{ cm}$$

Il momento di inerzia della sezione reagente si calcola mediante l'eq. (3.17):

$$I_G^* = \frac{1}{3} [60 \times 25.42^3 - 35 \cdot (25.42 - 15)^3] + 15 \times 22.6 (25.42 - 77)^2 = 1217225 \text{ cm}^4$$

e quindi le tensioni massime risultano:

$$\sigma_{cm} = \frac{40000000}{1217225} 25.42 = 835 \text{ N/cm}^2 = 8.35 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{sm} = 15 \frac{40000000}{1217225} (25.42 - 77) = -25425 \text{ N/cm}^2 = -254.5 \text{ N/mm}^2$$

□

Esempio 3.6 Verificare la sezione circolare in cemento armato, illustrata in fig. 3.8, sollecitata a flessione con $M = 118$ kNm.

Si applica il metodo delle strisce, suddividendo la sezione in rettangoli di altezza 1.0 cm. Le larghezze delle strisce vengono calcolate con la relazione:

$$b(\eta_i) = 2\sqrt{\eta_i(2r - \eta_i)}$$

in cui r indica il raggio della sezione.

Si può pertanto costruire la tab. 3.2. Nella prima riga sono riportati l'area, il momento statico e d'inerzia relativi alle sole armature omogenizzate; quelle successive si ottengono dalle precedenti aggiungendovi il contributo della i -esima striscia. Il calcolo viene interrotto quando $y_c \sim \eta_k + \Delta\eta_k/2$, dove k indica l'ultima striscia sommata.

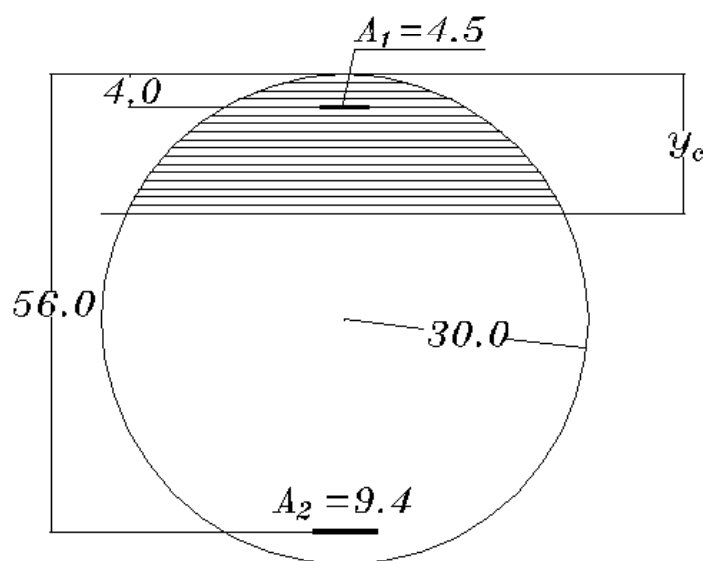


Figura 3.8: Sezione circolare verificata con il metodo delle strisce

$\Delta\eta_i$	$b(\eta_i)$	η_i	$A^*(\eta_i)$	$S^*(\eta_i)$	$y_c = S^*/A^*$	I^*
—	—	—	208.50	8166.0	—	443260.
1.00	10.909	0.50	219.41	8171.5	37.243	443260.
1.00	18.735	1.50	238.14	8199.6	34.431	443300.
1.00	23.979	2.50	262.12	8259.5	31.510	443450.
1.00	28.125	3.50	290.25	8357.9	28.796	443800.
1.00	31.607	4.50	321.85	8500.2	26.410	444440.
1.00	34.627	5.50	356.48	8690.6	24.379	445480.
1.00	37.296	6.50	393.78	8933.0	22.686	447060.
1.00	39.686	7.50	433.46	9230.7	21.295	449290.
1.00	41.845	8.50	475.31	9586.4	20.169	452310.
1.00	43.806	9.50	519.11	10003.	19.268	456270.
1.00	45.596	10.5	564.71	10481.	18.560	461290.
1.00	47.233	11.5	611.94	11024.	18.015	467540.
1.00	48.734	12.5	660.68	11634.	17.609	475160.
1.00	50.110	13.5	710.79	12310.	17.319	484290.
1.00	51.371	14.5	762.16	13055.	17.129	495090.
1.00	52.526	15.5	814.69	13869.	17.024	507710.
1.00	53.582	16.5	868.27	14753.	16.992	522300.

Tabella 3.2:

Il momento di inerzia calcolato nella tab. 3.2 è relativo ad un asse parallelo all'asse neutro, tangente al lembo più compresso della sezione. Il momento baricentrico è pertanto:

$$I_G^* = I^* - A^*y_c^2 = 522300. - 868.27 \times 16.992^2 = 271606 \text{ cm}^4$$

Quindi le tensioni massime di compressione nel calcestruzzo e di trazione nell'acciaio risultano:

$$\sigma_{cm} = \frac{M}{I_G^*}y_c = 7.4 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{sm} = n\frac{M}{I_G^*}(y_c - d_m) = 254.2 \text{ N/mm}^2$$

□

3.3 Calcolo allo stato limite ultimo

Come è stato già sottolineato in precedenza, la verifica delle strutture con il metodo degli stati limite consiste nel controllare che, per opportune combinazioni dei carichi, dette *condizioni di progetto*, la struttura non superi certe condizioni limiti di funzionamento; in particolare la più importante⁸ è quella di resistenza (o non collasso), detta anche condizione di *stato limite ultimo*.

Nelle strutture a telaio la verifica allo stato limite ultimo si esegue controllando che le sollecitazioni prodotte dai carichi di progetto non superino in alcun punto la resistenza delle sezioni; nel caso di flessione semplice questa condizione è verificata se:

$$M_d \leq M_u \quad (3.23)$$

dove M_d indica il momento prodotto dai carichi di progetto (per la condizione di carico esaminata) e M_u è il momento resistente ultimo della sezione. La verifica della sezione pertanto coincide con la determinazione del suo momento ultimo M_u .

Convenzionalmente il collasso della sezione è determinato dal superamento, nel calcestruzzo o nell'acciaio, della rispettiva deformazione ultima. Precisamente si assume che sia stato raggiunto il limite di resistenza della sezione inflessa se la deformazione del calcestruzzo compresso prende il valore $\epsilon_{cu} = 3.5 \times 10^{-3}$ o quella dell'acciaio teso il valore dell'allungamento limite $\epsilon_{sl} = 0.01$. Questo implica che tutti i diagrammi delle deformazioni relativi ad una situazione di collasso devono passare per uno di questi due punti, come è illustrato in fig. 3.9, con riferimento al caso della flessione retta.

Come si vede dalla figura, l'insieme di tutti i possibili diagrammi di collasso per flessione può suddividersi in tre regioni, corrispondenti a diversi meccanismi di rottura.

- **Regione 1.** Corrisponde ai diagrammi in cui $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$,⁹ $|\epsilon_{sm}| < \epsilon_{sy}$, dove $\epsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$ è l'allungamento dell'acciaio in corrispondenza della tensione di plasticizzazione. La rottura avviene per schiacciamento del calcestruzzo, mentre l'acciaio non ha superato la soglia plastica. Questo meccanismo si verifica nelle sezioni *fortemente armate* e produce collassi improvvisi e con piccole deformazioni (piccola duttilità).
- **Regione 2.** È costituita dai digrammi per cui $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$ e $\epsilon_{sy} \leq |\epsilon_{sm}| \leq \epsilon_{sl}$. Il collasso è ancora prodotto dallo schiacciamento del calcestruzzo, ma dopo che l'acciaio ha superato la soglia plastica. Le sezioni che collassano in questo modo sono dette *normalmente armate*; il loro comportamento è tanto più duttile quanto maggiore è l'allungamento dell'acciaio nella condizione di rottura.

⁸Ma non necessariamente la più vincolante.

⁹ ϵ_{cm} indica la massima deformazione del calcestruzzo compresso.

