

# Instabilità delle aste compresse

3 giugno 2003

## 1 L'asta caricata di punta (asta di Eulero)

In un'asta realizzata con un materiale elastico lineare, soggetta ad uno sforzo normale centrato  $N$  e vincolata agli estremi con lo schema di semplice appoggio, come mostrato nella Fig. 1, la sollecitazione, nell'ipotesi di asta indeformata è semplicemente  $\sigma = \frac{N}{A}$ .



Figura 1: Schema dell'asta di Eulero

Supponendo che l'asta subisca uno sbandamento in modo che la sua linea d'asse sia descritta dalla curva di equazione  $u(x)$ , illustrata in Fig. 2, la forza  $N$  produce anche un momento  $Nu(x)$ , a cui si oppone il momento interno che, se si confonde la curvatura con la derivata seconda, è  $EJu''(x)$ . La condizione di equilibrio, per cui la configurazione deformata è in equilibrio con la forza esterna, impone che:

$$EJu''(x) + Nu(x) = 0 \quad (1)$$

La soluzione cercata deve soddisfare l'eq. (1) e le condizioni al contorno:

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (2)$$

( $L$  è la lunghezza dell'asta). La soluzione dell'eq. (1) è:

$$u(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \quad (3)$$



Figura 2: Sbandamento dell'asta

dove

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}} \quad (4)$$

e  $A$  e  $B$  sono costanti che dipendono dalle condizioni al contorno. Dalla condizione  $u(0) = A = 0$ , segue che la prima delle due costanti è nulla; dalla seconda delle (2) segue:

$$u(L) = B \sin(\alpha L) = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni possibili: se  $\sin(\alpha L) \neq 0$ , deve risultare  $B = 0$ ; in questo caso la soluzione dell'eq. (1) con le condizioni al contorno (2) è  $u(x) \equiv 0$ , ovvero la sola configurazione di equilibrio è quella indeformata. Se  $\sin(\alpha L) = 0$  allora la condizione al contorno è soddisfatta per qualunque valore di  $B$ , pertanto esistono infinite configurazioni equilibrate (equilibrio indifferente).

La condizione  $\sin(\alpha L) = 0$  implica che  $\alpha L = n\pi$ , dove  $n$  indica un intero positivo. Ricordando la definizione (4) di  $\alpha$ , si ha che la precedente condizione è soddisfatta se

$$\frac{N}{EJ} L^2 = n^2 \pi^2 \quad (5)$$

e questo si verifica per quei valori di  $N$  tali che

$$N_n = n^2 \pi^2 \frac{EJ}{L^2} \quad (6)$$

Il più piccolo dei valori di  $N_n$  corrisponde al passaggio da una condizione di equilibrio stabile ad una instabile. Tale valore è quello per  $n = 1$ , ed è detto il *carico critico euleriano* dell'asta compressa:

$$N_c = \pi^2 \frac{EJ}{L^2} \quad (7)$$

Dal carico critico si deriva facilmente la *tensione critica*, cioè il valore della tensione che si raggiunge nell'asta quando  $N = N_c$ . Tenendo conto della (7) si deduce facilmente che:

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad (8)$$

dove il rapporto adimensionale

$$\lambda = \frac{L}{\rho} \quad (9)$$

è chiamato la *snellezza* dell'asta mentre  $\rho = \sqrt{\frac{J}{A}}$  indica il giratore di inerzia della sezione.

Per un'asta formata con un materiale idealmente elastico  $\sigma_c$  potrebbe assumere qualunque valore. In pratica ogni materiale ha un limite di resistenza che non può essere superato. Per l'acciaio si è convenzionalmente fissato per questo valore la tensione di snervamento, per cui deve in ogni caso risultare  $\sigma \leq f_y$ , dove  $f_y$  è la tensione di snervamento dell'acciaio. Imponendo che  $\sigma_c = f_y$  si ottiene il valore della snellezza per la quale si raggiungono simultaneamente la tensione critica e lo snervamento; ponendo  $f_y$  in luogo di  $\sigma_c$  nella (8), si ha immediatamente:

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (10)$$

Dalla (8) e dalla (10) si deduce che:

$$\frac{\sigma_c}{f_y} = \frac{1}{\lambda^2} \pi^2 \frac{E}{f_y} = \left( \frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2$$

Posto  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_c}$  e  $\gamma_c = \frac{\sigma_c}{f_y}$  l'equazione precedente diviene

$$\gamma_c = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \quad (11)$$

L'equazione (11) è un'iperbole cubica ed è rappresentata in Fig. 3; la curva è interrotta in corrispondenza del valore  $\bar{\lambda} = 1$  (ossia per  $\lambda = \lambda_c$ ) in quanto per valori inferiori di  $\lambda$  la tensione critica supera quella di snervamento del materiale. Nel modello ideale ora analizzato, per aste con snellezza inferiore a  $\lambda_c$  il limite di resistenza è dato dallo snervamento del materiale (aste tozze), mentre per aste con snellezza maggiore di  $\lambda_c$  la crisi si raggiunge prima per instabilità, quando la tensione prende il valore critico, fornito dall'eq. (11) o dalla figura 3.

## 1.1 Punto di vista energetico

Assegnando alla linea d'asse dell'asta una deformata arbitraria  $\delta u = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  la trave subisce una curvatura

$$\delta \chi \simeq \frac{d^2 \delta u}{dx^2} = -\delta \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

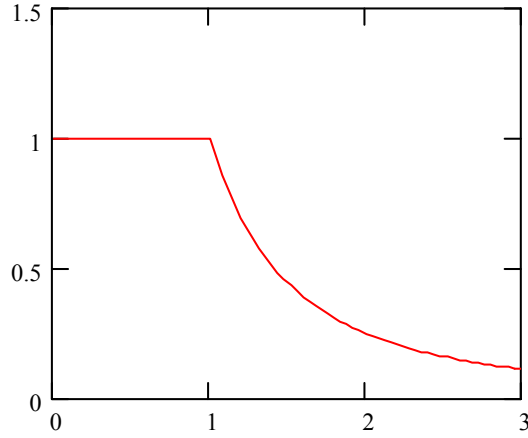


Figura 3: Iperbole di Eulero in forma normalizzata. In ascissa  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_c$ , in ordinata  $\gamma = \sigma_c/f_y$

a cui corrisponde un'energia elastica

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}EJ \int_0^L \delta\chi^2 dx = \frac{EJ}{2} \delta^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \sin^2\left(\pi\frac{x}{L}\right) dx = \frac{EJ}{4} \delta^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 L \quad (12)$$

A seguito della deformazione il carico subisce un'abbassamento dovuto alla differenza di lunghezza tra corda ed arco. Poiché, per piccoli valori della freccia si può porre:

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\delta u^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{d\delta u}{dx}\right)^2} \simeq dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta u}{dx}\right)^2 \right]$$

lo spostamento del carico risulta:

$$\delta v = \int_0^L ds - L = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx}\right)^2 dx$$

per cui, tenendo conto della funzione assegnata a  $\delta u$ , si ricava

$$\delta v = \frac{1}{4} \delta^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 L$$

ed il lavoro della forza è:

$$\mathcal{L} = N\delta v = \frac{N}{4} \delta^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 L \quad (13)$$