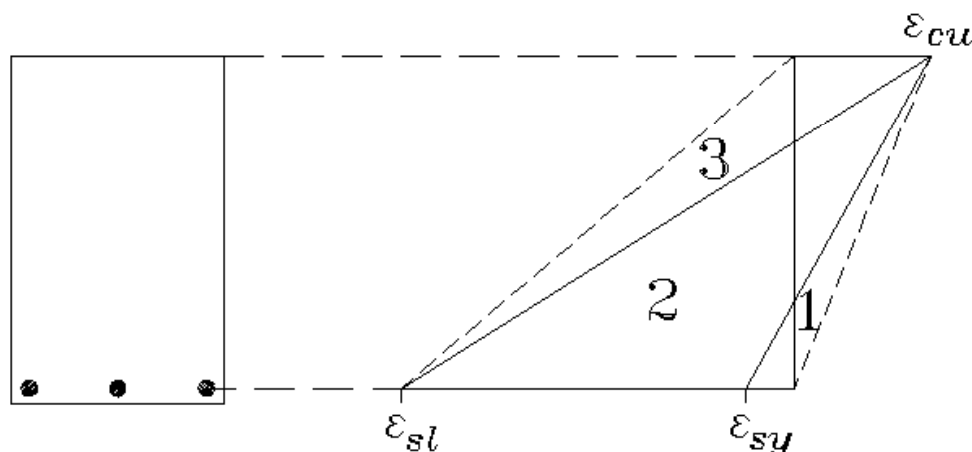


Figura 3.9: Meccanismi di collasso per flessione delle sezioni in cemento armato

- **Regione 3.** Raccoglie i diagrammi per cui $\epsilon_{cm} < \epsilon_{cu}$, $|\epsilon_{sm}| = \epsilon_{sl}$. Lo stato limite è raggiunto per l'eccessivo allungamento dell'armatura principale, prima che il calcestruzzo arrivi alla deformazione ultima. Questo si verifica per sezioni *debolmente armate*, cui corrispondono meccanismi di collasso duttili, accompagnati da grandi deformazioni plastiche.

La maggior parte delle sezioni correttamente progettate collassano con un meccanismo che appartiene ad una fascia a cavallo tra le regioni 2 e 3. Il diagramma di separazione tra queste due regioni ($\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$, $|\epsilon_{sm}| = \epsilon_{sl}$) è detto *di rottura bilanciata* e corrisponde alla situazione in cui entrambi i materiali raggiungono simultaneamente la deformazione ultima. Le sezioni che collassano in questo modo si dicono avere *armatura bilanciata*.¹⁰

3.3.1 Sezione rettangolare

Fissato un diagramma delle deformazioni corrispondente allo stato limite della sezione, dalle leggi tensioni-deformazioni dei materiali si deducono i corrispondenti diagrammi delle tensioni. In particolare per il calcestruzzo, adottando la legge parabola-rettangolo prevista dalla normativa italiana, per tutti i diagrammi che appartengono alle regioni 1 e 2 (per cui $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$) il diagramma delle tensioni assume la forma parabola rettangolo, illustrata in fig. 3.10.

Indicando ancora con y_c l'altezza della zona compressa, il diagramma si può dividere in due parti: una, di altezza

$$y_{c1} = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c1}}{\epsilon_{cu}} y_c = \frac{(3.5 - 2.0)10^{-3}}{3.5 \times 10^{-3}} y_c = 0.429 y_c$$

con tensione uniforme, di valore $\bar{f}_{cd} = 0.85 f_{cd}$, e l'altra, di altezza

$$y_{c2} = \frac{\epsilon_{c1}}{\epsilon_{cu}} y_c = \frac{2 \times 10^{-3}}{3.5 \times 10^{-3}} y_c = 0.571 y_c$$

¹⁰ Alcuni autori definiscono rottura bilanciata quella per cui $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$ e $|\epsilon_{sm}| = \epsilon_{sy}$, ossia il diagramma di separazione tra le regioni 1 e 2. Noi preferiamo assegnare questa definizione all'altro meccanismo, molto più frequente ed importante, mentre il limite delle sezioni fortemente armate corrisponde ad una rottura fragile il cui verificarsi andrebbe evitato.

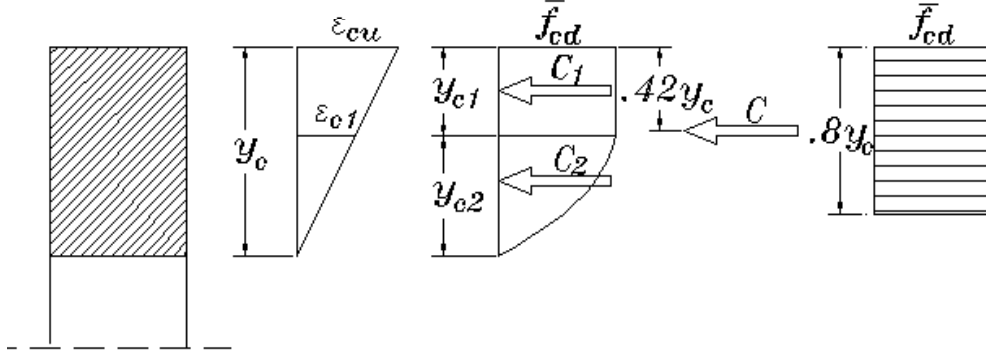


Figura 3.10: Diagramma delle tensioni nel calcestruzzo al collasso

in cui le tensioni variano con legge parabolica lungo l'altezza.

Per una sezione rettangolare la risultante delle tensioni relative a questo diagramma si valuta facilmente:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= y_{c1} b \bar{f}_{cd} = 0.429 y_c b \bar{f}_{cd} \\
 C_2 &= \frac{2}{3} y_{c2} b \bar{f}_{cd} = 0.381 y_c b \bar{f}_{cd} \\
 C &= C_1 + C_2 = 0.810 y_c b \bar{f}_{cd}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Il centro di applicazione di C dista dal lembo compresso della quantità:

$$\begin{aligned}
 \eta_C &= \frac{C_1 y_{c1}/2 + C_2 (y_{c1} + 3y_{c2}/8)}{C} = \\
 &= \frac{[0.429^2/2 + 0.381(0.429 + 0.214)] y_c^2 b \bar{f}_{cd}}{0.81 y_c b \bar{f}_{cd}} = 0.416 y_c
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dunque la risultante delle compressioni agenti su di una sezione rettangolare è una forza C di intensità $0.81 y_c b \bar{f}_{cd}$ applicata alla distanza $0.416 y_c$ dal lembo compresso. Con piccola approssimazione questo sistema risultante coincide con quello dovuto ad un diagramma uniforme, di intensità \bar{f}_{cd} , che si estende per una altezza pari a $\sim 0.8 y_c$, come illustrato in fig. 3.10. Quest'ultimo è chiamato il diagramma rettangolare equivalente.

Per le rotture che avvengono nel campo 3, il diagramma delle tensioni è diverso da quello rappresentato in fig. 3.10. Infatti al diminuire di ϵ_{cm} si riduce il tratto a tensione costante, che scompare quando $\epsilon_{cm} < \epsilon_{c1}$; pertanto la risultante delle tensioni nel calcestruzzo non è più espressa dall'eq. (3.24).

La risultante ora si deve esprimere in funzione della deformazione massima del calcestruzzo, ϵ_{cm} . Si devono quindi distinguere due casi:

1. $\epsilon_{c1} \leq \epsilon_{cm} \leq \epsilon_{cu}$:

$$\begin{aligned}
 C &= \left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right) y_c b \bar{f}_{cd} \\
 \eta_C &= \frac{6\alpha^2 - 4\alpha + 1}{4(3\alpha^2 - \alpha)} y_c
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

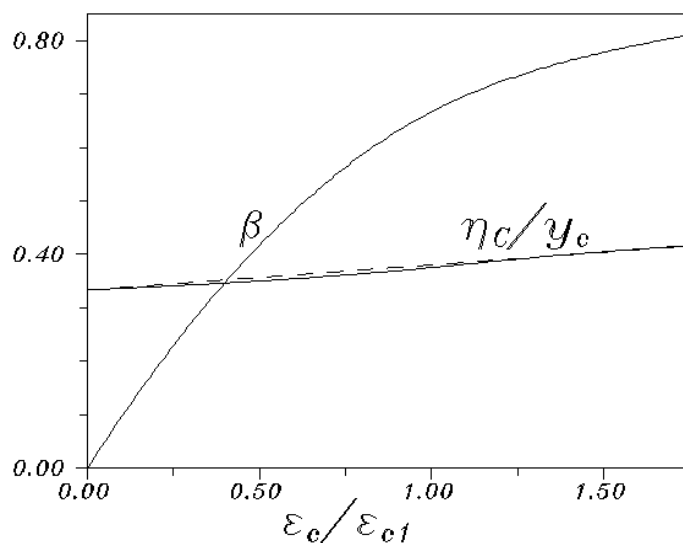


Figura 3.11: Coefficienti dell'area e della posizione del baricentro dello "stress block" in funzione della deformazione massima del calcestruzzo

2. $\epsilon_{cm} \leq \epsilon_{c1}$:

$$\begin{aligned} C &= \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) y_c b \bar{f}_{cd} \\ \eta_C &= \frac{1 - \alpha/4}{3 - \alpha} y_c \end{aligned} \quad (3.27)$$

in cui $\alpha = \epsilon_{cm}/\epsilon_{c1}$.