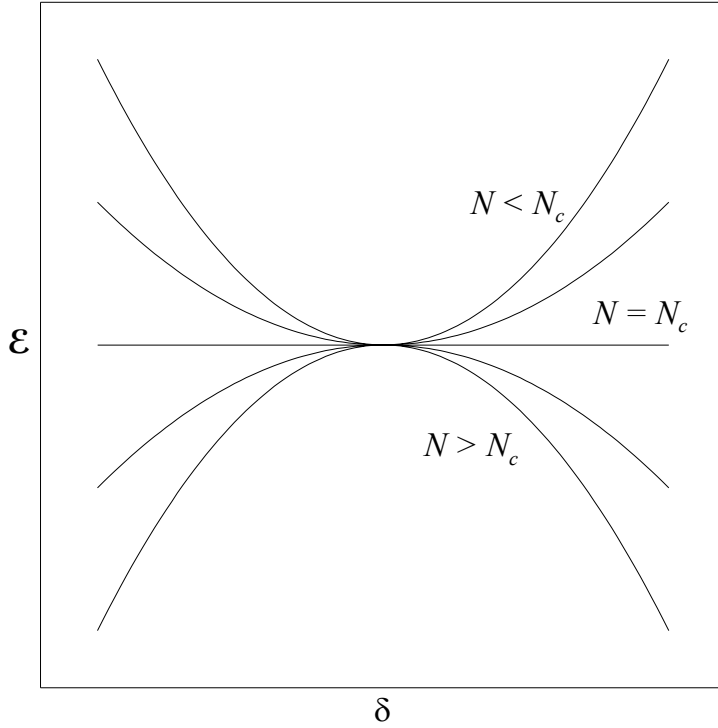


Figura 4: Curve di potenziale dell'asta di Eulero al variare di  $N_c - N$

L'energia totale del sistema, elastica e di posizione, risulta pertanto

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E} - \mathcal{L} = \frac{\delta^2 \pi^2}{4L} \left( \frac{EJ}{L^2} \pi^2 - N \right) = \frac{\delta^2 \pi^2}{4L} (N_c - N) \quad (14)$$

Nel derivare l'ultima equazione si è tenuto conto dell'espressione (7) del carico critico. L'equazione (14) di  $\mathcal{E}_t$  in funzione dello spostamento  $\delta$  è quella di una parabola simmetrica con vertice nell'origine. Per  $N < N_c$  il coefficiente è positivo, quindi l'energia cresce con  $\delta$ ; il sistema è pertanto stabile. Per  $N > N_c$  il coefficiente è negativo e quindi l'energia diminuisce, l'equilibrio è pertanto instabile. Il punto di biforcazione è dato dalla condizione  $N = N_c$ , per cui il coefficiente è nullo e quindi l'energia rimane costante al variare di  $\delta$ : questo corrisponde alla condizione di equilibrio indifferente (Fig. 4).

## 2 Carico eccentrico

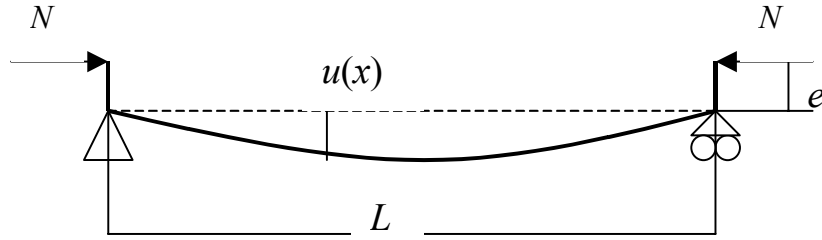


Figura 5: Asta con carico eccentrico

L'asta caricata di punta dà una forza perfettamente assiale rappresenta un limite ideale a cui le situazioni reali possono tendere ma mai raggiungere completamente. In pratica la non perfetta linearità della linea d'asse dell'asta, la non perfetta verticalità dei pilastri, la pratica impossibilità di realizzare vincoli che non trasmettano momenti, fanno sì che in ogni sezione sia presente una eccentricità non intenzionale, per cui oltre alla forza assiale si manifesta anche un momento flettente iniziale che si aggiunge a quello prodotto dagli effetti della deformazione. La presenza di questo momento cambia sensibilmente la soluzione e di esso si deve tener conto quando si verifica un'asta snella soggetta a carico assiale.

Naturalmente l'eccentricità casuale generalmente varia lungo l'asta in modo non del tutto prevedibile. Per studiare almeno qualitativamente il fenomeno si analizza ora il caso di un carico agente con eccentricità uniforme; questa eccentricità può rappresentare sia il caso di un'eccentricità intenzionale, dovuta alle condizioni di progetto, sia un "valore medio" dell'eccentricità casuale: in entrambi i casi se ne trarranno le conclusioni per le equazioni di progetto.

Per tener conto dell'eccentricità iniziale è sufficiente aggiungere all'eq. (1) il termine noto  $-\alpha e$ .

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = -\alpha^2 e \quad (15)$$

Con le condizioni iniziali (2) la soluzione dell'eq. (15) è:

$$u(x) = e \left[ \cos(\alpha x) + \frac{1 - \cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} \sin(\alpha x) - 1 \right] \quad (16)$$

Questa equazione si può riscrivere:

$$u(x) = e \left[ \frac{\cos(\alpha x) \sin(\alpha L) - \cos(\alpha L) \sin(\alpha x) + \sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} - 1 \right] = \\ = e \left[ \frac{\sin[\alpha(L-x)] + \sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} - 1 \right] \quad (17)$$

Lo spostamento massimo si verifica per  $x = L/2$ .

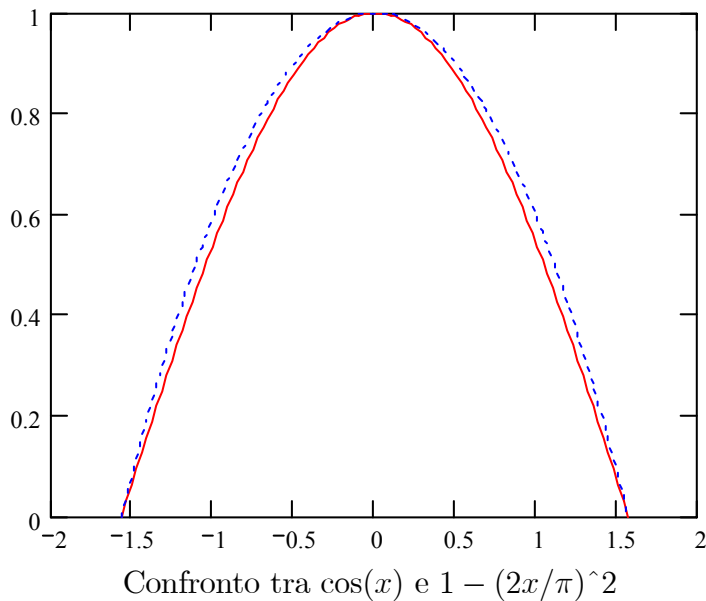
$$u_m = u(L/2) = e \left[ \frac{2 \sin(\alpha L/2)}{\sin(\alpha L)} - 1 \right]$$

Tenedo conto che  $\sin(\alpha L) = 2 \sin(\alpha L/2) \cos(\alpha L/2)$ , si ottiene

$$u_m = e \left[ \frac{1}{\cos(\alpha L/2)} - 1 \right] \quad (18)$$

L'eccentricità complessiva, somma di quella iniziale e della deformazione, nella sezione di mezzeria sarà quindi

$$e_1 = e + u_m = \frac{e}{\cos(\alpha L/2)} \quad (19)$$



La funzione  $\cos(x)$ , nell'intervallo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , può essere approssimata dal polinomio:

$$\cos(x) \approx 1 - \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$$

come mostrato in Fig. ??; quindi

$$e_1 = \frac{e}{\cos\left(\alpha\frac{L}{2}\right)} \approx \frac{e}{1 - \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2} \quad (20)$$