In fig. 3.11 sono rappresentati i diagrammi del coefficiente di forma dello "stress block":

$$\beta = \frac{C}{y_c b \bar{f}_{cd}}$$

e del rapporto η_C/y_c , in funzione del parametro $\alpha = \epsilon_{cm}/\epsilon_{c1}$. Risulta evidente che η_C/y_c non varia molto, restando compreso tra 0.416 e 0.33, e che segue una legge praticamente lineare, per cui alle due espressioni nelle eq. (3.26) e (3.27) si può sostituire la semplice relazione:

$$\eta_C \simeq (0.333 + 0.0472\alpha)y_c \quad (3.28)$$

Questa è rappresentata con linea tratteggiata in fig. 3.11 e praticamente coincide con la legge "esatta".

Al contrario β varia notevolmente con ϵ_{cm} e, come è ovvio, tende a zero per $\epsilon_{cm} \rightarrow 0$; tuttavia, avendo andamento parabolico, per valori di ϵ_{cm} non troppo piccoli, il suo valore non varia eccessivamente. Poiché, come si chiarirà meglio in seguito, per questo meccanismo di rottura, l'errata valutazione di β ha modesta influenza sulla stima del momento ultimo, generalmente si adottano, anche per la regione 3, i coefficienti costanti 0.81 e 0.416 (o, ciò che è equivalente, il diagramma rettangolare).

Sezione rettangolare con un solo livello di armatura

Per le sezioni in cui l'armatura è disposta su di un solo strato e quindi non vi è armatura nella zona compressa, il meccanismo di collasso è funzione della sola percentuale di armatura.

Per individuare in quale delle tre regioni cade il diagramma delle deformazioni ultime, è utile pertanto determinare le percentuali di armatura che corrispondono ai digrammi di frontiera tra le regioni 1-2 e 2-3.

In entrambi i casi, essendo $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$ ed $|\epsilon_s| \geq \epsilon_{sy}$, si avrà che le risultanti delle compressioni nel calcestruzzo e delle trazioni nell'acciaio varranno:

$$C = 0.81y_c b \bar{f}_{cd} \quad T = A_s f_{yd}$$

Per l'equilibrio della sezione $C - T = 0$; sostituendo le precedenti espressioni di C e T si ha pertanto:

$$0.81y_c b \bar{f}_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \quad (3.29)$$

Se $|\epsilon_s| = \epsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$, la posizione dell'asse neutro è fissata dalla linearità del diagramma delle deformazioni:

$$y_c = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} d \quad (3.30)$$

Risolvendo l'eq. (3.29) rispetto ad A_s , dopo aver sostituito l'espressione di y_c , si ottiene:

$$A_s^{(1)} = 0.81 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} \frac{bd \bar{f}_{cd}}{f_{yd}}$$

$A_s^{(1)}$ è la quantità di armatura occorrente perché la sezione collassi secondo il meccanismo limite tra le regioni 1 e 2.

Nell'analisi delle sezioni allo stato limite ultimo è utile introdurre il concetto di *percentuale meccanica dell'armatura*, definita come il rapporto tra la massima forza di trazione sopportata dall'acciaio e quella massima di compressione portata dalla sezione "utile" di calcestruzzo, di area bd . Indicando con μ_s questa grandezza:

$$\mu_s = \frac{A_s f_{yd}}{bd \bar{f}_{cd}} \quad (3.31)$$

la percentuale critica, che separa la regione delle sezioni fortemente armate da quelle normalmente armate è:

$$\mu_s^{(1)} = \frac{0.81\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} \quad (3.32)$$

Le sezioni con percentuali di armatura maggiori di $\mu_s^{(1)}$ sono fortemente armate e collassano nella regione 1. Le sezioni con percentuale inferiore a $\mu_s^{(1)}$ sono normalmente o debolmente armate. L'elemento di separazione tra questi due insiemi si determina ancora dall'equazione di equilibrio (3.29), tenendo conto che, per $\epsilon_s = -\epsilon_{sl}$, l'altezza della zona compressa è:

$$y_c \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sl}} d = \frac{3.5 \times 10^{-3}}{(3.5 + 10) \times 10^{-3}} d = 0.259d$$

e quindi

$$\mu_s^{(2)} = 0.81 \frac{y_c}{d} = 0.81 \times 0.259 = 0.21 \quad (3.33)$$

Se $\mu_s^{(2)} \leq \mu_s < \mu_s^{(1)}$ la sezione è normalmente armata e crolla nel campo 2; se $\mu_s < \mu_s^{(2)}$ è debolmente armata ed il suo diagramma ultimo è nel campo 3.

Dunque, nota la percentuale meccanica di armatura di una sezione, è immediato stabilire secondo quale meccanismo crolla e quindi applicare le relazioni adeguate per calcolarne il momento ultimo.

Sezioni fortemente armate: ($\mu_s > \mu_s^{(1)}$) Per queste sezioni, nel punto di collasso l'acciaio è ancora elastico, quindi la tensione nell'acciaio è proporzionale alla deformazione. L'equazione di equilibrio alla traslazione si scrive pertanto:

$$0.81y_cb\bar{f}_{cd} + E_s\epsilon_s A_s = 0$$

Sostituendo in questa equazione la condizione di congruenza:

$$\epsilon_s = \frac{y_c - d}{y_c} \epsilon_{cu}$$

con alcune semplificazioni si ottiene:

$$0.81K^2 + \alpha_u\mu_s K - \alpha_u\mu_s = 0$$

in cui $K = y_c/d$ è, come nel caso elastico, l'altezza adimensionale della zona compressa e $\alpha_u = \epsilon_{cu}/\epsilon_{sy}$ è il rapporto tra la deformazione ultima del calcestruzzo e quella di plasticizzazione dell'acciaio.

La radice positiva dell'equazione precedente determina la posizione dell'asse neutro:

$$K = 0.617\alpha_u\mu_s \left(\sqrt{1 + \frac{3.24}{\alpha_u\mu_s}} - 1 \right) \quad (3.34)$$

Il momento ultimo della sezione si ottiene come risultante delle tensioni nella configurazione di collasso:

$$M_u = Cz = Tz$$

dove z indica il braccio delle forze interne. Per l'eq. (3.25) si ha:

$$z = d - 0.416y_c = (1 - 0.416K)d$$

Inoltre, per l'eq. (3.24):

$$C = 0.81y_cb\bar{f}_{cd} = 0.81Kbd\bar{f}_{cd}$$

Quindi, sostituendo queste espressioni in quella del momento si ottiene:

$$M_u = 0.81(1 - 0.416K)Kbd^2\bar{f}_{cd} \quad (3.35)$$

Sezioni normalmente armate: ($\mu_s^{(2)} \leq \mu_s \leq \mu_s^{(1)}$) Al collasso in queste sezioni il calcestruzzo ha raggiunto la deformazione ultima, mentre l'acciaio ha superato la soglia plastica; pertanto, per la risultante delle compressioni si applicano ancora le eq. (3.24) - (3.25), mentre la forza di trazione nell'armatura è $T = A_s f_{yd}$. L'equazione di equilibrio alla traslazione coincide quindi con l'eq. (3.29), da cui si deduce:

$$K = \frac{y_c}{d} = \frac{A_s f_{yd}}{0.81 b d \bar{f}_{cd}} = 1.235 \mu_s \quad (3.36)$$

Per queste sezioni l'altezza della zona compressa è semplicemente proporzionale alla percentuale meccanica di armatura. Il momento ultimo pertanto si calcola:

$$\begin{aligned} M_u = Tz = A_s f_{yd} (d - 0.416 y_c) = \\ = (1 - 0.416 K) d A_s f_{yd} = (1 - 0.514 \mu_s) d A_s f_{yd} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sezioni debolmente armate: ($\mu_s < \mu_s^{(2)}$) Se si accetta l'approssimazione che lo "stress block" del calcestruzzo compresso, valido nelle regioni 1 e 2, si possa adottare anche quando $\epsilon_{cm} < \epsilon_{cu}$, allora questo caso si tratta in modo identico al precedente, usando le eq. (3.36) e (3.37). Non vi è quindi ragione di fare distinzione tra sezioni normalmente e debolmente armate¹¹.