Tenendo conto che per la (4)

$$\alpha^2 = \frac{N}{EJ}$$

si ha che

$$\left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2 = \frac{NL^2}{\pi^2 EJ} = \frac{N}{N_c} \quad (21)$$

dove  $N_c$  è il carico critico euleriano [eq. (7)]. Sostituendo la (21) nella (20) si ottiene

$$e_1 = \frac{e}{1 - \frac{N}{N_c}} \quad (22)$$

La sezione di mezzeria dell'asta è quindi soggetta ad una forza assiale  $N$  e ad un momento flettente  $M_1 = Ne_1$ . La tensione massima nella sezione è

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{Ne_1}{W} = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{W\left(1 - \frac{N}{N_c}\right)} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W\left(1 - \frac{N}{N_c}\right)} \quad (23)$$

in cui  $M = Ne$  è il momento del primo ordine e  $W = \frac{J}{y_{\max}}$  indica il modulo di resistenza della sezione. Poiché  $\rho^2 = \frac{J}{A}$  è il quadrato del giratore di inerzia della sezione, la (23) si può scrivere:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \left[ 1 + \frac{ey_{\max}}{\rho^2 \left(1 - \frac{N}{N_c}\right)} \right] = \sigma_m \left[ 1 + \frac{ey_{\max}}{\rho^2 \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_c}\right)} \right] \quad (24)$$

dove:

$$\sigma_m = \frac{N}{A} \quad (25)$$

e  $\sigma_c = N_c/A$  è la tensione critica [eq. (8)].

Il rapporto

$$e_0 = \frac{\rho^2}{y_{\max}} \quad (26)$$

è la distanza dal baricentro del limite del nocciolo di inerzia. Pertanto

$$\frac{ey_{\max}}{\rho^2} = \frac{e}{e_0} = m \quad (27)$$

misura il rapporto tra l'eccentricità effettiva e quella limite.

La condizione di progetto è  $\sigma_{\max} = f_y$ , dove  $f_y$  è la tensione di snervamento del materiale. Dall'eq. (24) si deduce quindi un'equazione la cui incognita è  $\sigma_m$ :

$$f_y = \sigma_m \left[ 1 + \frac{m}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} \right] = \sigma_m \left[ 1 + \frac{m\sigma_c}{\sigma_c - \sigma_m} \right]$$

da cui segue:

$$\sigma_m^2 - \sigma_m [f_y + \sigma_c (1 + m)] + f_y \sigma_c = 0 \quad (28)$$

Dividendo per  $f_y^2$  e ponendo  $\gamma_m = \frac{\sigma_m}{f_y}$  risulta:

$$\gamma_m^2 - \gamma_m \left[ 1 + \frac{\sigma_c}{f_y} (1 + m) \right] + \frac{\sigma_c}{f_y} = 0 \quad (29)$$

D'altra parte, per la (11), si ha che:

$$\frac{\sigma_c}{f_y} = \left( \frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \quad (30)$$

dove  $\lambda_c$  è definita nell'eq. (10) e

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_c} \quad (31)$$

Con queste posizioni la (29) diviene:

$$\gamma_m^2 - \gamma_m \left[ 1 + \frac{(1 + m)}{\bar{\lambda}^2} \right] + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} = 0$$

da cui, moltiplicando per  $\bar{\lambda}^2$ :

$$\gamma_m^2 \bar{\lambda}^2 - \gamma_m [\bar{\lambda}^2 + (1 + m)] + 1 = 0 \quad (32)$$

La soluzione utile di questa equazione è

$$\gamma_m = \frac{\sigma_m}{f_y} = \frac{\bar{\lambda}^2 + (1 + m) - \sqrt{[\bar{\lambda}^2 + (1 + m)]^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (33)$$

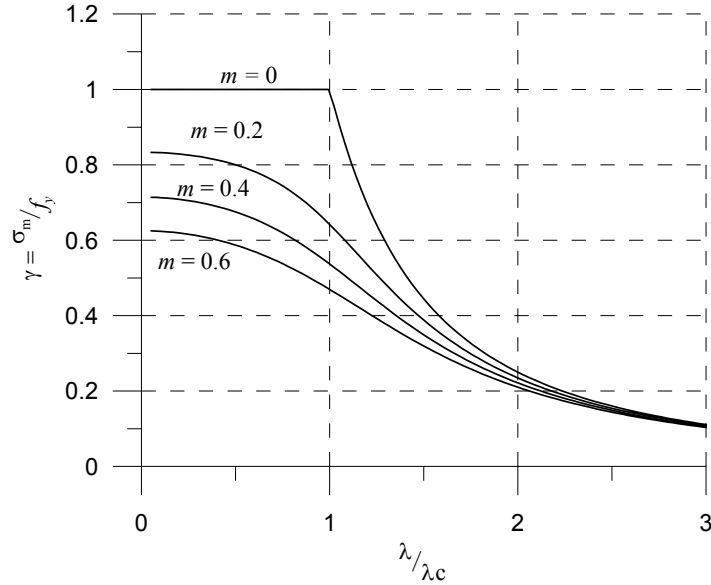


Figura 6: Rapporto  $\sigma_m/f_y$  in funzione della snellezza normalizzata  $\bar{\lambda}$

Le curve  $\gamma_m - \bar{\lambda}$  sono riportate, per alcuni valori di  $m$ , nella Fig. 6. Per  $m = 0$  si ottiene l'iperbole di Eulero, ovviamente troncata al valore  $\gamma = 1$ , che corrisponde alla condizione in cui lo snervamento del materiale precede il raggiungimento del carico critico.

Se l'eccentricità è dovuta solo a difetti di centratura e di non verticalità, l'entità di  $e$  dipenderà dalla lunghezza dell'asta; l'eccentricità adimensionale  $m = e/e_0$  si potrà pertanto porre in relazione alla snellezza  $\lambda$  e tenderà ad annullarsi per  $\lambda \rightarrow 0$ . Le norme tecniche del CNR 1011 pongono

$$m = \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0.04}$$

in modo tale che si abbia  $m = 0$  per  $\bar{\lambda} \leq 0.2$  e  $m \propto \bar{\lambda}$  per  $\bar{\lambda} \gg 0.2$ . In questa relazione  $\alpha$  è una costante che dipende dalla tipologia della sezione. Sono definite quattro curve a cui corrispondono i seguenti valori di  $\alpha$  :

	a	b	c	d
$\alpha$	0.158	0.281	0.384	0.587

L'equazione che esprime il coefficiente  $\gamma_m$  assume pertanto l'espressione:

$$\gamma_m = \frac{\sigma_m}{f_y} = \frac{1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0.04} + \bar{\lambda}^2 - \sqrt{\left[1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0.04} + \bar{\lambda}^2\right]^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (34)$$

Le relative 4 curve sono illustrate in Fig. 7, mentre la corrispondenza tra le curve e le tipologie delle sezioni è riportata nella Fig. 8.

La curva *a* si riferisce ai tubi quadrati, rettangolari e tondi.

La curva *b* si riferisce alle aste semplici costituite da:

1. sezioni a doppio T laminate, in cui il rapporto fra l'altezza  $h$  del profilato e la larghezza  $b$  delle ali sia tale che  $h/b \geq 1.2$  (per esempio HE con  $h > 360$  mm ed IPE);
2. sezioni a doppio T laminate in cui le ali siano rinforzate da piatti ad esse saldati;
3. sezioni chiuse a cassone composte mediante saldatura.

La curva *c* si riferisce alle aste semplici costituite da tipi di laminati diversi da quelli elencati di sopra o da sezioni aperte composte mediante saldatura e a tutte le aste composte da più profilati.

La curva *d* si riferisce ad aste semplici o composte aventi spessore  $t > 40$  mm.

Nel caso in cui vengano disposti dei piatti saldati a rinforzo delle ali di un profilato a doppio T laminato, deve essere assunto come spessore  $t$  il maggiore fra i valori dello spessore dell'ala e quello del piatto di rinforzo.

L'inverso del coefficiente  $\gamma$  è indicato con il simbolo  $\omega$ : i valori di  $\omega$  sono tabellati in funzione della snellezza, del tipo di acciaio e della sezione. La verifica di un'asta compressa si esegue quindi controllando che

$$\sigma_m = \frac{N}{A} \leq f_y \gamma = \frac{f_y}{\omega}$$

Questa condizione è equivalente alla

$$\frac{N\omega}{A} \leq f_y \quad (35)$$

Quando è presente anche un'eccentricità intenzionale  $e$  si applica l'equazione (23), tenendo però conto dell'eccentricità accidentale mediante il coefficiente  $\omega$

$$\frac{N\omega}{A} + \frac{M}{W \left(1 + \frac{N}{N_c}\right)} \leq f_y \quad (36)$$

La (36) è stata dedotta per il caso di momento uniforme lungo l'asta. Nel caso di momento variabile questa equazione viene ancora applicata sostituendo ad  $M$  un momento equivalente  $M_e$ . Indicando con  $M_1$  ed  $M_2$  i momenti

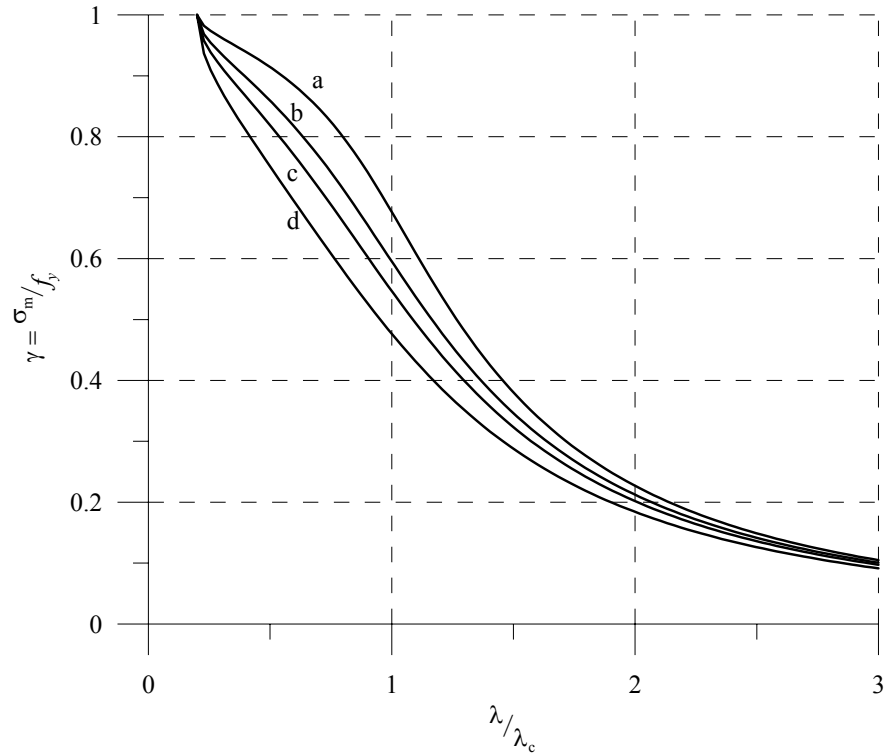


Figura 7: Coefficiente di riduzione della tensione media per l'asta caricata di punta, secondo le norme CNR 1011

alle estremità dell'asta, con  $|M_1| \geq |M_2|$  e considerando dello stesso segno i momenti che tendono le stesse fibre della trave, il momento equivalente è definito:

$$M_e = |0.6M_1 + 0.4M_2| \geq 0.4|M_1| \quad (37)$$

### 3 Aste deformabili a taglio

Nei paragrafi precedenti la trave è stata considerata deformabile solo a flessione, in quanto la deformabilità a taglio, particolarmente nelle aste snelle, è molto più piccola e può essere trascurata. Vi sono dei casi però, come quello delle aste composte, in cui il contributo della deformabilità per taglio non si può trascurare. In questo paragrafo si determina il valore del carico critico di un'asta tenendo conto della sua deformabilità per taglio.

Indicando con  $k_t$  la rigidezza a taglio della sezione, in presenza di una sollecitazione di taglio  $V$  si ha uno scorrimento relativo  $\varphi_t = V/k_t$  e quindi

Aste	Forma della sezione	Curva
semplici	profili cavi quadri, rettangoli o tondi saldati o laminati $t \leq 40$ mm	a
semplici	I laminati $\frac{h}{b} \geq 1,2$ $t \leq 40$	b
	I laminati rinforzati con piatti saldati $t_1 \leq 40$ $t_2 \leq 40$	
	chiusa, a cassone, saldata $t \leq 40$	
semplici o composte	generica $t \leq 40$ mm	c
	tutte $t > 40$ mm	d

Figura 8: Corrispondenza tra le curve di Fig. 7 e le tipologie delle sezioni

una curvatura che si aggiunge a quella provocata dalla flessione

$$\frac{d\varphi_t}{dx} = \frac{1}{k_t} \frac{dV}{dx}$$

nell'ipotesi che  $k_t$  non sia funzione di  $x$ . Approssimando la curvatura con la derivata seconda dello spostamento si ha così globalmente

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{1}{k_t} \frac{dV}{dx}$$

Quindi, tenendo conto che  $V = \frac{dM}{dx}$ , si ottiene:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{1}{k_t} \frac{d^2M}{dx^2} \quad (38)$$

Nel caso dell'asta caricata di punta  $M = Nu$ , di conseguenza l'equazione precedente diviene:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{Nu}{EJ} + \frac{N}{k_t} \frac{d^2u}{dx^2}$$

da cui si deduce un'equazione differenziale del tutto analoga alla (1):

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha_t^2 u = 0 \quad (39)$$

in cui il coefficiente  $\alpha_t$  ha espressione:

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{N}{EJ \left(1 - \frac{N}{k_t}\right)}} \quad (40)$$

Poiché le condizioni al contorno sono le stesse (2), la soluzione della (39) è del tutto simile alla (3) con  $\alpha_t$  in luogo di  $\alpha$ . La condizione di equilibrio critico dell'asta si raggiunge quindi per  $\alpha_t L = \pi$ , da cui si deduce l'equazione

$$\frac{N_{ct}}{EJ \left(1 - \frac{N_{ct}}{k_t}\right)} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

dove  $N_{ct}$  è il carico critico dell'asta deformabile a taglio. Risolvendo questa equazione rispetto a  $N_{ct}$  si trova

$$N_{ct} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 \left(1 + \frac{\pi^2 EJ}{k_t L^2}\right)} \quad (41)$$

Per una sezione compatta  $k_t = GA/\chi$ , in cui  $G$  è il modulo di taglio e  $\chi$  un coefficiente adimensionale che dipende dalla forma della sezione, detto *modulo di taglio* (per una sezione rettangolare  $\chi \simeq 1.2$ ). Sostituendo questa espressione di  $k_t$  nella (41) si ricava

$$N_{ct} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 \left(1 + \chi \frac{\pi^2 EJ}{GAL^2}\right)} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 \left(1 + 2\chi \frac{\pi^2(1+\nu)}{\lambda^2}\right)} = \frac{N_c}{1 + 2\chi \frac{\pi^2(1+\nu)}{\lambda^2}} \quad (42)$$

in cui  $N_c$  indica il carico critico euleriano di un'asta deformabile solo a flessione, dato dall'eq. (7), e si è tenuto conto che, per un materiale isotropo,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . L'equazione (42) mostra che per le aste sufficientemente snelle ( $\lambda > 30$ ) il secondo termine del denominatore dell'espressione di  $N_{ct}$  è  $\ll 1$  e pertanto  $N_{ct} \approx N_c$ , giustificando quanto affermato sopra.