Volendo far uso delle relazioni "esatte" si devono ulteriormente distinguere due casi, secondo che ϵ_{cm} è maggiore o minore di $\epsilon_{c1} = 2 \times 10^{-3}$. La condizione di separazione si ha quando $\epsilon_{cm} = \epsilon_{c1}$ e ad essa corrisponde la posizione dell'asse neutro:

$$K = \frac{\epsilon_{c1}}{\epsilon_{c1} + \epsilon_{sl}} = 0.1667$$

La risultante delle tensioni sul calcestruzzo è data dalla eq. (3.26) con $\alpha = 1$, quindi:

$$C = \frac{2}{3} K b d \bar{f}_{cd} = 0.111 b d \bar{f}_{cd}$$

Poiché per l'equilibrio $C = T$, a questa configurazione corrisponde una percentuale meccanica di armatura:

$$\mu_s^{(3)} = \frac{T}{b d \bar{f}_{cd}} = 0.111 \quad (3.38)$$

Quindi, per $\mu_s \geq \mu_s^{(3)}$ si applica l'eq. (3.26), e pertanto l'equazione di equilibrio si scrive:

$$\left(1 - \frac{\epsilon_{c1}}{3\epsilon_{cm}}\right) y_c b \bar{f}_{cd} = A_s f_{yd}$$

Sostituendo l'espressione di ϵ_{cm} in funzione di y_c fornita dalla condizione di congruenza:

$$\epsilon_{cm} = \frac{y_c}{d - y_c} \epsilon_{sl}$$

si ottiene un'equazione in y_c che, risolta in termini di K , diviene:

$$K = \frac{\mu_s + \epsilon_{c1}/(3\epsilon_{sl})}{1 + \epsilon_{c1}/(3\epsilon_{sl})} = 0.0625 + 0.9375 \mu_s \quad (3.39)$$

¹¹Il diagramma delle deformazioni è però diverso, e questo richiede di tenere distinti i due casi quando le armature sono disposte su più livelli, come si vedrà più avanti.

avendo tenuto conto che $\epsilon_{c1} = 2 \times 10^{-3}$ e $\epsilon_{sl} = 10 \times 10^{-3}$

Se $\mu_s < \mu_s^{(3)}$ la risultante C si calcola con la relazione (3.27). Sostituendo ad α l'espressione in termini di K che si ricava dalla congruenza:

$$\alpha = \frac{\epsilon_{cm}}{\epsilon_{c1}} = \frac{K}{1-K} \frac{\epsilon_{sl}}{\epsilon_{c1}}$$

l'equazione di equilibrio diviene:

$$\frac{\epsilon_{sl}}{\epsilon_{c1}} \frac{K}{1-K} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{sl}}{\epsilon_{c1}} \frac{K}{1-K} \right) y_c b \bar{f}_{cd} = A_s f_{yd}$$

da cui, con opportune manipolazioni, segue l'equazione cubica in K :

$$-2.667K^3 + (1 - 0.2\mu_s)K^2 + 0.4\mu_s K - 0.2\mu_s = 0 \quad (3.40)$$

Nell'intervallo dei valori di μ_s per cui l'eq. (3.40) è valida, una ottima approssimazione della soluzione è data dalla:

$$K \simeq (0.45 + 0.441\mu_s) \sqrt{\mu_s} \quad (3.41)$$

ma di fatto, per valori di μ_s non troppo piccoli ($\mu_s > 0.03$) anche l'eq. (3.39) fornisce una buona approssimazione della soluzione dell'eq. (3.40); quindi non è in pratica necessario distinguere i due casi.

Determinato il valore di K , il momento ultimo si calcola, tenendo conto dell'espressione (3.28) del baricentro delle pressioni e dell'espressione di α , con la relazione:

$$M_u = \frac{1 - 1.333K + 0.097K^2}{1-K} d A_s f_{yd} \simeq (1 - 0.394K) d A_s f_{yd} \quad (3.42)$$

L'errore che si commette utilizzando l'eq. (3.37) anche per le sezioni debolmente armate si può valutare confrontando i valori del rapporto $M_u/dA_s f_{yd}$ ottenuti da questa equazione con quelli "esatti", forniti dall'eq. (3.42). Si trova che il massimo errore relativo non supera l'1.4%. Tale risultato giustifica pienamente l'utilizzo della più semplice eq. (3.37).

Sezioni con doppia armatura

Si esamina ora il caso, molto frequente, in cui l'armatura è disposta su due livelli: l'armatura principale tesa, di area A_s , posta alla distanza d dal lembo compresso, e l'armatura compressa A'_s con posizione d' . Per comodità nel seguito tutte le grandezze relative a quest'ultima armatura saranno contraddistinte con un apice '.

In una data situazione di collasso, al contrario di quanto avviene per quella tesa, nell'armatura compressa il livello di tensione non è noto a priori, non essendo stabilito se la sua deformazione supera o no la soglia plastica. Pertanto è conveniente indicare simbolicamente con $\sigma_s(\epsilon)$ il legame tensione-deformazione dell'acciaio che, nello schema elasto-plastico adottato, è:

$$\sigma_s(\epsilon) = \begin{cases} E_s \epsilon & \text{se } |\epsilon| < \epsilon_{sy} \\ f_{sy} \text{ sign}(\epsilon) & \text{se } |\epsilon| \geq \epsilon_{sy} \end{cases} \quad (3.43)$$

La presenza dell'armatura nella zona compressa non modifica i modi di collasso della sezione illustrati nella fig. 3.9, ma cambia il valore delle percentuali di armatura che

separano le regioni 1-2 e 2-3. Infatti in tal caso, per $|\epsilon_s| \geq \epsilon_{sy}$ ed $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$, l'equazione di equilibrio si scrive:

$$0.81y_c b \bar{f}_{cd} + A'_s \sigma_s(\epsilon'_s) = A_s f_{yd} \quad (3.44)$$

che differisce dalla eq. (3.29) per aver tenuto conto del contributo dell'armatura compressa.

La deformazione dell'armatura compressa, ϵ'_s , si può esprimere in funzione della posizione dell'asse neutro e della massima deformazione del calcestruzzo:

$$\epsilon'_s = \frac{K - \delta}{K} \epsilon_{cm} \quad (3.45)$$

in cui $\delta = d'/d$ è il rapporto tra la distanza dell'armatura dal lembo compresso (generalmente 2 – 3 cm) e l'altezza utile della sezione.

Per il meccanismo di collasso in cui l'acciaio ha raggiunto il limite di snervamento ($|\epsilon_s| = \epsilon_{sy}$) la posizione dell'asse neutro è data dall'eq. (3.30). Noto il valore di K e tenendo conto che per ipotesi $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$, con l'eq. (3.45) si determina il valore di ϵ'_s che, inserito nell'eq. (3.43), fornisce il valore della tensione nell'acciaio compresso. Pertanto nell'eq. (3.44) μ_s è la sola incognita; risolvendo l'equazione si ha:

$$\mu_s^{(1)} = 0.81K + \mu'_s \frac{\sigma_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} = \frac{0.81\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} + \mu'_s \frac{\sigma_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \quad (3.46)$$

Questa equazione generalizza l'eq. (3.32) al caso della doppia armatura; in essa $\mu'_s = A'_s f_{yd} / b d \bar{f}_{cd}$ è la percentuale meccanica di armatura compressa.

Il valore di $\mu_s^{(1)}$ che deriva dall'eq. (3.46) è sempre maggiore di quello relativo alla sezione con semplice armatura; dunque la presenza di acciaio nella parte compressa della sezione ne aumenta la duttilità, poiché sposta verso l'alto la soglia delle sezioni fortemente armate (che hanno un comportamento fragile). Peraltro questa proprietà è mitigata da fenomeni più complessi, che sfuggono all'analisi della sezione e che saranno illustrati in seguito, quale ad esempio l'instabilità delle barre compresse. L'utilità dell'armatura compressa si può sviluppare pienamente solo se vengono prese opportune precauzioni per impedire questi fenomeni negativi.

Per il meccanismo di rottura bilanciata si ha ancora $K = 0.259$; quindi calcolato il valore della tensione nelle barre compresse, $\epsilon'_s = \epsilon_{cu}(1 - 3.861\delta)$, dall'eq. (3.44) si ottiene il valore della percentuale di armatura:

$$\mu_s^{(2)} = 0.21 + \mu'_s \frac{\sigma_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \quad (3.47)$$

Quindi anche per le sezioni dotate di due livelli di armatura è facile stabilire, mediante il confronto della percentuale di armatura tesa con i valori di soglia, in quale dei tre campi cadrà il diagramma delle deformazioni al collasso.

Si esaminano ora le espressioni per il calcolo del momento ultimo delle sezioni con armatura doppia, distinguendo, come in precedenza, per i tre possibili campi di rottura.

Sezioni fortemente armate: ($\mu_s > \mu_s^{(1)}$) L'acciaio teso è ancora elastico, pertanto l'equazione di equilibrio si può scrivere:

$$0.81y_c b \bar{f}_{cd} + A'_s \sigma_s(\epsilon'_s) + E_s \epsilon_s A_s = 0$$

in cui le deformazioni delle due armature possono esprimersi in funzione dell'altezza della zona compressa:

$$\epsilon_s = \frac{K-1}{K}\epsilon_{cu} \quad \epsilon'_s = \frac{K-\delta}{K}\epsilon_{cu}$$

Se risulta, come è frequente in questo caso, $\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$, dalle due equazioni precedenti si ottiene un'equazione quadratica in K :

$$0.81K^2 + (\mu'_s + \mu_s\alpha_u)K - \mu_s\alpha_u = 0$$

la cui soluzione positiva è:

$$K = 0.617(\mu'_s + \mu_s\alpha_u) \left(\sqrt{1 + \frac{3.24\mu_s\alpha_u}{(\mu'_s + \mu_s\alpha_u)^2}} - 1 \right) \quad (3.48)$$

($\alpha_u = \epsilon_{cu}/\epsilon_{sy}$).