In termini di tensione media, dalla (41) segue:

$$\sigma_{ct} = \frac{N_{ct}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \left(1 + \frac{\pi^2 EJ}{k_t L^2}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \left(1 + \frac{\pi^2 EA}{k_t \lambda^2}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 + \pi^2 \frac{EA}{k_t}} \quad (43)$$

Tenendo conto dell'espressione (8) della tensione critica per l'asta indeformabile a taglio la (43) si può riscrivere:

$$\sigma_{ct} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{eq}^2} \quad (44)$$

in cui  $\lambda_{eq}$  è una snellezza equivalente che, come si deduce dalla (43) è data dalla relazione:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 \frac{EA}{k_t}} \quad (45)$$

Nel caso della sezione compatta ( $k_t = GA/\chi$ ), si ha in particolare:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + 2\chi\pi^2 (1 + \nu)} \quad (46)$$

L'introduzione della snellezza equivalente consente di estendere i risultati precedenti, relativi alle aste reali ed al metodo dei coefficienti  $\omega$  anche ai casi in cui si vuole tener conto della deformabilità a taglio. Poiché  $\omega$  dipende da  $\lambda$ , per verificare queste sezioni sarà sufficiente utilizzare nelle verifiche il valore di  $\omega$  corrispondente alla snellezza equivalente.

## 4 Aste composte

Spesso nelle costruzioni metalliche si utilizzano aste che sono ottenute accoppiando in vario modo profilati standard, così da ottenere forme più complesse a partire da elementi semplici. L'accoppiamento può avvenire attraverso tralici, calastrelli o imbottiture. Queste sezioni possono essere viste come dotate di una rigidezza al taglio minore di quella della sezione compatta e pertanto in grado di ridurre sensibilmente la rigidezza complessiva della sezione. Se si determina tale rigidezza, la snellezza equivalente si potrà poi calcolare applicando la relazione (45), ottenuta in precedenza.

Nel caso di profili affiancati, come quelli illustrati in Fig. 9, quando il piano di inflessione che passa per il baricentro non taglia i due profilati (asse  $y$  in figura), la snellezza complessiva coincide con quella dei singoli profilati; viceversa quando il piano di inflessione taglia i profilati (asse  $x$ ) allora la rigidezza dell'elemento è intermedia tra quella della sezione considerata

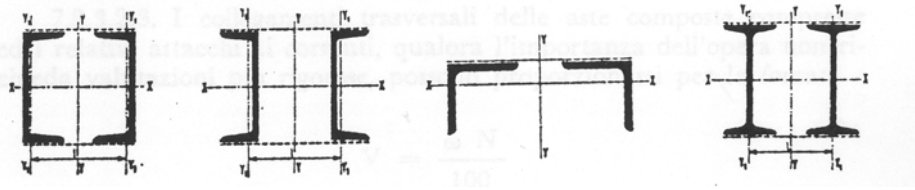


Figura 9: Sezioni composte con profili accoppiati.

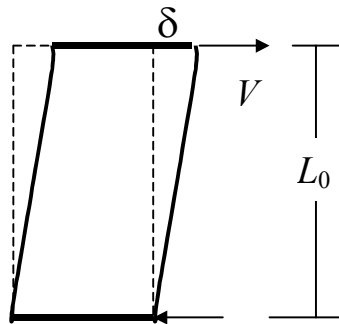


Figura 10: Deformazione di aste collegate da un traverso rigido

rigidamente connessa e quella del singolo profilato: in tal caso la snellezza complessiva dipende dalla rigidità dei collegamenti e dalla loro frequenza.

Nel seguito sono studiati due casi: elementi collegati con calastrelli rigidi o mediante imbottitura ed elementi collegati mediante tralicci.

#### 4.1 Elementi collegati con calastrelli rigidi o imbottiture

Considerando il collegamento tra le aste come infinitamente rigido, lo spostamento  $\delta$  provocato da una forza  $V$  è (Fig. 10):

$$\delta = \frac{V}{2} \frac{L_0^3}{12EJ_1}$$

dove  $J_1$  indica il momento di inerzia baricentrico di un profilato. Quindi:

$$\varphi = \frac{\delta}{L_0} = V \frac{L_0^2}{24EJ_1}$$

e di conseguenza la rigidità a taglio risulta

$$k_t = \frac{V}{\varphi} = \frac{24EJ_1}{L_0^2} \quad (47)$$

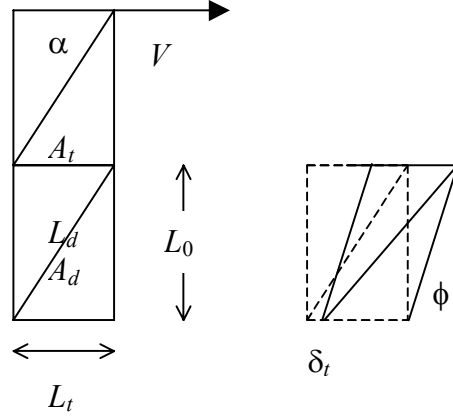


Figura 11: Schema di un'asta intralicciata e della sua deformazione di taglio

Sostituendo la (47) nella (45) e tenendo conto che  $A = 2A_1$  ( $A_1$  è l'area di un profilato), si ottiene

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 \frac{A_1 L_0^2}{12 J_1}} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\pi^2}{12} \lambda_1^2} \approx \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2} \quad (48)$$

dove  $\lambda_1 = L_0/\rho_1$  ( $\rho_1^2 = J_1/A_1$ ) è la snellezza di un'asta di lunghezza  $L_0$  e composta da un singolo profilato.

## 4.2 Elementi collegati con tralicci

Per le aste con uno schema come quello di Fig. 11 l'asta diagonale è tesa ed il trasverso è compresso (o viceversa). Indicando con  $\delta_t$  l'accorciamento del trasverso e con  $\varphi$  lo scorrimento è evidente che la lunghezza dell'asta diagonale dopo la deformazione è:

$$L'_d = \sqrt{(L_t - \delta_t + \varphi L_0)^2 + L_0^2} \approx \sqrt{L_0^2 + L_t^2 + 2L_t(\varphi L_0 - \delta_t)}$$

avendo considerato  $\varphi$  ed  $\delta_t$  come infinitesimi. Quindi, tenendo conto che  $L_0^2 + L_t^2 = L_d^2$

$$L'_d = L_d \sqrt{1 + 2 \frac{L_t(\varphi L_0 - \delta_t)}{L_d^2}} \approx L_d \left[ 1 + \frac{L_t(\varphi L_0 - \delta_t)}{L_d^2} \right]$$

Di conseguenza la deformazione dell'asta diagonale sarà

$$\varepsilon_d = \frac{L'_d - L_d}{L_d} = \frac{L_t(\varphi L_0 - \delta_t)}{L_d^2} \quad (49)$$

La forza nell'asta diagonale è

$$\frac{V}{\cos \alpha} = \frac{VL_d}{L_t}$$

come si deduce dall'equilibrio del nodo, quindi

$$\varepsilon_d = \frac{V}{EA_d} \frac{L_d}{L_t} \quad (50)$$

mentre evidentemente

$$\delta = \frac{V}{EA_t} L_t \quad (51)$$

Sostituendo le eq. (50) e (51) nella (49) si ottiene

$$\frac{V}{EA_d} \frac{L_d}{L_t} = \varphi \frac{L_t L_0}{L_d^2} - \frac{V}{EA_t} \frac{L_t^2}{L_d^2}$$

per cui la rigidezza a taglio del traliccio è

$$k_t = \frac{V}{\varphi} = E \frac{\frac{L_t L_0}{L_d^2}}{\frac{L_d}{A_d L_t} + \frac{L_t^2}{A_t L_d^2}} = \frac{E}{\frac{L_d^3}{A_d L_t^2 L_0} + \frac{L_t}{A_t L_0}} \quad (52)$$

La snellezza equivalente si ottiene infine sostituendo la (52) nella (45)

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 A \left( \frac{L_d^3}{A_d L_t^2 L_0} + \frac{L_t}{A_t L_0} \right)} \simeq \sqrt{\lambda^2 + 10 \frac{A}{L_t^2 L_0} \left( \frac{L_d^3}{A_d} + \frac{L_t^3}{A_t} \right)} \quad (53)$$

in cui  $A$  è l'area complessiva dei profilati accoppiati.

## 5 Influenza dei vincoli

Per studiare il casi di aste con condizioni di vincolo diverse da quelle della trave semplicemente appoggiata si considera ora il caso generale in cui alle estremità della trave agiscono vincoli che possono produrre momenti di estremità  $m_1$  ed  $m_2$  diversi da zero.

L'equazione della linea elastica della trave diviene quindi:

$$m_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - m_2 \frac{x}{L} + Nu(x) = -EJ \frac{d^2 u(x)}{dx^2}$$

che si può scrivere:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \alpha^2 u(x) + \theta_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - \theta_2 \frac{x}{L} = 0 \quad (54)$$

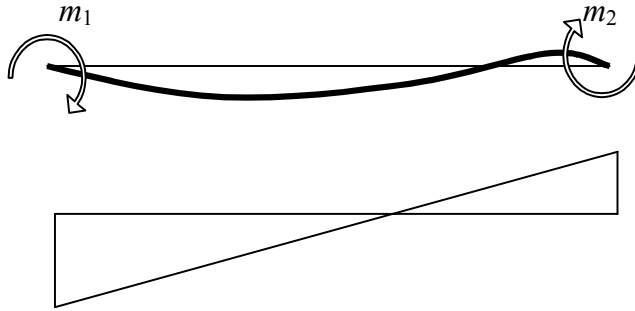


Figura 12:

dove  $\theta_1 = \frac{m_1}{EJ}$ ,  $\theta_2 = \frac{m_2}{EJ}$ .

La soluzione dell'eq. (54) con le condizioni al contorno (2) è:

$$u(x) = \frac{\theta_1(L-x) - \theta_2 x}{\alpha^2 L} - \frac{\theta_1 \sin[\alpha(L-x)] - \theta_2 \sin(\alpha x)}{\alpha^2 \sin(\alpha L)} \quad (55)$$

## 5.1 Asta con incastro e appoggio

I valori dei coefficienti  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dipendono dai vincoli di estremità dell'asta. Per esempio nel caso di un'asta incastrata ad un estremo ed incernierata nell'altro si avrà  $m_2 = \theta_2 = 0$  e  $\frac{du}{dx}\bigg|_{x=0} = 0$ . Si ottiene quindi l'equazione:

$$\theta_1 \left( \frac{-1}{\alpha^2 L} + \frac{\alpha \cos(\alpha L)}{\alpha^2 \sin(\alpha L)} \right) = 0$$

che è soddisfatta per valori di  $m_1$  e quindi  $\theta_1$  diversi da zero solo se:

$$\tan(\alpha L) = \alpha L$$

che è soddisfatta per

$$\alpha L = 4.49341$$

Questa condizione è equivalente alla

$$\alpha \frac{\pi}{4.49341} L = \alpha(\beta L) = \pi$$

Questa equazione coincide con la (5) se si sostituisce alla lunghezza effettiva  $L$  la *lunghezza libera di inflessione*  $L_i = \beta L$ . Nel caso esaminato

$$\beta = \frac{\pi}{4.49341} = 0.699$$

## 5.2 Caso generale

### 5.2.1 Nodi fissi

Nel caso generale dell'asta vincolata con molle di rigidezza  $k_1$  e  $k_2$  ma con nodi impediti a spostarsi, le condizioni per determinare  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono che i momenti di estremità  $m_1$  ed  $m_2$  siano equilibrati da quelli prodotti dalle molle:

$$m_i = -\theta_i EJ = -k_i u'_i \quad (i = 1, 2) \quad (56)$$

dove  $u'_1 = u'(0)$  e  $u'_2 = u'(L)$  ( $u' = \frac{du}{dx}$ ). Ponendo

$$\bar{k}_i = \frac{k_i}{EJ}$$

e sostituendo la (55) nella (56), si ottengono le due equazioni:

$$\begin{aligned} -\theta_1 &= \bar{k}_1 u'(0) = \bar{k}_1 \left[ \frac{\alpha L \cos(\alpha L) - \sin(\alpha L)}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \theta_1 + \frac{\alpha L - \sin(\alpha L)}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \theta_2 \right] \\ -\theta_2 &= \bar{k}_2 u'(L) = \bar{k}_2 \left[ \frac{\alpha L - \sin(\alpha L)}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \theta_1 + \frac{\alpha L \cos(\alpha L) - \sin(\alpha L)}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \theta_2 \right] \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\bar{k}_1}{\alpha} \cot(\alpha L) - \left( 1 + \frac{\bar{k}_1}{\alpha^2 L} \right) \right] \theta_1 + \bar{k}_1 \frac{\alpha L - \sin(\alpha L)}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \theta_2 = 0 \quad (57a)$$

$$\bar{k}_2 \frac{\alpha L - \sin(\alpha L)}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \theta_1 + \left[ \frac{\bar{k}_2}{\alpha} \cot(\alpha L) - \left( 1 + \frac{\bar{k}_2}{\alpha^2 L} \right) \right] \theta_2 = 0 \quad (57b)$$

Le due equazioni (57) formano un sistema omogeneo che ha soluzioni non banali solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Ponendo  $\alpha L = x$ , e

$$\kappa_i = \bar{k}_i L$$

dalle (57) si ricava:

$$\left[ \frac{\kappa_1}{x} \cot x - \left( 1 + \frac{\kappa_1}{x^2} \right) \right] \left[ \frac{\kappa_2}{x} \cot x - \left( 1 + \frac{\kappa_2}{x^2} \right) \right] - \kappa_1 \kappa_2 \left( \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \right)^2 = 0$$

Dopo alcune manipolazioni questa equazione si può anche formulare:

$$\frac{2\kappa_1 \kappa_2 (1 - \cos x) - (\kappa_1 + \kappa_2) x^2 \cos x}{\sin x} + (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2) x + x^3 = 0 \quad (58)$$

Risolvendo (numericamente) l'eq. (58) si determinano, in funzione di  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , i valori di  $\alpha L$  che soddisfano le due equazioni (57). Indicando con  $x_0$  una

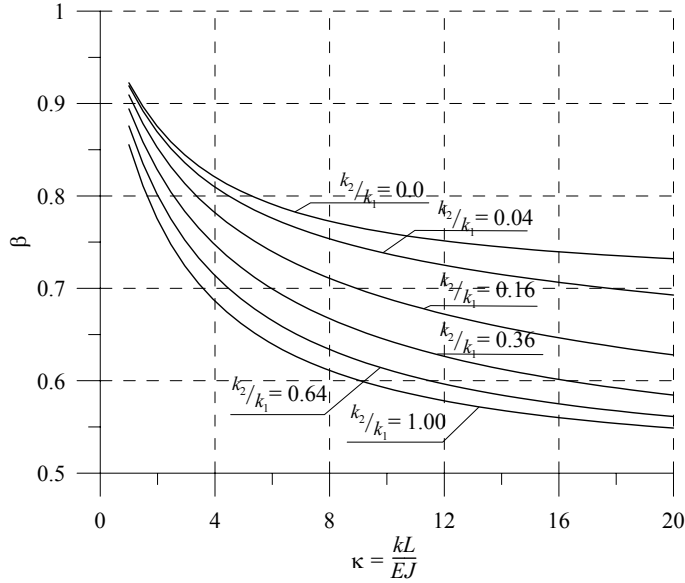


Figura 13: Coefficiente della lunghezza libera di inflessione dell'asta in funzione della rigidezza normalizzata  $\kappa = \kappa_1 = \frac{k_1 L}{EJ}$  e del rapporto  $\frac{k_2}{k_1}$  tra le rigidezze alle due estremità, nel caso di nodi impediti a spostarsi.

generica soluzione, dalla condizione  $\alpha L = x_0$  si deriva che  $\alpha(\pi/x_0)L = \pi$  e quindi

$$\beta = \frac{\pi}{x_0}$$

è il coefficiente della lunghezza libera di inflessione.