Determinato K si può calcolare ϵ'_s e controllare che la soglia plastica sia stata effettivamente superata. In caso contrario si deve porre:

$$\sigma_s(\epsilon'_s) = E_s\epsilon'_s = E_s\epsilon_{cu}(K-\delta)/K$$

per cui l'equazione di equilibrio diviene:

$$0.81K + \left(\mu'_s \frac{K-\delta}{K} + \mu_s \frac{K-1}{K} \right) \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{sy}} = 0$$

cui corrisponde la soluzione:

$$K = 0.617\alpha_u(\mu_s + \mu'_s) \left(\sqrt{1 + \frac{3.24(\mu_s + \mu'_s)\delta}{\alpha_u(\mu_s + \mu'_s)^2}} - 1 \right) \quad (3.49)$$

Noto K e quindi ϵ'_s , il momento ultimo della sezione si ottiene aggiungendo al risultante delle tensioni nel calcestruzzo, espresso nell'eq. (3.35), il contributo fornito dall'acciaio compresso:

$$M_u = 0.81(1 - 0.416K)Kbd^2\bar{f}_{cd} + \sigma_s(\epsilon'_s)A'_s(d-d') \quad (3.50)$$

Sezioni normalmente armate: ($\mu_s^{(2)} \leq \mu_s \leq \mu_s^{(1)}$) Anche in questo caso è necessario distinguere se l'armatura compressa ha superato o meno la soglia di plasticizzazione.

Assumendo che $\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$, dall'equazione di equilibrio si deduce immediatamente l'altezza della zona compressa:

$$K = 1.235(\mu_s - \mu'_s) \quad (3.51)$$

Quindi, determinato $\epsilon'_s = \epsilon_{cu}(K-\delta)/K$, se questo risulta inferiore alla deformazione di plasticizzazione, per cui l'acciaio compresso è in campo elastico, l'equazione di equilibrio si scrive:

$$0.81Kbd\bar{f}_{cd} + A'_sE_s\epsilon_{cu}\frac{K-\delta}{K} - A_sf_{yd} = 0$$

che risolta rispetto a K fornisce:

$$K = 0.617 \left(\mu_s - \alpha_u\mu'_s + \sqrt{(\mu_s - \alpha_u\mu'_s)^2 + 3.24\alpha_u\mu'_s\delta} \right) \quad (3.52)$$

Determinato il corretto valore di K e quindi la deformazione e la tensione nell'armatura compressa, il momento ultimo della sezione si valuta calcolando il momento risultante rispetto al baricentro delle tensioni nel calcestruzzo:

$$M_u = [(1 - 0.416K)A_sf_{yd} + (0.416K - \delta)A'_s\sigma_s(\epsilon'_s)]d \quad (3.53)$$

Sezioni debolmente armate: ($\mu_s < \mu_s^{(2)}$) Nel caso di più di un livello di armatura, anche continuando ad utilizzare il diagramma rettangolare equivalente, le relazioni valide per la sezione normalmente armata non possono utilizzarsi senza qualche modifica. Infatti nella regione 3 il punto fisso del diagramma non è più la deformazione massima del calcestruzzo compresso, bensì quella dell'acciaio teso, quindi la deformazione delle barre compresse deve essere espressa in funzione di ϵ_{sl} e non di ϵ_{cu} come è stato fatto in precedenza.

Si preferisce pertanto trattare il caso separatamente, esplicitando però solo le relazioni relative al primo sottocampo ($\epsilon_{cm} \geq \epsilon_{c1}$), in quanto, come si è visto per le sezioni con un solo livello di armatura, questa soluzione si può estendere, con buona approssimazione, anche al campo successivo.

Tenendo conto dell'eq. (3.26), l'equazione di equilibrio della sezione si scrive:

$$\left(1 - \frac{\epsilon_{c1}}{3\epsilon_{cm}}\right) K + \mu'_s \frac{\sigma_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} - \mu_s = 0$$

in cui le deformazioni del calcestruzzo e dell'acciaio compresso si possono esprimere in funzione del coefficiente K :

$$\epsilon_{cm} = \frac{K}{1-K} \epsilon_{sl} \quad \epsilon'_s = \frac{K-\delta}{1-K} \epsilon_{sl}$$

Supponendo che l'armatura compressa abbia superato il limite di snervamento, l'equazione di equilibrio diviene:

$$\left(1 - \frac{1-K}{3K} \frac{\epsilon_{c1}}{\epsilon_{sl}}\right) K + \mu'_s - \mu_s = 0$$

da cui si ricava:

$$K = 0.9375(\mu_s - \mu'_s) + 0.0625 \quad (3.54)$$

Da K si deriva ϵ'_s ; se questo è inferiore al limite di snervamento l'acciaio compresso è in fase elastica e quindi l'equazione di equilibrio deve essere modificata nella:

$$\left(1 - \frac{1-K}{3K} \frac{\epsilon_{c1}}{\epsilon_{sl}}\right) K + \mu'_s \frac{K-\delta}{1-K} \frac{\epsilon_{sl}}{\epsilon_{sy}} - \mu_s = 0$$

da cui si ricava:

$$K = 0.5313[1 + 0.8824(\mu_s + \mu'_s \alpha_l)] - \sqrt{0.2822[1 + 0.8824(\mu_s + \mu'_s \alpha_l)]^2 - 0.9375(\mu_s + \mu'_s \alpha_l \delta) - 0.0625} \quad (3.55)$$

in cui $\alpha_l = \epsilon_{sl}/\epsilon_{sy}$.

Quindi, determinato K , il momento ultimo si calcola con l'eq. (3.42) opportunamente corretta per tener conto dell'armatura compressa:

$$M_u = [(1 - 0.394K)A_s f_{yd} + (0.394K - \delta)A'_s \sigma_s(\epsilon'_s)]d \quad (3.56)$$

Dimensionamento della sezione

Le dimensioni di una sezione non sono mai determinate in modo univoco dalla sollecitazione; questo è particolarmente vero quando il progetto è svolto con riferimento allo stato limite ultimo della sezione: al variare del meccanismo di collasso imposto tra i campi 1, 2 e 3, la stessa sollecitazione determina sezioni molto diverse, con un campo di variazione assai più esteso di quello consentito dal calcolo alle tensioni ammissibili. Si deve tuttavia tener presente che quest'ampia libertà deve essere utilizzata con cautela; infatti lo stato limite ultimo non è l'unico che deve essere verificato: sezioni eccessivamente o troppo debolmente armate possono poi non soddisfare gli stati limite di esercizio. Bisogna poi ricordare che le norme impongono dei limiti alle dimensioni delle sezioni ed alle percentuali di armatura, oltre a tener presenti quelle regole empiriche con cui si cerca di tener conto dei fenomeni non considerati dagli schematici modelli di calcolo.

Se non si hanno particolari vincoli e limiti che condizionano le dimensioni della sezione in calcestruzzo, un criterio di progetto ragionevole consiste nell'assumere come meccanismo di collasso quello della rottura bilanciata.

Come si è visto, per le sezioni con un solo livello di armatura, in condizioni di rottura bilanciata si ha $K = 0.259$, quindi, calcolando il momento risultante rispetto al punto dove è posta l'armatura, si ha:

$$M_u = 0.81y_c b \bar{f}_{cd} (d - 0.416y_c) = 0.187bd^2 \bar{f}_{cd}$$

Posta la condizione di progetto $M_d = M_u$, l'equazione precedente consente di determinare una delle dimensioni della sezione; ad esempio, fissata la base b , si ottiene:

$$d = \bar{\alpha} \sqrt{\frac{M_d}{b}} \quad (3.57)$$

in cui $\bar{\alpha} = 2.311/\sqrt{\bar{f}_{cd}}$.

L'eq. (3.57) ha forma analoga all'eq. (3.14), ottenuta nell'ambito del calcolo alle tensioni ammissibili. Ovviamente i valori di $\bar{\alpha}$ sono diversi da quelli di α , ma, se si tiene conto che, mediamente, le sollecitazioni di calcolo sono amplificate, rispetto a quelle di esercizio, del fattore 1.5 (coefficiente di sicurezza dei carichi), dall'applicazione delle due equazioni si ottengono risultati molto simili.