In Fig. 13 sono rappresentate le curve  $\beta(\kappa_1, \kappa_2)$  in funzione di  $\kappa_1$  e per diversi valori del rapporto  $\frac{k_1}{k_2}$ . Tutte le curve, per  $\kappa \rightarrow 0$  tendono ad 1, in quanto per questo valore  $k_1 = k_2 = 0$  e ciò corrisponde al caso dell'asta doppiamente incernierata. La curva superiore ( $\frac{k_1}{k_2} = 0$ ) rappresenta il caso delle aste incernierate ad un estremo; per  $\kappa \rightarrow \infty$   $\beta$  tende a 0.7. La curva inferiore ( $k_2 = k_1$ ) è il caso con vincoli simmetrici; per  $\kappa \rightarrow \infty$  si ha il caso dell'asta con doppio incastro e  $\beta \rightarrow 0.5$ .

### 5.2.2 Nodi spostabili

Assumendo che i vincoli non siano in grado di assorbire forze di taglio, il momento lungo l'asta cambia solo per gli effetti del secondo ordine; l'equazione della linea elastica è quindi:

$$-EJu''(x) = Nu(x) + m_1 \quad (59)$$

con le condizioni al contorno  $u(0) = 0$ ,  $u(L) = u_0$ , dove  $u_0$  è lo spostamento relativo, incognito, tra le estremità dell'asta. La soluzione dell'eq. (59) è:

$$u(x) = \frac{1}{\alpha^2} \left[ \sin(\alpha x) \frac{1 - \cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} + \cos(\alpha x) - 1 \right] \theta_1 + \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} u_0 \quad (60)$$

D'altra parte, per l'equilibrio dell'asta si dovrà avere:

$$Nu_0 = -(m_1 + m_2)$$

ovvero

$$u_0 = -\frac{m_1 + m_2}{\alpha^2 EJ} = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{\alpha^2}$$

Sostituendo  $u_0$  nella (60) si ottiene:

$$u(x) = \frac{1}{\alpha^2} [\cos(\alpha x) - 1 - \cot(\alpha L) \sin(\alpha x)] \theta_1 - \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2 \sin(\alpha L)} \theta_2 \quad (61)$$

Per l'equilibrio dei nodi devono essere soddisfatte condizioni analoghe alle (56), da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \frac{\cos(\alpha L)}{\alpha \sin(\alpha L)} \bar{k}_1 \right] \theta_1 - \frac{\bar{k}_1}{\alpha \sin(\alpha L)} \theta_2 &= 0 \\ -\frac{\bar{k}_2}{\alpha \sin(\alpha L)} \theta_1 + \left[ 1 - \frac{\cos(\alpha L)}{\alpha \sin(\alpha L)} \bar{k}_2 \right] \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Questo sistema omogeneo ha soluzioni non banali solo se è nullo il determinante dei coefficienti, da cui si ricava l'equazione

$$1 - \frac{\kappa_1 \kappa_2}{x^2} - \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{x \tan(x)} = 0 \quad (62)$$

dove  $x = \alpha L$  e  $\kappa_i = \bar{k}_i L$ .

Le soluzioni della (62) sono rappresentate dalle curve in Fig. 14. Tutte le curve, per  $\kappa \rightarrow 0$  tendono all'infinito, in quanto un'asta doppiamente incernierata e libera di traslare in direzione ortogonale alla linea d'asse è labile. La curva superiore ( $k_2 = 0$ ) rappresenta il caso dell'asta libera in sommità; per  $\kappa \rightarrow \infty$  l'asta tende allo schema di una mensola incastrata alla base e  $\beta \rightarrow 2$ . La curva inferiore ( $k_2 = k_1$ ) rappresenta le aste vincolate in modo simmetrico. Per  $\kappa \rightarrow \infty$  si ottiene lo schema dell'asta con doppio incastro (ma scorrevoli in sommità) ed il corrispondente valore di  $\beta \rightarrow 1$ .

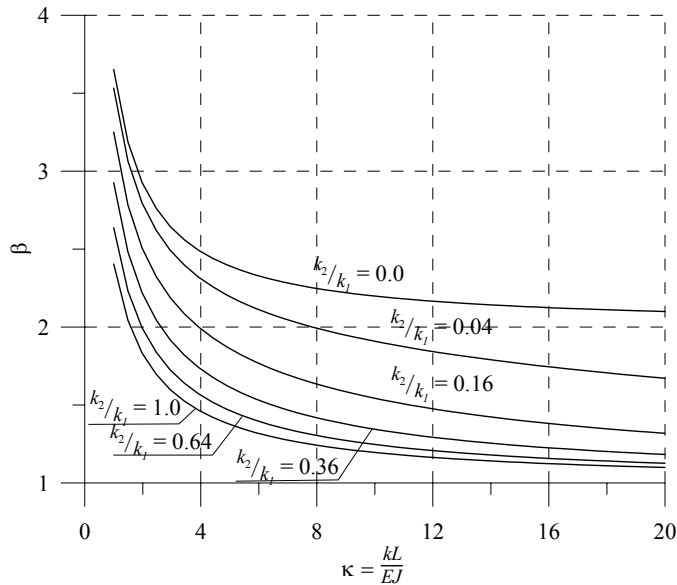


Figura 14: Coefficiente della lunghezza libera di inflessione dell'asta in funzione della rigidezza normalizzata  $\kappa = \kappa_1 = \frac{k_1 L}{EJ}$  e del rapporto  $\frac{k_2}{k_1}$  tra le rigidezze alle due estremità, nel caso di nodi liberi di spostarsi.

## 6 Prescrizioni normative

Si riportano nel seguito alcune delle indicazioni riportate nelle Norme Tecniche CNR 1011/97, relativamente al calcolo delle aste composte.

La verifica per le aste costituite da due correnti uguali si conduce secondo il metodo  $\omega$  visto in precedenza per le aste semplici, valutando però la snellezza con le modalità indicate nei punti successivi. Le espressioni approssimate della snellezza in essi riportate si intendono applicabili quando l'importanza dell'opera non richieda procedimenti di calcolo più rigorosi.

### 6.1 Sezioni composte da più elementi collegati fra di loro con calastrelli o tralicci.

Aste composte da più elementi collegati fra di loro con calastrelli o I tralicci del tipo rappresentato nella figura 9 possono verificarsi come segue:

- per la verifica all'inflessione laterale in direzione normale a un asse principale di inerzia che taglia tutte le sezioni degli elementi componenti l'asta (asse  $xx$  di figura 9) la snellezza si valuta come per un'asta semplice;

- per la verifica all'inflessione laterale in direzione normale a un asse principale di inerzia che non taglia tutte le sezioni degli elementi componenti l'asta (asse  $yy$  di figura 9) bisogna distinguere fra i due tipi di collegamento dei correnti, a calastrelli o a traliccio.