Come si è già fatto notare il risultato dell'eq. (3.57) non è vincolante: sezioni con dimensioni (entro certi limiti) diverse da quelle così ottenute non soltanto sono possibili, ma offrono lo stesso grado di sicurezza nei confronti del collasso.

Se l'altezza utile della sezione è ottenuta applicando l'eq. (3.57) il braccio delle forze interne della sezione è

$$z = d - 0.416y_c = 0.89d$$

Pertanto l'area dell'armatura occorrente per l'equilibrio risulta:

$$A_s = \frac{M_d}{z f_{yd}} = \frac{M_d}{0.89d f_{yd}} \quad (3.58)$$

È interessante osservare come, anche in questo caso, il coefficiente del braccio delle forze interne sia prossimo a 0.9, valore utilizzato nel calcolo elastico. Questo valore è stato ottenuto per l'armatura bilanciata, ma non è difficile verificare che varia poco, almeno finché la sezione non risulta eccessivamente armata. Quindi l'eq. (3.58) si può con buona

approssimazione applicare a tutte le sezioni che collassano nei campi 2 e 3, cioè con la sola eccezione delle sezioni fortemente armate, per le quali la tensione nell'acciaio, al momento del collasso, è inferiore al limite di plasticizzazione. Tuttavia per sezioni molto armate (rottura nel campo 2 ma in prossimità di 1) è opportuno adottare un coefficiente $\zeta = z/d$ minore di 0.9; valori compresi tra $0.80 \div 0.85$ sono più appropriati in simili casi.

3.3.2 Sezioni a T ed I

L'ipotesi di considerare trascurabile il contributo del calcestruzzo teso, adottata sia nel calcolo a rottura sia in quello elastico, fa sì che, quando l'asse neutro attraversa la soletta, la sezione a T si comporti nello stesso modo di una rettangolare con base uguale alla larghezza b_s della soletta compressa; a queste sezioni, pertanto, si applicano tutte le considerazioni svolte nel punto precedente a proposito della sezione rettangolare.

Quando l'asse neutro cade al di sotto del lembo inferiore della soletta, invece, il comportamento cambia: in particolare il prisma delle pressioni ("stress block") non ha più base rettangolare e quindi non sono più validi i coefficienti 0.81 e 0.416 determinati per la sezione rettangolare. Tuttavia, così come si è visto per le sezioni debolmente armate, anche in questo caso l'uso di un diagramma di pressioni approssimato ha modesta influenza sul calcolo del momento ultimo della sezione: pertanto, almeno per tutti i casi in cui l'asse neutro non cade molto al di sotto della soletta, si ritiene ancora valido l'impiego del diagramma rettangolare equivalente, calibrato sulla sezione rettangolare.

L'uso di questo diagramma semplifica notevolmente il calcolo della risultante delle compressioni. Indicando con $y_c > s$ l'altezza della zona compressa, per l'approssimazione adottata, fintanto che risulta $0.8y_c \leq s$, ovvero $y_c \leq 1.25s$, si possono continuare ad adottare le formule della sezione rettangolare, in quanto il prisma delle compressioni interessa ancora solo la soletta. Quando invece $y_c > 1.25s$, allora la risultante delle tensioni nel calcestruzzo sarà:

$$C = (b_s - b)s\bar{f}_{cd} + 0.8y_cb\bar{f}_{cd}$$

in cui il primo termine è la risultante delle tensioni sulle ali, il secondo quella sull'anima. Il centro di pressione ha distanza dal lembo compresso:

$$\eta_C = \frac{(b_s - b)s^2\bar{f}_{cd}/2 + 0.32y_c^2b\bar{f}_{cd}}{C} = \frac{(b_s/b - 1)s^2 + 0.64y_c^2}{2[(b_s/b - 1)s + 0.8y_c]} \quad (3.59)$$

Nella condizione di collasso al limite tra la forte e la normale armatura la posizione dell'asse neutro è ancora espressa dall'eq. (3.30). Considerando anche la presenza di un'armatura compressa A'_s , che si suppone plasticizzata, l'equazione di equilibrio si scrive:

$$(b_s - b)s\bar{f}_{cd} + 0.8bd\bar{f}_{cd}\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} + A'_sf_{yd} = A_sf_{yd}$$

da cui si ottiene la percentuale meccanica limite per l'armatura tesa:

$$\mu_s^{(1)} = \mu'_s + \frac{0.8\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} + \frac{(b_s - b)s}{bd} \quad (3.60)$$

Questa relazione si può ricondurre a quella di una sezione rettangolare con armatura compressa aggiungendo a quella effettiva una percentuale equivalente all'area delle ali: $(b_s - b)s/bd$.

Analogamente per l'armatura bilanciata, sempre assumendo che sia $y_c > 1.25s$, l'eq. (3.47) ora diviene:

$$\mu_s^{(2)} = 0.21 + \frac{(b_s - b)s}{bd} + \mu'_s \frac{\sigma_s(\epsilon'_s)}{f_{yd}} \quad (3.61)$$

La similitudine tra le ali e l'armatura compressa in parte evita di sviluppare di nuovo esplicitamente le equazioni per la determinazione della posizione dell'asse neutro. Queste infatti, quando l'armatura compressa è plasticizzata (o assente), coincidono con quelle relative alla sezione rettangolare (eq. (3.48) per le sezioni fortemente armate e eq. (3.51) negli altri casi), avendo solo cura di aggiungere alla reale percentuale di armatura compressa quella equivalente alle ali: $(b_s - b)s/bd$.

Se l'armatura compressa non è plasticizzata l'armatura equivalente deve essere tenuta distinta da quella effettiva, quindi le equazioni (3.49) e (3.52) devono essere opportunamente modificate:

1. Sezioni fortemente armate:

$$K = 0.617[\alpha_u(\mu_s + \mu'_s) + \bar{\mu}] \left(\sqrt{1 + \frac{3.24(\mu_s + \mu'_s)\alpha_u}{[\alpha_u(\mu_s + \mu'_s) + \bar{\mu}]^2}} - 1 \right) \quad (3.62)$$

2. Sezioni normalmente armate:

$$K = 0.625 \left(\mu_s - \alpha_u \mu'_s - \bar{\mu} + \sqrt{(\mu_s - \alpha_u \mu'_s - \bar{\mu})^2 + 3.2\alpha_u \mu'_s \delta} \right) \quad (3.63)$$

3. Sezioni debolmente armate:

$$K = 0.625 (0.8 + \mu_s + \alpha_l \mu'_s - \bar{\mu} - \sqrt{(0.8 + \mu_s + \alpha_l \mu'_s - \bar{\mu})^2 - 3.2(\mu_s + \alpha_l \mu'_s \delta - \bar{\mu})}) \quad (3.64)$$

dove $\bar{\mu} = (b_s - b)s/bd$ è la percentuale meccanica di armatura equivalente alle ali della sezione a T.

Determinata la posizione dell'asse neutro il momento ultimo si calcola generalizzando adeguatamente le eq. (3.50) e (3.53). Per le sezioni fortemente armate si ha:

$$M_u = [0.8(1 - 0.4K)bd^2 + (b_s - b)s(d - s/2)]\bar{f}_{cd} + \sigma_s(\epsilon'_s)A'_s(d - d') \quad (3.65)$$

Mentre per le altre si può porre:

$$M_u = [(1 - 0.4K)A_s f_{yd} + (0.4K - \delta)A'_s \sigma_s(\epsilon'_s)]d + (0.4Kd - s/2)(b_s - b)s\bar{f}_{cd} \quad (3.66)$$

3.3.3 Flessione retta di sezioni di forma qualsiasi

Nelle sezioni in cemento armato la direzione dell'asse neutro può essere prevista a priori solo se sono simmetriche e sollecitate lungo quest'asse oppure vincolate ad inflettersi senza ruotare; in questo caso, come per il problema elastico, si tratta di flessione retta.

Pur con queste limitazioni, per le sezioni di geometria più complessa della rettangolare non è possibile sviluppare formule semplici di utilizzo pratico. In questo caso, e più in generale nella flessione deviata, è preferibile fare riferimento ad una procedura generale che può essere impiegata per sezioni di ogni forma. Questa procedura richiede calcoli piuttosto lunghi e quindi risulta efficace solo se inserita in un programma di calcolo.

L'idea del metodo è molto semplice: consiste nell'esplorare, ovviamente con un opportuno passo discreto, tutti i possibili diagrammi di collasso fino a determinare quello per cui è soddisfatta la condizione $N = 0$ e quindi calcolare il momento risultante corrispondente.¹²

Poiché la direzione dell'asse neutro è nota, è facile stabilire quali sono il punto della sezione di calcestruzzo e l'armatura maggiormente sollecitati. Posto $\epsilon_{cm} = \epsilon_{cu}$ si fa crescere (in valore assoluto) la deformazione dell'acciaio più teso fino a che o si raggiunge l'equilibrio o $\epsilon_s \leq \epsilon_{sl}$. Se si raggiunge questo punto senza che sia stato soddisfatto l'equilibrio, si riduce la deformazione del calcestruzzo muovendo il diagramma nel campo 3.