Nel caso di collegamento a calastrelli, se la deformabilità di questi è trascurabile rispetto a quella dei correnti, si assume la snellezza ideale fornita dall'eq. (48), dove  $\lambda$  è la snellezza dell'asta prendendo in conto il momento di inerzia rispetto all'asse  $y$  di tutta la sezione e

$$\lambda_1 = \frac{L_0}{\rho_{\min}}$$

essendo  $L_0$  l'interasse tra i calastrelli e  $\rho_{\min}$  il raggio di inerzia *minimo* dell'elemento singolo

Per l'applicabilità della formula deve risultare:

$$\frac{L_0}{\rho_{1y}} \leq \min \left\{ \frac{\lambda_x}{2} \left( 4 - 3 \frac{N}{N_c} \right), 50 \right\}$$

essendo  $N$  il carico totale agente sull'asta composta,  $A$  la sezione trasversale complessiva e  $N_c$  il carico critico dell'asta.

Nel caso di sezioni con collegamento a traliccio, secondo gli schemi a) e b) della figura 15;

- schema a); si assume la snellezza equivalente fornita dall'equazione (53).
- schema b); si assume<sup>1</sup>:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + 10 \frac{AL_d^3}{L_t^2 L_0 A_d}}$$

Occorre inoltre verificare, per ambedue i tipi di parete, la stabilità locale di ciascun corrente per la quota di carico ad esso affidata.

I collegamenti trasversali delle aste composte compresse ed i relativi attacchi ai correnti, qualora l'importanza dell'opera non richieda valutazioni più rigorose, possono proporzionarsi per la forza:

$$V = \frac{\omega N}{100}$$

---

<sup>1</sup>Questa equazione si deduce dalla (53) annullando il secondo termine in parentesi. Infatti in questi schemi il trasverso manca o è scarico (e pertanto non si deforma):

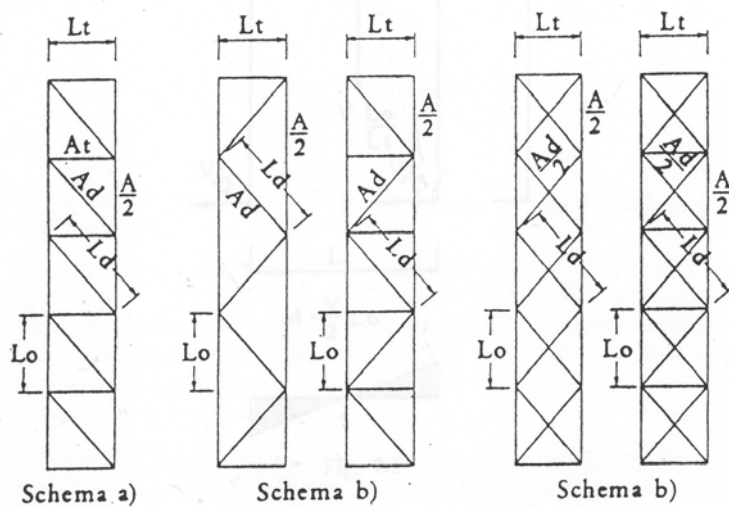


Figura 15: Schemi di aste composte con collegamenti a traliccio

dove  $N$  è la forza assiale applicata all'asta.

In presenza di azioni dinamiche la forza  $V$  deve essere aumentata del 25%.

Se il collegamento è realizzato con calastrelli, la forza  $V$  deve essere maggiorata della quantità  $5(L_t/\rho_{1\min} - 20)\%$ , quando la distanza massima tra gli assi dei correnti supera  $20\rho_{1\min}$ .

I calastrelli di collegamento si calcolano ammettendo che la forza  $V$  si ripartisca in quote uguali tra i correnti.

I calastrelli devono suddividere l'asta in almeno tre campi ed essere distanziati in modo da ottenere un interasse costante. Il loro collegamento a ciascuno dei correnti deve essere effettuato o con cordoni di saldatura o con almeno due chiodi o due bulloni, ad attrito, o due bulloni in accoppiamento di precisione.

## 6.2 Sezioni composte da elementi ravvicinati collegati con calastrelli

Per aste composte da due o quattro profilati posti ad un intervallo pari allo spessore delle piastre di attacco dei nodi e comunque a una distanza non maggiore di 3 volte il loro spessore, la verifica può essere condotta come per un'asta semplice purchè i collegamenti siano disposti ad interasse non

maggiore di  $50\rho_{1\min}$  per l'acciaio tipo Fe 360 o Fe 430 e  $40\rho_{1\min}$  per l'acciaio Fe 510.

In particolare per le aste composte da due cantonali posti a croce i collegamenti devono essere realizzati con calastrelli alternativamente ortogonali fra di loro.

In ogni caso i calastrelli devono dividere in almeno tre campi uguali l'asta e per ogni attacco essi devono essere uniti agli elementi mediante saldatura ovvero con almeno due chiodi, due bulloni ad attrito, o due bulloni in accoppiamento di precisione.

### 6.3 Sezioni composte da elementi ravvicinati collegati con imbottiture

Aste composte da due o quattro profili uguali posti ad un intervallo pari allo spessore della piastra di attacco e comunque a una distanza non maggiore di 3 volte lo spessore del profilato, in mancanza di una determinazione più rigorosa della tensione critica, possono verificarsi secondo i criteri indicati successivamente.

In ogni caso i collegamenti devono dividere in almeno tre campi uguali l'asta.

Se il collegamento ha la sola funzione geometrica di contrastare l'inflessione laterale in direzione di un asse principale di inerzia del singolo profilato (per esempio l'inflessione in direzione normale all'asse  $i_{1\min}$  dei profilati di figura 16, casi a) e b) e di conseguenza la snellezza dell'asta venga valutata con riferimento a un differente raggio di inerzia del profilato singolo (per esempio all'asse  $xx$  di figura 16, casi a) e b), la verifica può condursi come per un'asta semplice).

I collegamenti devono essere costituiti da piastre di imbottitura saldate

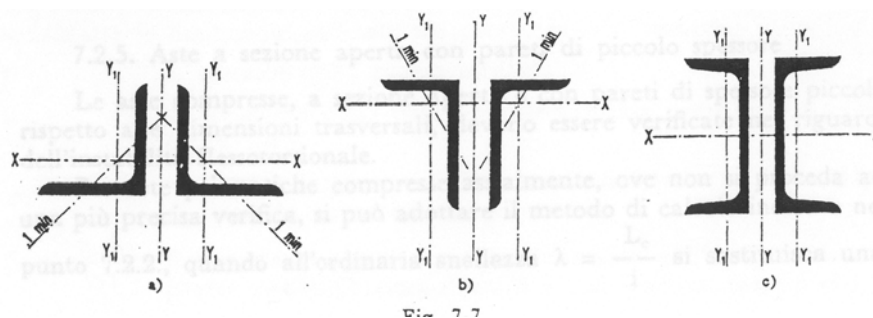


Figura 16: Schemi di profil accoppiati mediante imbottiture

o collegate con chiodi o bulloni normali o ad attrito, disposti a un intervallo tale che la snellezza locale non superi quella globale.

Se il collegamento ha invece la funzione di contrastare la inflessione in direzione normale a un'asse principale di inerzia della sezione composta che non tagli tutte le sezioni degli elementi che la compongono (per esempio l'asse  $yy$ , della figura 16) e pertanto la snellezza venga valutata con riferimento ad un raggio di inerzia più grande che non a quello del profilato singolo nella stessa direzione, la verifica dell'asta può condursi come per un'asta semplice, ma assumendo una snellezza equivalente pari a quella fornita dall'eq. (48).

Verifiche meno sommarie sono richieste qualora  $\lambda_1$  superi 50 per l'acciaio tipo Fe 360 e Fe 430 e 40 per l'acciaio Fe 510. In ogni caso il collegamento deve essere costituito da una piastra di imbottitura saldata o collegata con almeno due chiodi, due bulloni ad attrito o due bulloni in accoppiamento di precisione disposti secondo l'asse della membratura.