Per valutare la sollecitazione risultante che corrisponde ad un fissato diagramma delle deformazioni è necessario ricorrere ad un procedimento approssimato, dividendo la parte compressa della sezione in strisce sottili, tali che su ciascuna si possa assumere una tensione uniforme. Quindi se y_i indica la distanza del baricentro della fibra i -esima dall'asse neutro, la sua deformazione media sarà:

$$\epsilon_{ci} = \frac{\epsilon_{cm}}{y_c} y_i$$

e la corrispondente tensione si determina poi facilmente utilizzando la legge parabola-rettangolo o anche, quando opportuno, una relazione più accurata. Analogamente si può calcolare la deformazione e poi la tensione in ogni barra di armatura. Indicando con σ_{ci} e σ_{sj} le tensioni nelle strisce di calcestruzzo e nelle barre, la risultante delle tensioni si calcola semplicemente con le sommatorie:

$$N = \sum_{i=1}^{n_{str}} \sigma_{ci} b_i \Delta y_i + \sum_{j=1}^m \sigma_{sj} A_{sj} \quad (3.67)$$

in cui b_i e Δy_i sono la larghezza e lo spessore della striscia i .

Determinata la posizione dell'asse neutro che soddisfa l'equilibrio, il momento ultimo della sezione si valuta poi in modo analogo:

$$M_u = \sum_{i=1}^{n_{str}} \sigma_{ci} b_i \Delta y_i y_i + \sum_{j=1}^m \sigma_{sj} A_{sj} y_{sj} \quad (3.68)$$

(y_{sj} indica la distanza delle barre dall'asse neutro).

Il metodo, oltre a permettere di trattare sezioni di ogni forma, consente senza difficoltà di adottare legami costitutivi dei materiali più complessi di quelli schematici utilizzati in precedenza; quindi rende possibile lo sviluppo di modelli più raffinati, in grado ad esempio di seguire il comportamento della sezione per grandi deformazioni. Inoltre, come è facile intuire, si applica quasi senza modifiche anche alla sezioni soggette alla sollecitazione composta di pressione e flessione.

¹²Poiché N è funzione monotona di y_c è possibile esplorare il campo dei meccanismi di rottura con passo ampio; quando due valori consecutivi di N scavalcano lo zero si può applicare una procedura di interpolazione per determinare una soluzione più accurata. Generalmente il procedimento converge con rapidità.

3.3.4 Flessione deviata

Come nel caso elastico il problema della flessione deviata risulta notevolmente più oneroso da trattare, sia perché presenta due incognite, sia perché l'inclinazione dell'asse neutro esclude la possibilità di selezionare casi semplici, come quello della sezione rettangolare. Pertanto, come per la flessione retta di sezioni di forma complessa, conviene esporre una procedura numerica piuttosto che cercare di sviluppare formule che risulterebbero, anche nei casi semplici, notevolmente complesse.

Come per il caso elastico (§ 3.2.3) conviene utilizzare due riferimenti ortogonali; uno (x, y) con l'asse x coincidente con quello neutro e l'altro (t, s) con t parallelo all'asse di sollecitazione, come mostrato in fig. 3.5.

Le equazioni di equilibrio (3.20) sono ovviamente ancora valide, ma da esse non possono trarsi le condizioni geometriche delle eq. (3.21), che derivano dalla linearità del legame elastico. Sostituendo nella seconda delle eq. (3.20) l'espressione di t in funzione di x ed y fornita dalla trasformazione delle coordinate si ottiene:

$$\cos \alpha \int_A \sigma(y)x dA - \sin \alpha \int_A \sigma(y)y dA = 0 \quad (3.69)$$

dove ora l'integrale può intendersi esteso a tutta la sezione geometrica, con la condizione di utilizzare per σ l'effettivo valore della tensione in quel punto.

La procedura non è molto diversa da quella illustrata nel § 3.2.3 per il caso elastico. Fissata una direzione di tentativo dell'asse neutro, individuata dall'angolo α si può cercare la posizione per cui è verificata la condizione di equilibrio alla traslazione espressa dalla prima delle eq. (3.20). Questo si può fare usando il metodo illustrato nel punto precedente per la flessione retta delle sezioni arbitrarie. L'asse x è effettivamente neutro per la condizione esaminata se soddisfa anche l'eq. (3.69). Gli integrali che vi compaiono si possono ancora calcolare, per la parte relativa al calcestruzzo, con il metodo delle strisce. Esplicitamente si avrà:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma(\epsilon)x dA &\simeq \sum_{i=1}^{n_{str}} \frac{x_{2i}^2 - x_{1i}^2}{2} \Delta y_i \sigma_{ci} + \sum_{j=1}^m A_{sj} \sigma_{sj} x_{sj} \\ \int_A \sigma(\epsilon)y dA &\simeq \sum_{i=1}^{n_{str}} (x_{2i} - x_{1i}) y_i \Delta y_i \sigma_{ci} + \sum_{j=1}^m A_{sj} \sigma_{sj} y_{sj} \end{aligned}$$

dove x_{2i} , x_{1i} sono le ascisse degli estremi della striscia i e x_{sj} , y_{sj} sono le coordinate della j -esima barra.

Se l'eq. (3.69) non è soddisfatta si deve modificare α e riprovare. Un modo semplice consiste nel calcolare il nuovo valore di α proprio mediante questa equazione, assumendo $\tan \alpha$ uguale al rapporto tra il primo ed il secondo integrale; altrimenti si useranno metodi classici dell'analisi numerica, quali il metodo di Newton.

Raggiunta la convergenza il valore del momento ultimo è dato dalla terza delle equazioni (3.20):

$$M_u = \sin \alpha \int_A \sigma(y)x dA + \cos \alpha \int_A \sigma(y)y dA \quad (3.70)$$

3.3.5 Esempi

Si riprendono alcuni degli esempi riportati nel § 3.2.4, relativi alla verifica di sezioni inflesse con il metodo delle tensioni ammissibili, ripetendone il calcolo allo stato limite ultimo per rendere possibile il confronto tra i risultati ottenuti con i due metodi.

Esempio 3.7 Si calcoli il momento ultimo sopportato dalla sezione rettangolare descritta nell'esempio 3.1, assumendo che i materiali impiegati abbiano le seguenti caratteristiche:

$$\begin{array}{ll} \text{Calcestruzzo:} & R_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2 \quad \bar{f}_{cd} = 13.23 \text{ N/mm}^2 \\ \text{Acciaio:} & \text{Fe B 44k} \quad f_{yd} = 374 \text{ N/mm}^2 \end{array}$$

Per le eq. (3.31) e (3.33) le percentuali limite di armatura delle sezioni semplicemente armate risultano:

$$\mu_s^{(1)} = \frac{0.81\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + f_{yd}/E_s} = 0.588 \quad \mu_s^{(2)} = 0.21 \quad (3.71)$$

Le percentuali meccaniche di armatura della sezione in esame sono:

$$\mu_s = \frac{7.6 \times 37400}{30 \times 42 \times 1323} = 0.1705 \quad \mu'_s = \frac{3 \times 37400}{30 \times 42 \times 1323} = 0.051$$

quindi $\mu_s < \mu_s^{(2)}$ e pertanto la sezione risulta debolmente armata.

Supponendo che l'armatura compressa abbia superato lo snervamento, per l'eq. (3.54) si ha:

$$K = 0.9375(0.1705 - 0.051) + 0.0625 = 0.1745$$

da cui segue:

$$\epsilon'_s = \frac{K - \delta}{1 - K} \epsilon_{sl} = 1.25 \times 10^{-3} < \epsilon_{sy} = 1.78 \times 10^{-3}$$

in cui $\delta = 3/42 = 0.0714$. Poiché la deformazione dell'acciaio compresso è inferiore alla soglia di snervamento, la posizione dell'asse neutro è data dall'eq. (3.55):

$$K = 0.7455 - \sqrt{0.7455^2 - 0.1790 - 0.0625} = 0.1848$$

e pertanto la deformazione e la tensione nell'acciaio compresso valgono:

$$\epsilon'_s = 1.39 \times 10^{-3} \quad \sigma'_s = \epsilon'_s E_s = 292.4 \text{ N/mm}^2$$

Infine il momento ultimo della sezione si calcola facendo uso dell'eq. (3.56) e risulta:

$$M_u = 110.7 \text{ kNm}$$

Si osservi che nell'esempio 3.1 la sezione risultava verificata per una sollecitazione di esercizio $M = 75 \text{ kNm}$: quindi tra la sollecitazione ultima e quella di esercizio si ha il rapporto $110.6/75 = 1.47$, molto vicino al valore 1.5 del coefficiente di sicurezza dei carichi. □

Esempio 3.8 Dimensionare una sezione in cemento armato per una sollecitazione di progetto $M_d = 1.5 \times 120 = 180 \text{ kNm}$, utilizzando gli stessi materiali previsti nell'esempio precedente.

Si assume, come nell'esempio 3.2, $b = 30 \text{ cm}$; essendo $\bar{\alpha} = 2.311/\sqrt{13230} = 0.0201$, fissato il meccanismo di rottura bilanciata, l'altezza utile della sezione risulta:

$$d = \bar{\alpha} \sqrt{\frac{M_d}{b}} = 0.0201 \sqrt{\frac{180}{0.30}} = 0.49 \text{ m}$$

Quindi l'area dell'armatura occorrente si calcola con l'eq. (3.58):

$$A_s = \frac{180000}{0.91 \times 0.49 \times 374} = 1079 \text{ mm}^2$$

Questi risultati sono poco diversi da quelli ottenuti progettando la sezione alle tensioni ammissibili; ciò conferma che le sezioni progettate con questo criterio collassano in prevalenza nella zona di transizione tra la normale e la debole armatura. □

Esempio 3.9 Determinare l'armatura occorrente perché una sezione rettangolare, di dimensioni $b = 30$ cm, $d = 37$ cm abbia un momento ultimo di 180 kNm (stessi materiali dell'esempio precedente).

Assumendo che il braccio delle forze interne sia $z = 0.9d$ e supponendo che il meccanismo di collasso cada nelle regioni 2 o 3, il quantitativo di armatura occorrente risulta:

$$A_s = \frac{M_u}{z f_{yd}} = \frac{180000}{0.9 \times 0.37 \times 374} = 1445 \text{ mm}^2$$

cui corrisponde la percentuale meccanica:

$$\mu_s = \frac{14.45 \times 37400}{30 \times 37 \times 1323} = 0.368$$

Quindi, confrontando μ_s con i valori limiti forniti dall'eq. (3.71), si deduce che il collasso avviene nel campo 2. La posizione dell'asse neutro pertanto è data dall'eq. (3.36):

$$K = 1.235\mu_s = 0.4545$$

a cui corrispondono i valori del braccio delle forze interne $z = (1 - 0.416K)d = 0.811d$ e del momento ultimo $M_u = 162.6$ kNm.

Si ricalcola pertanto l'armatura assumendo $z = 0.8d$. Con calcoli analoghi ai precedenti si ottiene:

$$A_s = 16.26 \text{ cm}^2 \quad \mu_s = 0.414$$

La sezione è ancora normalmente armata. L'altezza della zona compressa risulta $K = 0.511$ ed il braccio delle forze interne $z = 0.787d$; a questi valori corrisponde il momento ultimo $M_u = 179$ kNm, sufficientemente prossimo a quello richiesto dal progetto. \square

Esempio 3.10 Determinare il momento ultimo della sezione a T dell'esempio 3.4, illustrata in fig. 3.6, ove si impieghino i seguenti materiali: calcestruzzo $R_{ck} = 30$ N/mm², acciaio Fe B 44k, già usati nell'es. 3.7.

Se l'asse neutro attraversa la soletta la sezione si comporta come se fosse rettangolare con $b = 80$ cm; di conseguenza le percentuali meccaniche delle armature risultano:

$$\mu_s = 0.171 \quad \mu'_s = 0.033$$

Dunque la sezione è debolmente armata. Se $\epsilon'_s \geq \epsilon_{sy}$ la posizione dell'asse neutro si calcola con l'eq. (3.54):

$$K = 0.9375(0.171 - 0.033) + 0.0625 = 0.192$$

Quindi, essendo $\delta = d'/d = 0.0638$, la deformazione dell'acciaio compresso prende il valore:

$$\epsilon'_s = \frac{K - \delta}{1 - K} = 1.585 \times 10^{-3}$$

minore della soglia plastica. Pertanto l'acciaio compresso rimane elastico e di conseguenza la posizione dell'asse neutro deve essere valutata mediante l'eq. (3.55), da cui si ottiene:

$$K = 0.1947 \quad y_c = Kd = 9.15 \text{ cm} < s$$

Il risultato è coerente con l'ipotesi iniziale e quindi è corretto; il momento ultimo è dato dall'eq. (3.56):

$$M_u = 371 \text{ kNm}$$

Se si confronta questo valore con quello (240 kNm) con cui la sezione era stata verificata alle tensioni ammissibili, si osserva che il loro rapporto è 1.54, molto simile al coefficiente di sicurezza che deve essere applicato ai carichi. \square

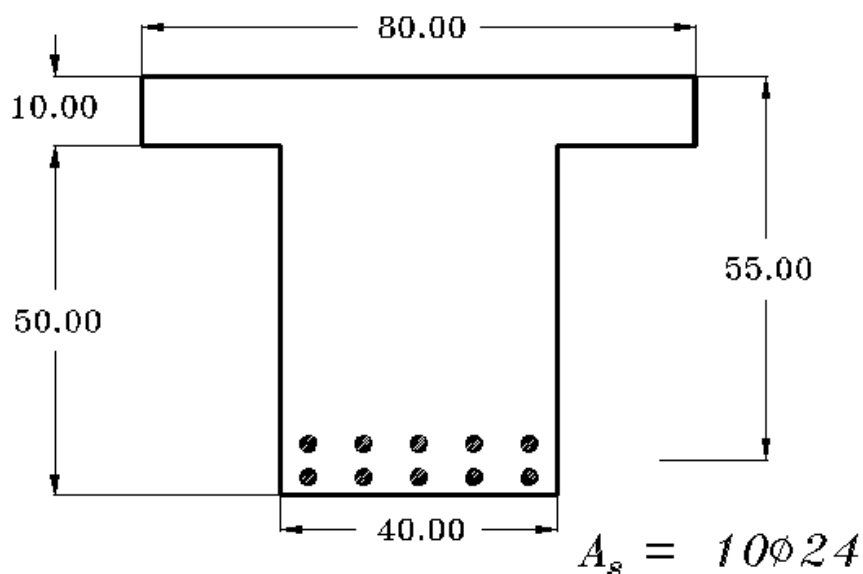


Figura 3.12: Sezione a T

Esempio 3.11 Determinare il momento ultimo della sezione a T illustrata in fig. 3.12, supponendo di utilizzare gli stessi materiali descritti nell'esempio

L'area delle barre di armatura è:

$$A_s = 10\phi 24 = 45.2 \text{ cm}^2$$

Se l'asse neutro è all'interno della soletta si assume $b = 80$ cm; ne deriva una percentuale meccanica dell'armatura $\mu_s = 0.29$, da cui segue che la sezione collassa nel campo 2 e la posizione dell'asse neutro, data dall'eq. (3.36), è:

$$K = 1.235\mu_s = 0.358 \quad y_c = Kd = 19.7 \text{ cm} > s$$

Questo risultato contrasta con l'ipotesi iniziale, quindi l'asse neutro si trova sotto le ali. Prendendo come larghezza della sezione quella dell'anima $b = 40$ cm, la percentuale di armatura equivalente alle ali è:

$$\bar{\mu} = \frac{(80 - 40)10}{40 \times 55} = 0.182$$

mentre quella dell'armatura tesa ora risulta:

$$\mu_s = 0.581$$

La differenza tra quest'ultima e quella compressa equivalente $\mu_s - \bar{\mu} = 0.399$ è ancora compresa tra i valori di $\mu_s^{(1)}$ e $\mu_s^{(2)}$ (eq. (3.71)) e pertanto l'altezza della zona compressa si calcola con l'eq. (3.51):

$$K = 1.25(\mu_s - \bar{\mu}) = 0.499 \quad y_c = 27.4 \text{ cm}$$

Infine il momento ultimo della sezione si ottiene applicando l'eq. (3.66):

$$\begin{aligned} M_u &= (55 - 0.4 \times 27.4)45.2 \times 37400 + \\ &\quad + (0.4 \times 27.4 - 5)(80 - 40)10 \times 1323 = \\ &= 77.6 \times 10^6 \text{ Ncm} = 776 \text{ kNm} \end{aligned}$$

È interessante osservare che le tensioni massime in fase elastica di questa sezione, sollecitata dal momento $M = M_u/1.5 = 517$ kNm, risultano:

$$\sigma_c = 13.1 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_s = 237.5 \text{ N/mm}^2$$

che non rispettano, per il calcestruzzo, il limite posto dalle tensioni ammissibili. □